Esercizi su radici Complesse e Primi Esercizi sui Gruppi

(1) Nei numeri complessi, trovare tutte le radici quinte dell'unità. In altre parole, trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^5 = 1.$$

(2) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^3 = -1 - i.$$

(3) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^3\overline{z} = 2.$$

(Suggerimento: $\overline{z}$ è uguale a z^-1 moltiplicato per ...).

(4) Determinare tutti i numeri complessi z per i quali vale

$$z = z^{-1}$$

(5) Dimostrare che per ogni numero complesso z si ha

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Dimostra inoltre che, per ogni $z, z' \in \mathbb{C}$ vale:

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}', \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'.$$

(6) Sia

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z_1 + a_0$$

un polinomio dove i coefficienti a_i sono numeri reali.

Dimostra che, se il numero complesso z è soluzione dell'equazione

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z_1 + a_0 = 0,$$

allora anche $\overline{z}$ è soluzione della stessa equazione.

Utilizzando questo risultato dimostra che ogni equazione

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z_1 + a_0 = 0,$$

ha sempre un numero pari di radici che non sono numeri reali.

(7) In ognuno dei casi seguenti stabilire se l'insieme proposto è un gruppo rispetto all'operazione assegnata. Se non è un gruppo specificare quali fra le proprietà di gruppo non sono verificate.

(a) l'insieme dei numeri interi dispari rispetto all'addizione;
(b) l'insieme dei numeri interi dispari rispetto alla moltiplicazione;
(c) l'insieme $\{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla somma;
(d) l'insieme $\{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla moltiplicazione;
(e) l'insieme $Q^* = Q \setminus \{0\}$ con l'operazione $\circ$ definita da

$$a \circ b = 10ab.$$

(f) L'insieme $P(S)$ dei sottoinsiemi di un insieme S, con l'operazione $\triangle$

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus A \cap B.$$

(g) l'insieme dei numeri $\{1, 2, 3\}$ con l'operazione di moltiplicazione modulo 8.

(8) Sia $X = \{1, , 2, 3, 4\}$ e f, g, h le seguenti bijezioni da X a X:

$f(1) = 2;\ f(2) = 1;\ f(3) = 3;\ f(4) = 4$
$g(1) = 1;\ g(2) = 2;\ g(3) = 4;\ g(4) = 3$
$h(1) = 2;\ h(2) = 1;\ h(3) = 3;\ h(4) = 4.$
Se id_X indica la funzione identità su X, determinare se l'insieme

$$\{id_X, f, g, h\}$$

è un gruppo rispetto all'operazione di composizione. In caso affermativo, determinare gli inversi di tutti gli elementi del gruppo e la tavola moltiplicativa del gruppo.

(9) Scrivere la tavola moltiplicativa del gruppo $U(8)$ degli elementi invertibili modulo 8 e la tavola moltiplicativa di $U(9)$. Trovare gli inversi degli elementi di $U(9)$.

(10) Dimostrare che l'insieme dei numeri reali $\{1\}$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione. Esistono altri sottoinsiemi finiti di numeri reali che sono gruppi rispetto alla moltiplicazione? Se si, quali? Esistono sottoinsiemi finiti di numeri complessi che sono gruppi rispetto alla moltiplicazione?