

Esercizi su gruppi di permutazioni e sottogruppi

1. PERMUTAZIONI

- (1) Date le permutazioni f, g seguenti, determinare se la permutazione $f^{-1}g$ è pari o dispari.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (2) Elencare tutte le permutazioni pari e tutte le permutazioni dispari di S_3 .
- (3) Sia f una permutazione pari. Allora:

$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	f^{-1} è pari;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	f^2 è pari;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	f^3 è dispari;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	$f \circ (1, 2)$ è pari;

- (4) -

$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	Ogni permutazione si scrive in modo unico come prodotto di scambi disgiunti;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	se una permutazione si scrive come prodotto di scambi disgiunti allora f^2 è l'identità;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	se f^2 è l'identità allora f si scrive come prodotto di scambi disgiunti;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	se f, g sono due permutazioni e fg è pari, allora anche f e g sono pari;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	se f, g sono due permutazioni e fg è dispari, allora anche f e g sono dispari;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	se f, g sono due permutazioni e fg è dispari, allora f è dispari oppure g è dispari;
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	se f, g sono due permutazioni e fg è pari, allora anche gf è pari.

- (5) L'inverso del ciclo $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ è

$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	$(i_1, i_k, i_{k-1}, \dots, i_2);$
$\begin{array}{ c c } \hline \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$	$(i_2, \dots, i_k, i_1);$

- (6) Dimostrare che, se f è una permutazione dispari di S_n , allora moltiplicando f a destra con tutte le permutazioni dispari si ottengono tutte le permutazioni pari. In altre parole, se f è dispari,

$$A_n = \{fg : g \text{ dispari}\}.$$

2. SOTTOGRUPPI

Ricordiamo che un sottogruppo H di un gruppo $(G, \cdot)$ è un sottoinsieme di G che contiene l'identità di G ed è chiuso per prodotti e inversi; in altre parole, H è un sottogruppo se:

- $1_G \in H$, dove 1_G è l'identità di G ;

- se $h \in H$ allora l'inverso h^{-1} di h in G appartiene ad H ;
- se $h, h' \in H$ allora il prodotto $h \cdot h'$ appartiene ad H , dove $\cdot$ è l'operazione di G .

(7) -

- | | |
|----------|----------|
| V | F |
| V | F |
| V | F |
| V | F |
| V | F |
| V | F |
| V | F |
- $\mathbb{Z}$ è un sottogruppo di $(R, +)$;
- $\mathbb{Z}^*$ è un sottogruppo di $(R^*, \cdot)$;
- l'insieme degli interi congrui a zero modulo n è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$;
- l'insieme degli interi congrui a 1 modulo n è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$;
- l'insieme dei numeri $\{0, 2, 4, 6\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}_7, +)$;
- l'insieme dei numeri $\{0, 2, 4, 6\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}_8, +)$;
- l'insieme dei numeri complessi z , tali che $z^3 = -1$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

(8) Considera il sottoinsieme

$$H = \{f \in S_5 : f(1) = 1\},$$

e dimostra che è un sottogruppo di S_5 . Qual è la cardinalità di H ?
Più in generale, se $Y \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, dimostra che l'insieme

$$H = \{f \in S_n : \forall y \in Y f(y) = y\}$$

è un sottogruppo di S_n . Qual è la cardinalità di H ?

(9) Sia S_4 il gruppo delle permutazioni su 4 elementi, e S il sottoinsieme di S_4 dato dalle 4 permutazioni seguenti: id , $f = (1, 2)(3, 4)$, $g = (1, 3)(2, 4)$, $h = (1, 4)(2, 3)$.

(Nota bene: le permutazioni sono descritte come prodotti di scambi: nella notazione a tabella si ha, ad esempio:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot)$$

- Dimostrare che H è un sottogruppo abeliano di S_4 e che, a meno dei nomi degli oggetti, la sua tabella moltiplicativa è identica a quella del gruppo moltiplicativo $(U(8), \cdot)$ degli elementi invertibili modulo 8.
 - Dato un elemento in H , qual è il suo inverso?
 - H è un sottogruppo anche del gruppo alterno A_4 delle permutazioni pari su 4 elementi?
- (10) Dimostrare che il gruppo moltiplicativo $(U(8), \cdot)$ dove $U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$ è l'insieme degli elementi invertibili modulo 8, e $\cdot$ è la moltiplicazione modulo 8 è un gruppo abeliano ma non è ciclico.
Dimostrare che il gruppo moltiplicativo $(U(9), \cdot)$ degli elementi invertibili modulo 9 è ciclico e determinare un elemento generatore (suggerimento per $U(8)$: notare che ogni $a \in U(8)$ vale $a \cdot a = ?$).

(11) Si ha:

- | | |
|----------|----------|
| V | F |
| V | F |
- Il gruppo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ non ha sottogruppi finiti tranne $\{1\}$ e $\{1, -1\}$;
- Il gruppo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ non ha sottogruppi finiti tranne $\{1\}$ e $\{1, -1\}$;

V **F** $\{1, -1\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}, +)$;

V **F** Il gruppo $(\mathbb{C}, +)$ non ha sottogruppi finiti tranne il sottogruppo $\{0\}$;

V **F** L'insieme $\{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}, +)$.

(12) Dimostrare che se H è un sottogruppo di S_n che contiene tutte le permutazioni dispari, allora $H = S_n$.

(13) Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}^*$ è l'insieme dei numeri reali non nulli) considera l'operazione $\cdot$ definita da:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bc + d).$$

Dimostra che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ è un gruppo. In particolare: chi è l'identità del gruppo? Dato un elemento (a, b) chi è il suo inverso?