PRINCIPIO D'INDUZIONE

(1) Per ognuna delle seguenti proprietà $P(n)$ determinare $P(1), P(4)$, $P(n+1)$, $P(n-1), P(2n), P(n^2)$.

(a) $P(n)$ è
$$1 + 2 + \dots n = n(n+1)/2;$$
(b) $P(n)$ è
$$2 \cdot 3^n > 9n^2;$$
(c) $P(n)$ è
$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1;$$
(d) $P(n)$ è
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

(2) Scrivere la somma dei quadrati dei primi n numeri dispari;

(3) Scrivere la somma dei quadrati dei primi n numeri pari;

(4) Scrivere la somma degli inversi dei primi n numeri pari;

(5) Scrivere la somma degli inversi dei primi n numeri dispari;

(6) Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

(7) Dimostrare per induzione che per ogni $n > 4$ vale
$$2 \cdot 3^n > 9n^2.$$

(8) Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ si ha
$$2^{n+1} < 3^n.$$

(9) Dimostrare per induzione che la somma dei quadrati dei primi n numeri dispari è uguale a $\frac{n(4n^2-1)}{3}$, cioè:
$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

(10) Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale:
$$2^n + 3^n < 4^n.$$

(11) Sia $n!$ il prodotto di tutti i numeri interi da 1 ad n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 4$ si ha

$$n! > 2^n.$$

(12) Dimostrare per induzione che per ogni n il numero $n^3 - n$ è un multiplo di 6.

(13) Calcola i valori della somma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, e, esaminado tali valori, trova una formula che valga per ogni valore di $n \geq 1$, dimostrandola per induzione.

(14) Dimostrare per induzione che per ogni n vale:

$$(\sqrt{2})^0 + (\sqrt{2})^1 + (\sqrt{2})^2 + \ldots (\sqrt{2})^n = \frac{1 - (\sqrt{2})^{n+1}}{1 - \sqrt{2}}.$$

Più in generale, dato $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ inventa una formula per

$$a^0 + a^1 + a^2 + \ldots a^n$$

e dimostrala per induzione.

(15) Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ vale:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$