

Esercizi sui gruppi

- (1) Sia $(G, \cdot)$ un gruppo finito e $g \in G$. L'ordine di g in G (denotato con $\text{ord}(g)$) è il più piccolo numero naturale n tale che $g^n = 1_G$, dove 1_G è l'identità del gruppo (oppure, in versione additiva $(G, +)$, $\text{ord}(g)$ è il più piccolo numero n per cui $ng = 0_G$, dove 0_G è l'identità del gruppo. Ricorda che l'ordine di g è anche la cardinalità del sottogruppo ciclo $\langle g \rangle$ generato da g in G . Trovare l'ordine degli elementi sottoelencati nei relativi gruppi.
 - (a) $2 \in (\mathbb{Z}_5, +)$, $2 \in (\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$;
 - (b) $(1, 2, 3)(3, 2) \in S_3$;
 - (c) l'ordine di un ciclo qualsiasi di lunghezza k in S_n ;
 - (d) $7 \in (U(10), \cdot)$ dove $U(10)$ sono gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{10}$;
 - (e) i nel gruppo $\mathbb{C}_8$ delle radici ottave dell'unità;
 - (f) $z = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$ nel gruppo delle radici settime dell'unità;
 - (g) $f \circ g$ dove f, g sono cicli disgiunti di lunghezza h, k rispettivamente.
- (2) Dimostrare che in un gruppo G non ciclico di ordine 4 vale $a \cdot a = id$, per ogni $a \in G$. (suggerimento: considerare l'ordine del sottogruppo $\langle a \rangle$ di G generato da a e usare il Teorema di Lagrange).
- (3) Dimostrare che in un gruppo G che ha un numero primo di elementi gli unici sottogruppi sono $H = \{1_G\}$ (dove 1_G è l'identità del gruppo) e $H = G$. (suggerimento: usare il Teorema di Lagrange)
- (4) Trovare tutti i sottogruppi di S_3 . Dire quali sono ciclici e quali no.
- (5) Considera i gruppi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dove $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ sono i numeri reali e i numeri complessi non nulli, rispettivamente. Tali gruppi sono isomorfi?
- (6) Determinare se il gruppo $(A_4, \circ)$ è isomorfo o meno al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.
- (7) Dimostrare che $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ è isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$.