Esercizi su gruppi diedrali e classi laterali

(1) Date le permutazioni f, g seguenti, calcolare $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, $(f \circ g)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ e scrivere tutte le premutazioni ottenute come prodotto di cicli disgiunti.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) L'inverso del ciclo $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ è

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $(i_1, i_k, i_{k-1}, \ldots, i_2)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $(i_2, \ldots, i_k, i_1)$;

(3) Considera il seguente sottoinsieme X dei numeri complessi $\mathbb{C}$:

$$X = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Determinare se tale sottoinsieme è un gruppo rispetto all'operazione di somma fra numeri complessi.

(4) Considera il seguente sottoinsieme Y dei numeri complessi non nulli $\mathbb{C}^*$:

$$X = \{a + ib \in \mathbb{C}^* : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Determinare se tale sottoinsieme è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione fra numeri complessi.

(5) Sia $\mathbb{R}^*$ l'insieme dei numeri reali non nulli, i l'unità immaginaria e $i\mathbb{R}^*$ l'insieme $\{ir : r \in \mathbb{R}^*\}$. Considera il sottoinsieme $X = \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$ dei numeri complessi non nulli $\mathbb{C}^*$. Determinare se X è un gruppo rispetto alla moltiplicazione fra numeri complessi.

(Attenzione: notare che, ad esempio, il numero $1 + i$ non appartiene ad X, perché non appartiene né a R^* né a $i\mathbb{R}^*$).

(6) Dato un gruppo $(G, \circ)$ e un elemento $g \in G$. Ricordiamo che, dato $n \in \mathbb{N}$ e $g \in G$ si definisce:

$$\begin{aligned} g^n &= g \circ g \ldots \circ g \text{ (il prodotto di } g \text{ con sé stesso, n-volte)} \\ g^0 &= e \text{ è l'identità del gruppo} \\ g^{-n} &= (g^n)^{-1}. \end{aligned}$$

Dimostra che l'insieme delle potenze

$$\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

è un gruppo rispetto all'operazione $\circ$.

Questo gruppo si chiama *sottogruppo ciclico* generato da g in $(G, \circ)$ e si indica con $< g >$.
(NOTA BENE: se l'operazione del gruppo è l'addizione, si avrà, corrispondentemente:

$$\begin{aligned} ng &= g + g \ldots + g \text{ (la somma di } g \text{ con sé stesso, n-volte)} \\ 0g &= 0 \text{ è l'identità del gruppo} \\ (-n)g &= -(ng). \end{aligned}$$

e

$$< g >= \{ng : n \in \mathbb{Z}\}).$$

Determina:

i) il sottogruppo ciclico $< i >$ generato da i nei numeri complessi non nulli con la moltiplicazione;

ii) il sottogruppo ciclico $< 1 >$ generato da 1 nei numeri interi con l'addizione;

iii) il sottogruppo ciclico determinato da 2 nei numeri interi con l'addizione;

iv) il sottogruppo ciclico generato dalla permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

nel gruppo S_4 con la composizione.

(7) Sia $i\mathbb{R}$ il seguente sottoinsieme dei numeri complessi: $i\mathbb{R} = \{ir : r \in \mathbb{R}\}$. Determina se $i\mathbb{R}$ è un gruppo rispetto all'addizione fra numeri complessi,

(8) Sia $i\mathbb{R}^*$ il seguente sottoinsieme dei numeri complessi: $i\mathbb{R}^* = \{ir : r \in \mathbb{R}, r \neq 0\}$. Determina se $i\mathbb{R}^*$ è un gruppo rispetto all'addizione fra numeri complessi.
Considera poi l'insieme $X = \{r \in \mathbb{R} : r \neq 0\} \cup i\mathbb{R}^*$. Determina se tale sottoinsieme è un gruppo rispetto alla moltiplicazione fra numeri complessi.

(9) Scrivere la tavola moltiplicativa del gruppo $U(\mathbb{Z}_5)$ degli elementi invertibili modulo 5 e quella del gruppo $\mathbb{C}_4$ delle radici quarte dell'unità. Confronta le due tavole.