

# Esercizi di Calcolo di Cardinalità di Insiemi Finiti

30 ottobre 2009

1. Sette persone si incontrano ad una festa, e ognuno di loro stringe la mano a tutti gli altri sei. Quante sono le strette di mano scambiate?
2. Nella stessa festa, viene proposto il gioco della sedia: ci sono sei sedie in fila e, quando la musica termina, gli invitati si devono sedere; perde chi rimane in piedi.
  - (a) Quanti possibili scenari (modi diversi di riempire le sei sedie con sette persone) ci sono, se non teniamo conto dell'ordine delle sedie? (ad esempio, non consideriamo differente lo scenario in cui Carlo si siede sulla prima sedia e Angelo sulla seconda o viceversa)
  - (b) Quanti possibili scenari ci sono se invece teniamo conto dell'ordine delle sedie?
3. Sia  $A = \{1, \dots, n\}$ . Calcola la cardinalità dei seguenti insiemi:
  - (i) l'insieme delle coppie  $(a, a')$  di elementi di  $A$  con  $a \neq a'$ ;
  - (ii) l'insieme delle coppie  $(a, a')$  di elementi di  $A$  con  $a < a'$ ;
  - (iii) l'insieme delle coppie  $(a, a')$  di elementi di  $A$  con  $a \leq a'$ ;
4. Un comitato formato da 6 persone  $a, b, c, d, e, f$  deve eleggere un presidente, un segretario e un tesoriere, in modo che nessun membro del comitato detenga più di una carica
  - (a) In quante maniere diverse può essere fatta questa scelta?
  - (b) Quante sono le possibili scelte, se  $c$  non deve avere nessuna carica?
  - (c) Quante sono le possibili scelte, se pretendiamo che il presidente sia  $a$  o  $b$ ?
  - (d) Quante sono le possibili scelte, se  $a$  deve avere almeno una carica ?
  - (e) Quante sono le possibili scelte, se  $a$  e  $b$  devono avere almeno una carica?
5. Il sistema di lettura Braille ad uso delle persone prive della vista consiste nel rappresentare ogni singolo carattere tramite un insieme di di punti "sollevati" dal piano del foglio. La posizione dei punti può essere scelta fra due colonne verticali di tre punti ciascuna, in cui almeno un punto è sollevato. Quanti caratteri distinti ha a disposizione l'alfabeto Braille?
6. Quante possibili targhe di macchine possiamo costruire se una targa deve essere composta da tre lettere seguite da due cifre numeriche e sono possibili le ripetizioni? E senza ripetizioni?  
(Nota bene: le lettere dell'alfabeto sono 26).
7. Un mazzo di 52 carte da poker consiste in carte di 4 possibili segni (quadri, cuori,...) e di 13 valori diversi (asso, 2, ..., 10, jack,...).

- (a) In quanti modi posso estrarre una mano di 5 carte?
  - (b) Quante sono le mani che contengono carte tutte dello stesso segno?
  - (c) Quante sono le mani che contengono 3 carte dello stesso valore (ad esempio: 3 assi) e due carte di un altro valore (ad esempio, due jack)?
8. Quante sono le stringhe che contengono 8 bit di cui esattamente 4 sono uguali ad 1?
9. Se abbiamo 5 libri di Informatica, 3 di matematica e 2 di arte, in quante maniere possiamo sistemare questi libri su uno scaffale se vogliamo che tutti i libri della stessa disciplina siano vicini?
10. Quante stringhe di 10 lettere sull'alfabeto  $\{a, b, c\}$  hanno esattamente tre  $a$ ?  
 Ed esattamente tre  $a$  e quattro  $b$ ?  
 Ed esattamente tre  $a$  oppure quattro  $b$ ?
11. Ad una maratona partecipano 8 atleti di tre diverse nazionalità: due sono italiani, tre spagnoli e tre francesi. Supponiamo che tutti arrivino al traguardo, che non ci siano arrivi simultanei e che venga assegnata una medaglia d'oro, una d'argento e una di bronzo.
- (i) Quanti sono i possibili ordini d'arrivo?
  - (ii) Quante le possibili salite sul podio?
  - (iii) Sapendo che solo i primi quattro classificati accedono alla gara successiva, quanti sono i possibili passaggi di turno?
  - (iv) Quanti sono i possibili ordini d'arrivo che vedono un italiano all'ultimo posto?
  - (v) Quanti sono i possibili ordini d'arrivo che vedono ai primi tre posti atleti di nazionalità diversa?
  - (vi) Se i due italiani si chiamano Bianchi e Rossi, quanti sono i possibili ordini in cui Bianchi precede Rossi?