Primi Esercizi sui Numeri Complessi

Nel seguito, $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme dei numeri complessi con le operazioni di somma e prodotto definite da:

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b'), \quad (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

Ad esempio:

$$i^2 = -1, \quad (1 - i\pi) + (-2 + i/3) = -1 + i(-\pi + 1/3)$$
$$(1 - i\pi)(-2 + i/3) = (-2 + \pi/3) + i(1/3 + 2\pi)$$

Se $z = a+ib$, il numero reale a si dice *parte reale* di del numero complesso z, mentre il numero reale b si dice *parte immaginaria* di z.

I numeri reali si identificano con i numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero e la moltiplicazione di un numero complesso $a + ib$ per un numero reale r diventa più semplicemente $r(a + ib) = (a + ib)r = ar + ibr$.

Si ricorda inoltre che *l'opposto* del numero $z = a + ib$ è il numero $-z = -a - ib$.
Il *coniugato* $\overline{z}$ del numero complesso $z = a + ib$ è $\overline{z} = a - ib$. Il prodotto $z\overline{z} = a^2 + b^2$ è un numero reale.

L'opposto moltiplicativo di un numero complesso non nullo $z = a + ib$ è $z^{-1} = \overline{z}(a^2 + b^2)^{-1}$ (ad esempio, se $z = 2 - 3i$ allora $\overline{z} = 2 + 3i$, $2^2 + 3^2 = 13$ e

$$z^{-1} = (2 + 3i)13^{-1} = 2/13 + i3/13.$$

Se z e z' sono complessi e $z \neq 0$, allora z'/z sta per il numero complesso $z'z^{-1}$.

(1) Trovare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$$(1 - 2i)^{-1}, \qquad \frac{1 + 2i}{(1 - 2i)}, \qquad (1 - 2i)^3, \qquad (1 + i)^3$$

(2) Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi e $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $\phi(z) = \overline{z}$. Calcolare la funzione composta $\phi \circ \phi$ e determinare se ϕ è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

(3) Sia $R \subseteq C \times C$ la relazione binaria su $\mathbb{C}$ definita da:

$$z\ Rz' \quad \Leftrightarrow \quad \text{la parte reale di } z \text{ è uguale alla parte reale di } z'.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza.
Determinare le classi d'equivalenza dei numeri:
i;
0;
$-i$;
$(1 + i)$.
Trovare un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di R su $\mathbb{C}$.

(4) Rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente, questa volta rispetto alla relazione binaria

$$z\,Rz' \quad \Leftrightarrow \quad \text{la parte immaginaria di } z \text{ è uguale alla parte immaginaria di } z'.$$

(5) Rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente, questa volta rispetto alla relazione binaria su $\mathbb{C}$ definita da

$$(a+ib)\ R(a'+ib') \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2 = a'^2+b'^2.$$

(6) Se $z = a+ib$, il numero complesso $\overline{z} = a - ib$ si dice il *coniugato* di z. Dati due numeri complessi z, z' dimostrare che $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$, $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$. Quali sono i numeri complessi tali che $z = \overline{z}$?

(7) Considerare l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ con l'usuale operazione di somma

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b'),$$

e con una nuova operazione di prodotto data da

$$(a+ib)\times(a'+ib') = aa' + ibb'$$

(ad esempio si ha: $(1+2i)\times(2+3i) = 2+6i$)

Rispetto a questo nuovo prodotto, calcolare $i^2 = i \times i$.

Verificare che il numero $u = 1+i$ è l'elemento neutro rspetto alla moltiplicazione, cioè, per ogni numero complesso $a+ib$ vale:

$$u \times (a+ib) = (a+ib)\times u = (a+ib).$$

L'equazione $x^2 = -u$ ha soluzioni in questo insieme?