SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI MD09

(1) Siano A l'insieme dei numeri primi, B l'insieme dei numeri pari. Si ha:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $(2,3) \subseteq A \times B$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $(2,3) \in A \times B$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $(2,3) \notin A \times B$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\{3,(3,4)\} \subseteq A \cup (B \times A)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\{(5,2),(3,6)\} \subseteq Pow(A \times B)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\{(5,2),(3,6)\} \subseteq (A \times PowB)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $(7,\{2,4\}) \in (A \times PowB)$.

(2) Dato l'insieme
$$C = \{(0,1),(1,1),(0,2),(1,2),(0,3),(1,3)\},$$
determinare A, B tale che $C = A \times B$.

(3) Dimostrare che l'insieme
$$C = \{(0,1),(1,1),(0,2)\},$$
non è un prodotto cartesiano.

(4) Se $|A| = 4, |B| = 5$, quanti elementi hanno gli insiemi $Pow(A \times B)$, $A \times Pow(B)$?

(5) Sia A un insieme non vuoto, $P(A)$ il suo insieme delle parti. Si consideri la relazione binaria $R \subseteq A \times P(A)$ definita da:
$$R =: \{(a,X) \in A \times P(A) : a \in X\}.$$
La relazione R è una funzione da A a $P(A)$?
Considera poi la relazione
$$S = \{(a,X) \in A \times P(A) : X = \{a\}\}.$$
La relazione S è una funzione da A a $P(A)$?
Se la risposta è affermativa, determina se la funzione è iniettiva o suriettiva per un qualsiasi insieme A.

(6) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Considera le relazioni seguenti:
$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) : a/b \in \mathbb{Z}\},$$
$$S = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) : a/b \in \{1,-1\}\},$$
$$T = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) : a/b^2 \in \{-1\}\},$$
$$U = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : a = -b^2\};$$
$$V = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b^2\};$$

$$W = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) : a^2/b \in \{-1\}\}$$
$$Z = \{(q,(a,b)) \in Q \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) : a/b = q\}.$$

Quali delle relazioni precedenti sono funzioni ?

(7) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e f la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = 2n - 4$. Determinare se f è iniettiva. Qual è l'immagine di f?

(8) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e f la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definita da
$$f(n) = \frac{n}{n+1}.$$
Dimostrare che f è iniettiva.
f è anche suriettiva? Se la risposta è negativa, indica un elemento che non appartiene all'immagine di f.
Se $X = \{0, 1, 2, 3\}$, determina l'insieme $f(X)$.

(9) Considerare la funzione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definita da
$$f(n,m) = (n - m, n + m).$$
Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

(10) Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da
$$f(n,m) = nm.$$
Determinare se la funzione è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

(11) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $Q^{\geq 0}$ quello dei numeri razionali non negativi; sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{\geq 0}$ la funzione definita da
$$f(n,m) = \frac{n}{n+m+1}.$$
Stabilire se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
Se $X = \{(n,m) : n = 0\}$ e $Y = \{(n,m) : m = 0\}$ determina gli insiemi $f(X), f(Y)$.

(12) Sia $\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ definita da
$$f(n) = \frac{n^2+1}{n^2+2}.$$
Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

(13) Sia $f : A \to B$ una funzione. Allora:

$\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ se $C \subseteq A$ si ha: $f(C) = \{b \in B : \{a \in A : f(a) = b\} \subseteq C\}$;

$\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ se $C \subseteq A$ si ha:
$$f(C) = \{b \in B : \{a \in A : f(a) = b\} \cap C = \emptyset\};$$

$\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ se $C \subseteq A$ si ha:
$$f(C) = \{b \in B : \{a \in A : f(a) = b\} \cap C \neq \emptyset\};$$

(14) Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = n^2$, e $A \subseteq \mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri positivi, $B \subseteq \mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri negativi. Si ha:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $1 \in f(A)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $-1 \in f(A)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $1 \in f(B)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $-1 \in f(B)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $1 \in f(A) \cap f(B)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $1 \in f(A \cap B)$.

(15) Sia $f : A \to B$ una funzione, $C \subseteq A, D \subseteq A$ Allora:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $f(C \cup D) \subseteq f(C) \cup f(D)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $f(C) \cup f(D) \subseteq f(C \cup D)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $f(C) \setminus f(D) \subseteq f(C \setminus D)$;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $f(C \setminus D) \subseteq f(C) \setminus f(D)$;

(16) Dare un esempio di una funzione $f : A \to B$ e di un sottoinsieme $C \subseteq A$ tale che
$$f(A \setminus C) \nsubseteq f(A) \setminus f(C).$$

(17) Dimostrare che, se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora per ogni $C \subseteq A$ e $D \subseteq A$ vale:
$$f(C) \cap f(D) \subseteq f(C \cap D) \quad f(C \setminus D) \subseteq f(C) \setminus f(D).$$

(18) Sia $D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ l'insieme dei numeri dispari e $g : \mathbb{N} \to D$ la funzione definita da $g(n) = 2n + 1$. Dimostrare che g è biunivoca.

(19) Sia $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $t(n) = 2^n \cdot m$. Determinare se t è iniettiva o suriettiva.

(20) (*) Sia $D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ l'insieme dei numeri dispari, N^* l'insieme dei naturali non nulli e $f : \mathbb{N} \times D \to \mathbb{N}^*$ la funzione così definita:
$$f(n, m) = 2^n \cdot m.$$
Dimostrare che f è biunivoca.

(21) Siano g, f le funzioni descritte negli esercizi $18, 20$ precedenti ed sia inoltre $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da
$$h(n, m) = f(n, g(m)) - 1.$$
Dimostrare che h è una funzione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.