ESERCIZI SU RELAZIONI D'EQUIVALENZA E LOGICA

NOTA BENE: il simbolo $\wedge$ sta per la congiunzione $''E''$, il simbolo $\vee$ sta per la disgiunzione $''O''$, il simbolo $\neg$ sta per NON.

(1) Dimostrare un'affermazione del tipo $P \to Q$ è equivalente a dimostrare che vale:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $P \wedge Q$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\neg P \to \neg Q$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\neg Q \to \neg P$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\neg P \vee Q$;

(2) Dimostrare che un'affermazione del tipo $P \to Q$ non vale è equivalente a dimostrare che vale:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $P \wedge Q$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\neg P \to \neg Q$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $Q \wedge \neg P$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\neg Q \wedge P$.

(3) La negazione della proprietà di antisimmetria
$\forall a \forall b(aRb \wedge bRa \to a = b)$
è equivalente a:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\exists a \exists b(aRb \wedge \neg(bRa) \wedge a = b)$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\exists a \exists b(aRb \wedge bRa \wedge a = b)$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\exists a \exists b(aRb \wedge \neg(bRa) \wedge a \neq b)$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\exists a \exists b(aRb \wedge bRa \wedge a \neq b)$.

(4) L'iniettività della funzione $f : A \to B$ può essere espressa anche dalla proprietà:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\forall a \in A\ \forall a' \in A(a = a' \to f(a) = f(a'))$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\forall a \in A\ \forall a' \in A (a \neq a' \to f(a) \neq f(a'))$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\forall a \in A \forall a' \in A (f(a) = f(a') \wedge a = a')$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ $\neg \left[\exists b \in B \exists a \in A \exists a' \in A\ (a \in f^{-1}(\{b\} \wedge a' \in f^{-1}(\{b\}))\right]$;

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

$\neg \left[\exists b \in B \exists a \in A \exists a' \in A\ (a \neq a' \wedge a \in f^{-1}(\{b\}) \wedge a' \in f^{-1}(\{b\}))\right]$.

(5) Sia E la relazione su $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ definita da

$$xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$$

Si ha:

$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ E è riflessiva;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ simmetrica;
$\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ transitiva.

(6) Sia $A = \{0, 1, 2\}$. Dare esempi di relazioni binarie su A che siano:
-riflessive e simmetriche ma non transitive;
-transitive e riflessive ma non simmetriche;
-simmetriche e transitive, ma non riflessive.

(7) Sia $A = \mathbb{N}$ e E la relazione binaria su A definita da:

$aEb \Leftrightarrow$ 5 divide sia a che b OPPURE 5 non divide né a né b

Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza e determinare le classi di equivalenza del numero 5, del numero 0 e del numero 1.

Quante sono le classi d'equivalenza di E su A?

(8) Sia E la relazione binaria su $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da:

$$(x, y)\ E\ (x', y') \quad \Leftrightarrow x = x'$$

Dimostare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe di equivalenza $(1, 0)_{|E}$ dell'elemento $(1, 0)$ di A.
Sia $X = \mathbb{R}$. Determinare una funzione $f : A \to X$ tale che

$$xEy \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = f(y).$$

Quante sono le classi d'equivalenza di E su A?

(9) Sia E la relazione binaria su $A = Pow(\mathbb{N})$ definita da:

$X\ E\ Y \quad \Leftrightarrow$ X e Y sono finiti e hanno lo stesso numero di elementi

oppure X, Y sono entrambi infiniti

Dimostare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe di equivalenza $\emptyset_{|E}$ dell'elemento $\emptyset$ di A.
Dato un numero naturale n determinare la classe di equivalenza di $\{n\}$ in A

Determinare la classe di equivalenza dell'insieme dei numeri pari.
Quante sono le classi d'equivalenza di E su A?

(10) m Sia E la relazione su $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ definita da

$$xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

Dimostrare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe d'equivalenza $0_{|E}$ dell'elemento 0 e la classe $1_{|E}$ di 1.

Se $X = \{r \in R^+ : r < 1\}$, determinare una funzione $f : R^+ \to X$ tale che valga

$$aEb \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Determinare la classe $x_{|E}$ di un elemento $x \in \mathbb{R}^+$.

(11) Sia $A = \mathbb{N}$ e E la relazione binaria su A definita da:

$$nEm \Leftrightarrow [\text{ per ogni numero primo } p \text{ si ha: } p|n \Leftrightarrow p|m\ ]$$

Sia Pr l'insieme dei numeri primi e $X = Pow(Pr)$. Trova una funzione $f : A \to X$ tale che valga, per ogni $a, b \in A$,

$$aEb \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Trova le classi d'eqiuvalenza dei numeri $2, 3, 6, 0$.