TERZO FOGLIO DI ESERCIZI MD09

(1) Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(z) = z^2 - z - 2$. Si ha:

V	F	$2 \in f^{-1}(\{0\});$
V	F	$2 = f^{-1}(\{0\});$
V	F	$\{2\} = f^{-1}(\{0\});$
V	F	$\{-1, 2\} = f^{-1}(\{0\});$
V	F	$f^{-1}(\{-3\}) \neq \emptyset.$

(2) Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = n - m$. Si ha:

V	F	$(1, 2) \in f^{-1}(\mathbb{N});$
V	F	$(2, 1) \in f^{-1}(\mathbb{N});$

Determina l'insieme $f^{-1}(\mathbb{N})$.

(3) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e f la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita da

$$f(n) = \frac{n}{n+1}.$$

Determinare gli insiemi:

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(\mathbb{N}), \quad f^{-1}(\{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}).$$

(4) Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione definita da

$$f(n, m) = nm.$$

Determina l'insieme $f^{-1}(\{k\})$ per $k = 0, k = 1, k = 5, k = 6$.

Per quali numeri naturali k la cardinalità dell'insieme $f^{-1}(\{k\})$ è uguale a 1?

Per quali numeri naturali k la cardinalità dell'insieme $f^{-1}(\{k\})$ è uguale a 2?

Per quali numeri naturali k la cardinalità dell'insieme $f^{-1}(\{k\})$ è infinita?

(5) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$ e $f : A \rightarrow B$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

Determinare se f è invertibile e in caso positivo descrivere la funzione inversa.

- (6) Siano $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ le funzioni definite da:

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}, \quad g(x) = \frac{3+2x}{1-x}.$$

Trova le funzioni composte

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ e } f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Dalla risposta alle domande precedenti, possiamo stabilire che f e g sono invertibili e trovare le funzioni inverse senza fare ulteriori calcoli?

- (7) Sia $A = \{0, 1\}$ e $f : P(A) \rightarrow P(A)$ definita da $f(x) = A \setminus x$. Calcola la funzione composta $f \circ f$.

Determina se f è invertibile e in caso affermativo descrivere la funzione inversa. Rispondi alle stesse domande nel caso di un insieme A qualsiasi e $f : P(A) \rightarrow P(A)$ definita da $f(x) = A \setminus x$.

- (8) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1-2x}{2-x}.$$

- (i) Dimostra che l'immagine di f è contenuta in A .
- (ii) Considera ora la funzione f restringendo il codominio all'insieme A (quindi considerando f come una funzione $f : A \rightarrow A$) e calcola la funzione composta $f \circ f : A \rightarrow A$. La funzione f è invertibile? In caso positivo determina la funzione inversa.

- (9) Siano $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ due funzioni. Dimostra le seguenti proprietà:

- (i) se la funzione $g \circ f : A \rightarrow C$ è iniettiva, allora anche f è iniettiva;
- (ii) se la funzione $g \circ f : A \rightarrow C$ è suriettiva, allora anche g è suriettiva;
- (iii) Trova un esempio di funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ tali che $g \circ f$ è iniettiva, ma g non lo è.

- (10) Dimostra che data una funzione $f : A \rightarrow B$ e due sottoinsiemi Y, Z del codominio si ha

$$f^{-1}(Y \setminus Z) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Z).$$