ESERCIZI SU DIVISIBILITA' NEI NATURALI

Nota bene: se a, b sono naturali, $a|b$ sta per a divide b, mentre $a \not| b$ sta per a non divide b.

(1) Considera il numero 23 (scritto in rappresentazione decimale) e trova la sua rappresentazione binaria.
Considera il numero 101010 (scritto in rappresentazione binaria) e trova la sua rappresentazione decimale.

(2) In questo mondo ci sono solo 10 categorie di persone: quelle che capiscono la numerazione in base due, e le altre. È vero?

(3) Siano m, n, a, b numeri naturali maggiori di zero. Si ha:

V	**F**	se $m|a$ e $m \not| b$ allora $m \not| (a+b)$;
V	**F**	se $m|a$ e $a \not| b$ allora $m \not| b$;
V	**F**	se $m|a$ e $n|a$ allora $(m+n)|a$;
V	**F**	se $m|ab$ allora $m|a$ oppure $m|b$;
V	**F**	se $ab|m$ allora $a|m$;

(4) Siano a, b naturali e $b > 0$. Completare:
(a) $b|a \Leftrightarrow$ il resto della divisione di a per b è ...;
(b) se il numero a ha resto r nella divisione per b, e $a+1$ non è divisibile per b, allora il resto della divisione di $a+1$ per b è ...

(5) Siano a, b numeri naturali con $b > 0$ e sia r il resto della divisione di a per b. Dimostrare che un qualsiasi numero che divida sia a che b deve dividere anche r.

(6) Siano a, b, c numeri naturali con $c > 0$ e $c|b$. Dimostrare che il resto della divisione di $a+b$ per c è uguale al resto della divisione di a per c.

(7) Siano a, b, c numeri naturali con $c > 0$ e sia r il resto della divisione di a per c, e s il resto della divisione di b per c. Qual è il resto della divisione di $a+b$ per c? E il resto della divisione di ab per c?

(8) Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $5^n - 1$ è divisibile per 4.

(9) Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $2^{2n} - 1$ è divisibile per 3.

(10) Dimostrare che, per ogni k, fra k numeri consecutivi ne esiste sempre uno divisibile per k. (suggerimento: considerare i possibili resti nella divisione per k).

(11) Considerare la proprietà: per ogni $n \geq 0$ il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6 e darne due dimostrazioni, una per induzione e l'altra basata sull'esercizio precedente.

(12) Siano a, b, c numeri naturali maggiori di zero, sia r il resto della divisione di c per a, s il resto della divisione di c per b. Se $a|b$, qual è il resto della divisione di s per a?

(13) Dato un numero n, dimostrare che la sua fattorizzazione in numeri primi contiene al massimo $log_2(n)$ fattori.

(14) Dimostrare che, per ogni k, esistono k numeri consecutivi di cui nessuno è primo.
(suggerimento: considerare i numeri
$(k+1)! + 2 \quad (k+1)! + 3 \quad \dots \quad (k+1)! + (k+1)$).