

**Scritto di Logica Matematica,
12 aprile 2007**

1. Considerare il linguaggio $L = \{f, a, p\}$ e la formula

$$F = \forall x[(p(x) \rightarrow p(a) \vee \neg p(fa)) \wedge (\neg p(fx) \rightarrow p(x))].$$

- (i) L'insieme vuoto è modello di F ?
 - (ii) Dimostrare che F non ha modelli di Herbrand finiti.
 - (iii) Trovare un modello di Herbrand di F diverso dalla base di Herbrand.
2. Dare la definizione di unificatore di massima generalità di un sistema di Herbrand. Determinare se il seguente sistema di Herbrand è unificabile. In caso positivo trovare un unificatore di massima generalità del sistema.

$$\begin{cases} g(x, g(z, t)) = g(fy, g(h(t, u), y)) \\ h(g(fu, w), z) = h(g(w, fu), h(t, a)) \end{cases}$$

3. Usando risoluzione, determinare se

$$\forall x \exists u \forall y \exists v (r(fx) \rightarrow p(u, y) \vee p(y, v)) \models \exists z (r(z) \rightarrow \exists v p(z, v)).$$

Se la risposta è positiva, qual è il numero minimo di passi di risoluzione necessario per accertarlo?

4. Dato l'usuale linguaggio per le liste $\mathcal{L} = \{\epsilon, [\]\}$, utilizzare un nuovo predicato ternario *MERGE* e scrivere un programma prolog che date due liste L_1, L_2 costruisce la lista costituita dal primo elemento della lista L_1 , seguito dal primo elemento della lista L_2 , seguito dal secondo elemento della lista L_1 etc. (ad esempio, vogliamo che i goals : $-MERGE([a, b], [c], [a, c, b])$, : $-MERGE([a], [b.c], [a, b, c])$ e : $-MERGE(\epsilon, [a], [a])$ abbiano una sld refutazione).
5. Sia P un programma Prolog su linguaggio L e F, G formule atomiche chiuse di L , Dimostrare che

$$P \models F \vee G \Leftrightarrow P \models F \text{ oppure } P \models G.$$

La stessa proprietà vale se sostituiamo a P un insieme di enunciati universali?