

**Scritto di Logica Matematica,  
7 dicembre 2006**

1. Dimostrare utilizzando il metodo di risoluzione che

$$\forall x \forall y (r(x, y) \vee r(fy, x)) \wedge (\forall x \exists y r(y, x) \rightarrow \exists y \forall x r(y, x)) \models \exists x r(x, x).$$

2. Dato un linguaggio  $L$  e un'interpretazione  $I$  di  $L$  sia  $H$  l'interpretazione di Herbrand definita, come sottoinsieme della base di Herbrand  $B_L$ , nel modo seguente:

$$H = \{A \in B_L : I \models A\}.$$

Determinare quali delle seguenti proprietà sono valide, giustificando adeguatamente le risposte:

- (i) tutti gli enunciati veri in  $I$  sono veri in  $H$  e viceversa (cioè:  $I$  ed  $H$  sono elementarmente equivalenti);
  - (ii) tutti gli enunciati privi di quantificatori veri in  $I$  sono veri in  $H$  e viceversa;
  - (iii) tutti gli enunciati universali veri in  $I$  sono veri in  $H$ ;
  - (iv) tutti gli enunciati esistenziali veri in  $I$  sono veri in  $H$ ;
3. Determinare se il seguente sistema di Herbrand è unificabile.

$$\begin{cases} h(x, h(x, a)) = h(fz, u) \\ f(w) = f(f(h(a, z))) \\ h(fy, w) = h(f(h(x, a)), fy) \end{cases}$$

4. Dato l'usuale linguaggio per le liste  $\mathcal{L} = \{\epsilon, [ \mid ]\}$ , utilizzare un nuovo predicato binario *ERASE* e scrivere un programma prolog per cancellare gli ultimi due elementi di una lista: (ad esempio. vogliamo che :  $\neg \text{ERASE}([a], \epsilon)$  ed :  $\neg \text{ERASE}([a, b, c], [a])$ . abbiano una SLD refutazione). Nota: non sono necessari predicati aggiuntivi.
5. Siano  $P, P'$  un programmi Prolog su uno stesso linguaggio  $L$ ,  $M_P, M_{P'}$  i loro modelli minimi. Supponendo che valga  $M_P \subseteq M_{P'}$  (visti come sottoinsieme della base di Herbrand), determinare quali delle seguenti proprietà sono valide, giustificando adeguatamente le risposte:
- (i)  $P \subseteq P'$ ;
  - (ii)  $P' \models C$ , per ogni clausola  $C \in P$ ;
  - (iii) se  $G$  è un goal e  $P \cup \{G\}$  ha una SLD-refutazione, allora  $P' \cup \{G\}$  ha una SLD-refutazione.