0.1. **Skolemizzazione.** Ogni enunciato F (o insieme di enunciati Γ) è equisoddisfacibile ad un enunciato universale (o insieme di enunciati universali) in un linguaggio estensione del linguaggio di F (di Γ) tramite nuove costanti e nuovi simboli funzionali: possiamo prima trasformare F in una formula equivalente in forma prenessa (in un insieme di formule equivalenti in forma prenessa) e poi, per eliminare gli eventuali quantificatori esistenziali, sfruttare il fatto che la formula $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G$ è equisoddisfacibile alla formula $\forall x_1 \dots \forall x_n G\{y|f(x_1, \dots, x_n)\}$, dove il simbolo funzionale f non compare in G (in Γ).

Infatti si ha:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n G\{y|f(x_1, \dots, x_n)\} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G,$$

mentre ogni modello I, σ di $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G$ può essere esteso ad un modello I', σ per la formula $\forall x_1 \dots \forall x_n G\{y|f(x_1, \dots, x_n)\}$ interpretando opportunamente la nuova funzione f.

Se il quantificatore esistenziale non è preceduto da alcun simbolo universale, la variabile y può essere sostituita da una nuova costante: ad esempio, la formula $\exists x(p(x) \wedge q(f(x), a))$ è equisoddisfacibile a $p(c) \wedge q(f(c), a)$.

Esempio 0.1. *Per trasformare la formula*

$$F = \forall x \exists y p(x, y) \wedge \forall u \exists v q(u, v).$$

in forma normale universale, procediamo come segue. Mettendo la formula in forma prenessa otteniamo:

$$\forall x \exists y \forall u \exists v(p(x, y) \wedge q(u, v)),$$

da cui, per skolemizzazione, otteniamo prima

$$\forall x \forall u \exists v(p(x, fx) \wedge q(u, v)),$$

e poi

$$\forall x \forall u(p(x, fx) \wedge q(u, h(x, u))),$$

Nell'esempio precedente notiamo che, s si mette la formula in forma prenessa e si skolemizza, in qualsiasi ordine si proceda si deve introdurre almeno un simbolo di funzione binario, mentre la formula è equisoddisfacibile a

$$\forall x \forall u(p(x, fx) \wedge q(u, hu),$$

che si ottiene skolemizzando localmente di due congiunti $\forall x \exists y p(x, y)$, $\forall u \exists v q(u, v)$.

1. Teorema di Compattezza per la Logica Predicativa

1.1. **Formule universali.** Se Γ è un insieme di enunciati universali, sia Γ^c l'insieme delle formule chiuse prive di quantificatori definito come segue:

$$\Gamma^c = \{G(t_1, \dots, t_n) : t_1, \dots, t_n \in T_c, \forall x_1 \dots \forall x_n G \in \Gamma\}.$$

Abbiamo:

Lemma 1.1. Γ *è soddisfacibile se e solo se* Γ^c *è soddisfacibile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se $I \models \Gamma$ allora $I \models \Gamma_c$.
($\Leftarrow$) Supponiamo $I \models \Gamma_c$. Sia J la sottointerpretazione di I così definita:

$$D^J = \{d \in D^I : \exists t \in T_c,\ t^I = d\}, \quad a^J := a^I, \quad f^J(d_1, \dots, d_n) := f^I(d_1, \dots, d_n)$$

$$r^J(d_1, \dots, d_n) \Leftrightarrow r^I(d_1, \dots, d_n).$$

Notiamo che l'interpretazione dei simboli funzionali è ben definita perché se $d_1, \ldots, d_n \in D^J$ allora $f^I(d_1, \ldots, d_n) \in D^J$.

Vogliamo ora dimostrare che $J \models \Gamma$, sapendo che, per ipotesi, vale $I \models \Gamma_c$.

Per ogni termine chiuso $t \in T_c$ si ha $t^I = t^J$ (dimostrarlo per esercizio). Ne segue che per ogni formula atomica chiusa $F = r(t_1, \ldots_n)$ si ha $I \models F \Leftrightarrow J \models F$.

Sia $\forall \overline{x} G$ una formula di Γ. Allora $I \models G(\overline{t})$ per ogni ennupla di termini chiusi $\overline{t}$, quindi $J \models G(\overline{t})$ in quanto $G(\overline{t})$ è una formula priva di quantificatori. Siccome questo vale per ogni $\overline{t}$, si ha $J \models \forall \overline{x} G$, visto che ogni elemento del dominio di J è denotato da un termine chiuso. Abbiamo quindi $J \models \forall \overline{x} G$ per ogni $\forall \overline{x} G$ in Γ e quindi $J \models \Gamma$. $\square$

Il Lemma seguente vale solo senza uguaglianza. Esempio $a = b \wedge p(a) \wedge \neg p(a)$ è proposizionalmente soddisfacibile ma non è soddisfacibile (torneremo sul problema dell' uguaglianza più avanti).

Dimostriamo ora come la soddisfacibilità di un insieme Δ di enunciati privi di quantificatori sia equivalente alla soddisfacibilità proposizionale di Δ, quando si identifica ogni formula atomica chiusa di *Delta* con una lettera proposizionale.

Ad esempio, la formula

$$F := \neg(r(g(a, fa), a) \rightarrow p(a)) \vee (r(a, a) \rightarrow \neg p(a))$$

viene vista come formula proposizionale nel linguaggio che ha come variabili proposizionali

$$r(g(a, fa), a), \; p(a), \; r(a, a).$$

Lemma 1.2. *Se Δ è un insieme di enunciati privi di quantificatori le proprietà seguenti sono equivalenti:*

(1) Δ è soddisfacibile;
(2) Δ è proposizionalmente soddisfacibile

Dimostrazione. ((1) $\Rightarrow$ (2)) se I è un modello di Δ, definiamo la valutazione proposizionale v sull'insieme di variabili proposizionali $\{A : A \text{ è una formula atomica chiusa di } \Delta\}$ nel modo seguente:

$$v(A) = V \Leftrightarrow I \models A.$$

Si verifica allora che, per ogni enunciato F privo di quantificatori vale:

$$v(F) = V \Leftrightarrow I \models F.$$

La dimostrazione è per induzione sul numero di connettivi proposizionali che appaiono in F. Il caso base è quello in cui F è atomica chiusa, e segue direttamente dalla definizione di v. Il passo induttivo viene lasciato per esercizio. Poiché $I \models \Delta$ otteniamo $v(\Delta) = V$.

((2) $\Rightarrow$ (1)) Data una valutazione v tale che $v(\Delta) = V$, definiamo un'interpretazione I nel modo seguente: il dominio di I è l'insieme dei termini chiusi T_c del linguaggio predicativo. Se c è un simbolo di costante, allora $c^I := c$, mentre se f è un simbolo funzionale n-ario e $t_1, \ldots t_n$ sono in $D^I = T_c$ definiamo

$$f^I(t_1, \ldots, t_n) := f(t_1, \ldots, t_n)$$

(notiamo che la definizione fino a questo punto dipende solo dal linguaggio). A questo punto della definizione dell'interpretazione I, possiamo già interpretare i termini chiusi, e verificare per induzione che, per ogni $t \in T_c$ vale $t^I = t$. Se r è un simbolo predicativo n-ario del linguaggio, la definizione di r^I viene data ponendo

$$(t_1, \ldots, t_n) \in r^I \quad \Leftrightarrow \quad v(r(t_1, \ldots, t_n)) = V$$

Si verifica, ancora per induzione sul numero di connettivi proposizionali presenti in un enunciato privo di quantificatori F, che vale:

$$v(F) = V \Leftrightarrow I \models F.$$

Il caso base è quello in cui F è atomica chiusa, e segue direttamente dalla definizione di I. Il passo induttivo viene lasciato per esercizio. Poiché $V(\Delta) = V$, otteniamo $I \models \Delta$. $\square$

Teorema 1.3. *Sia Γ un insieme di enunciati universali insoddisfacibile. Allora esiste esiste un sottoinsieme finito Γ' di Γ che è insoddisfacibile.*

Dimostrazione. Se Γ è insoddisfacibile, per il Lemma precedente lo sarà anche l'insieme delle istanze chiuse Γ^c delle matrici di formule in Γ. Ma Γ^c è un insieme di enunciati privo di quantificatori, quindi il Teorema di compattezza proposizionale ci garantisce l'esistenza di un sottoinsieme finito Σ di Γ^c che è insoddisfacibile.

Sia ora

$$\Gamma' = \{\forall \vec{x} F \in \Gamma : \exists \vec{t} \in T_c \text{ tale che } \quad F\{\vec{x}|\vec{t}\} \in \Delta\};$$

poiché Σ è finito, anche Γ' lo è; inoltre, l'insieme delle istanza chiuse di Γ' contiene Σ, e poiché Σ è insoddisfacibile, lo è anche Γ'. $\square$

Teorema 1.4. *(Teorema di Compattezza) Sia Γ un insieme di enunciati di un linguaggio al prim'ordine. Si ha:*

$$\Gamma \text{ è insoddisfacibile} \Leftrightarrow \text{ esiste un sottoinsieme finito } \Gamma' \text{ di } \Gamma \text{ che è insoddisfacibile.}$$

Dimostrazione. Dato Γ consideriamo l'insieme Γ^{Sk} ottenuto skolemizzando tutte le forme normali prenesse di formule in Γ, con l'accortezza di aggiungere solo simboli funzionali o costanti che siano nuovi non solo per la formula che si sta skolemizzando , ma per tutto l'insieme di formule Γ: in questo modo otteniamo un insieme Γ^{Sk} di formule universali equisoddisfacibile a Γ. Se Γ è insoddisfacibile, otteniamo un insieme Γ^{Sk} di formule universali insoddisfacibile, e per il Teorema precedente, Γ^{Sk} contiene un insieme Σ finito e insoddisfacibile. Basta allora considerare l'insieme

$$\Gamma' = \{\forall \overline{x} F : \exists \overline{t} \in T^c F\{\overline{x}/\overline{t}\} \in \Gamma^{Sk}\}$$

per ottenere un sottoinsieme insoddisfacibile e finito di Γ.

$\square$

Il Teorema di compattezza viene usato, fra l'altro, per dimostrare risultati *limitativi* sulla espressività del linguaggio al prim'ordine. Vediamo un esempio di questo tipo di applicazione. Sia L un linguaggio al prim'ordine, contenente un simbolo predicativo binario r. Una struttura I di L si dice *fondata* se r^I non ha catene infinite, cioè se non esiste alcuna successione $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi del dominio tale che per ogni i valga $(d_i, d_{i+1}) \in r^I$.

Proposizione 1.5. *Sia L un linguaggio al prim'ordine, contenente un simbolo predicativo binario r. La proprietà di "fondatezza" non è esprimibile al prim'ordine, cioè, non esiste alcun insieme di enunciati Γ tale che, per ogni struttura I di L valga:*

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow I \text{ è fondata.}$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un tale insieme Γ esista. Consideriamo un insieme numerabile $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ di nuove costanti (nel senso che non appaiono già come costanti di L), ed il linguaggio $L' = L \cup C$. Sia Γ' l'insieme degli enunciati di L' definito da:

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{r(c_i, c_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}.$$

È facile verificare che Γ' è un insieme insoddisfacibile. Infatti, se per assurdo J fosse un modello di Γ', consideriamo il modello I di L ottenuto *dimenticando* l'interpretazione dei simboli non in L (come sopra) otteniamo una contraddizione: da una parte $I \models \Gamma$ (perché $J \models \Gamma$!), quindi r^I è fondata, dall'altra gli elementi $d_0 = c_0^J, \ldots, d_n = c_n^J, \ldots$ sono anche elementi del dominio di I e formano una catena infinita in J, quindi anche in I (perché $r^I = r^J$). Questo è un assurdo, quindi ne segue che Γ' è insoddisfacibile.

Mostriamo che Γ' è soddisfacibile: essendo questo palesemente in contraddizione con quanto appena dimostrato, dovremo concludere che l'insieme Γ non esiste.

Per il Teorema di compattezza, è sufficiente dimostrare che ogni sottoinsieme finito Δ di Γ' è soddisfacibile. Se Δ è finito, esisterà un numero $n \in N$ tale che

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{r(c_0, c_1), r(c_1, c_2), \ldots, r(c_{n-1}, c_n)\}.$$

Sia J la struttura per L' tale che $D^J = \{0, 1, \ldots, n+1\}$, $c_i^J = i$ per $0 \leq i \leq n+1$, $r^J = \{(0,1), (1,2), \ldots, (n, n+1)\}$, e che interpreta gli altri simboli di L in maniera arbitraria (ad esempio: $c_k = 0$ per $k > n+1$, e se L contiene un simbolo funzionale unario f, $f^J(d) = 0$ per ogni $d \in D^J$).

Dimostriamo che

$$J \models \Gamma \cup \{r(c_{n+1}, c_n), r(c_n, c_{n-1}), \ldots, r(c_1, c_0)\}.$$

Dalla definizione, $J \models \{r(c_0, c_1), r(c_1, c_2), \ldots, r(c_{n-1}, c_n)\}$. Per dimostrare che $J \models \Gamma$, sia I la struttura di L che si ottiene da J *dimenticando* l'interpretazione dei simboli non in L, cioè: $D^I = \{0, 1, \ldots, n+1\}$ e I e J coincidono sull'interpretazione dei simboli di L. Si ha $I \models \Gamma$ perché r^I è fondata, quindi $J \models \Gamma$.

Poiché $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{r(c_0, c_1), r(c_1, c_2), \ldots, r(c_{n-1}, c_n)\}$, ne segue che Δ è soddisfacibile.

Avendo dimostrato che ogni sottoinsieme finito di Γ' è soddisfacibile, abbiamo che lo stesso Γ' è soddisfacibile per compattezza.

Ricapitolando: avendo dimostrato che Γ' è sia soddisfacibile che insoddisfacibile, siamo giunti ad una contraddizione. La contraddizione deriva dall'aver supposto l'esistenza di un insieme Γ di enunciati al prim'ordine con la proprietà:

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow I \text{ è fondata;}$$

ne segue che un tale insieme non può esistere. □

2. Esercizi

(1) Dare un esempio di una formula di tipo $\exists x F$, soddisfacibile, per cui l'insieme

$$\{F\{x|t\} : t \in T^c\}$$

è insoddisfacibile.

(2) Una relazione binaria $\rho \subseteq A \times A$ si dice *ciclica* se esistono n elementi del dominio $a_1, \ldots, a_n$ tali che

$$(a_1, a_2) \in \rho,\ (a_2, a_3) \in \rho, \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in \rho, (a_n, a_1) \in \rho$$

(in questo caso, la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ si dice un *ciclo* della relazione ρ).

Sia L un linguaggio predicativo contenente un simbolo predicativo binario r .

i) Per ogni $n \geq 1$, scrivere una formula predicativa F_n tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models F_n \Leftrightarrow\ r^I \text{ ha un ciclo di lunghezza } n$$

ii) Dimostrare che non esiste alcuna insieme di enunciati Γ di L tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow \; r^I \text{ è ciclica.}$$

(3) Si ricorda che la chiusura transitiva ρ^* di una relazione binaria ρ su un insieme A è definita da

$$\rho^* = \bigcup_{n\geq 1} \rho^n,$$

dove

$$\rho^1 = \rho, \quad \rho^{n+1} = \rho^n \cup \{(d,d') \in A \times A : \exists d''(d,d'') \in \rho^n, (d'',d') \in \rho\}.$$

Sia L un linguaggio predicativo contenente un simbolo predicativo binario r e due costanti a, b.

i) Per ogni $n \geq 1$, scrivere una formula predicativa F_n tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models F_n \Leftrightarrow (a^I, b^I) \in (r^I)^n.$$

ii) Dimostrare che non esiste alcuna insieme di enunciati Γ di L tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow \; (a^I, b^I) \text{ è nella chiusura transitiva } (r^I)^* \text{ di } r^I.$$

Suggerimento: procedere per assurdo e considerare l'insieme $\Gamma \cup \{\neg F_n : n \geq 1\}$.

(4) Sia L un linguaggio contenente un simbolo predicativo binario r e infinite costanti $c_1, c_2, \ldots$.

Dimostra che non esiste alcun enunciato F tale che, per ogni interpretazione I di L valga:

$$I \models F \Leftrightarrow (c_1^I, c_2^I) \in r^I \wedge (c_2^I, c_3^I) \in r^I \wedge \ldots$$

(suggerimento: considerare la formula $\neg F$ e usare il Teorema di compattezza).

È possibile trovare un insieme di enunciati Γ di L tale che

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow r(c_1, c_2) \wedge r(c_2, c_3) \wedge \ldots ?$$

(5) Sia L un linguaggio al prim'ordine, $\mathcal{K}$ una classe di interpretazioni per L e

$$\overline{\mathcal{K}} = \{I : \; I \text{ struttura di } L \text{ e } I \notin \mathcal{K}\}$$

la classe complementare. La classe $\mathcal{K}$ si dice *esprimibile* al prim'ordine se esiste un insieme di enunciati Γ di L tale che, per ogni interpretazione I di L valga:

$$I \in \mathcal{K} \Leftrightarrow I \models \Gamma.$$

Dimostrare che vale il seguente risultato:

$$\mathcal{K} \text{ e } \overline{\mathcal{K}} \text{ sono esprimibili al prim'ordine}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{esiste } F \text{ in } L \text{ con} \quad \mathcal{K} = \{I : I \models F\}, \qquad \overline{\mathcal{K}} = \{I : I \models \neg F\}.$$

(suggerimento per la freccia non banale: considerare l'insieme $\Gamma \cup \Gamma'$ dove Γ descrive $\mathcal{K}$ e Γ' descrive $\overline{\mathcal{K}}$, e utilizzare il teorema di compattezza sull'insieme $\Gamma \cup \Gamma'$).

(6) Sia Γ un insieme di enunciati universali e $A(x)$ una formula priva di quantificatori con la sola variabile libera x.

i) Dimostra che

$$\Gamma \models \exists x A(x) \Leftrightarrow \text{ esistono } n \text{ termini chiusi } t_1, \ldots, t_n \text{ tali che } \Gamma \models A\{x/t_1\} \vee \ldots \vee A\{x/t_n\}.$$

Trovare un controesempio nel caso Γ non sia universale.
Suggerimento: considerare l'insieme $\Gamma \cup \{\forall x \neg A(x)\}$ e l'insieme delle sue istanze chiuse. Usare il Teorema di Compattezza.

ii) Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente proprietà: dato un insieme di enunciati universali Γ e una formula $A(x)$ priva di quantificatori con la sola variabile libera x, se $\Gamma \models \exists x A(x)$ allora esiste un termine chiuso t tale che $\Gamma \models A\{x/t\}$.

(7) Sia L un linguaggio *privo di simboli funzionali.* Sia $\exists^*\forall^*$ l'insieme degli enunciati in forma prenessa in cui la stringa di quantificatori è data da quantificatori esistenziali seguiti da quantificatori universali. Dimostra che l'insieme

$$\{\theta \in \exists^*\forall^* : \theta \text{ è soddisfacibile }\}$$

è un insieme decidibile.
Suggerimento: skolemizzando le formule ci si riduce al caso di formule universali e da qui ad insieme di formule proposizionali *finito* usando le istanze chiuse della formula.