

**Scritto di Logica Matematica,
24 febbraio 2009**

1. Sia S l'insieme di enunciati:

$$S = \{\forall x \forall y [\exists z (r(x, z) \wedge r(z, y)) \rightarrow r(y, x)], \forall x (r(x, fx) \wedge r(fx, x)), \exists z \neg r(z, z)\}.$$

Dimostrare che l'insieme S è insoddisfacibile utilizzando il metodo di risoluzione. Nelle risoluzioni, utilizzare quando possibile la fattorizzazione o spiegare perché non sia possibile utilizzarla.

2. Sia $\mathcal{L} = \{r, p, =\}$, dove r è un simbolo di relazione binario e p un simbolo di relazione unario.
- (a) Date due strutture I, J per \mathcal{L} , determinare delle condizioni necessarie e sufficienti affinché Duplicator abbia una strategia vincente nel gioco di un passo fra I e J .
- (b) Considera il seguente enunciato

$$F = \exists x \exists y (r(x, y) \wedge \forall z (p(z) \rightarrow \neg (r(x, z) \wedge r(z, y)))).$$

Date due interpretazioni I, J di \mathcal{L} tali che $I \models F$, $J \models \neg F$, per quali numeri naturali n siamo certi che Spoiler abbia una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht di n passi fra I, J ? Descrivi nei dettagli la strategia di Spoiler.

3. a) Sia $\mathcal{L} = \{\epsilon, [\mid], 0, S\}$ l'usuale linguaggio delle liste e dei numeri naturali. Scrivere un programma Prolog P per descrivere il predicato:
 $ERASE(L, n, L') \Leftrightarrow L'$ è ottenuta da L cancellando l' n -esimo elemento di L ; (ad esempio, vogliamo che il goal : $\neg ERASE([x, y, z, w], SS0, [x, z, w]), ERASE([x, y], SSS0, [x, y])$ sia refutabile).
- b) Se P è un programma Prolog e M_P il suo modello minimo, è vero che se $M_P \models \exists \bar{x} A$, con A atomica, allora $P \models \exists \bar{x} A$?
Ed è vero che se $M_P \models \forall \bar{x} A$, con A atomica, allora $P \models \forall \bar{x} A$?