Scritto di Logica Matematica,
23 settembre 2009

1. Dimostrare che

$$\forall x \forall y \exists z (s(x,y) \to p(fz)) \wedge \forall y (p(y) \vee \exists x s(x,y)) \models \exists y p(y)$$

utilizzando il metodo di risoluzione.

2. Sia $\mathcal{L} = \{E, =\}$, un linguaggio al prim'ordine, dove E è un simbolo di relazione binario.

Siano $\mathcal{A} = (A, E^A)$, $\mathcal{B} = (B, E^B)$ due interpretazioni di $\mathcal{L}$ tali che E^A, E^B siano relazioni *d'equivalenza* su A, B, rispettivamente.

Indichiamo con q_A il numero delle classi di E^A su A, con q_B il numero delle classi di E^B su B. Dimostrare o confutare le affermazioni seguenti:

a) Se $q_A = 3, q_B = 4$ allora Spoiler vince il gioco di 4 passi $G_4(\mathcal{A}, \mathcal{B})$;
b) Se $q_A \neq q_B$ allora Spoler vince il gioco di n passi $G_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$;
c) Se $q_A < n$ e $q_B \geq n$ allora Spoier vince il gioco di n passi $G_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$;
d) Se E^A ha due classi di cardinalità due, mentre E^B ha un'unica classe di cardinalità due, Spoiler vince il gioco di 4 passi $G_4(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

($*$) Sia $t < n$ e siano h, k il numero delle classi di cardinalità t di $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, rispettivamente. Supponendo che $h > k$, $n > t + k$, dimostra che Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

3. Sia $\mathcal{L} = \{\epsilon, [-|-], O, S\}$ l'ususale linguaggio per liste di numeri naturali.

a) Scrivere un programma Prolog che, data una lista L di numeri naturali, calcoli la lista L' ottenuta da L sottraendo 1 a tutte le cifre differenti da zero. Utilizzare il predicato $MENO1(L, L')$: ad esempio, vogliamo che il goal $: -MENO1([1,0,2,5],[0,0,1,4])$ sia refutabile.
b) Scrivere un programma Prolog che, data una lista L di numeri naturali, calcoli la lista L' ottenuta da L sottraendo 1 alla prima cifra, due alla seconda cifra e così via e troncando a zero la sottrazione nel caso si ottenga un numero negativo. Utilizzare il predicato $meno(L, L')$: ad esempio, vogliamo che il goal $: -meno([1,3,2,5,7],[0,1,0,1,2])$ sia refutabile.