

**Scritto di Logica Matematica,  
11 febbraio 2009**

1. Siano  $C_1, C_2$  le seguenti clausole:

$$C_1 = \{r(gx, y)\}, \quad C_2 = \{\neg r(z, z), \neg r(z, fu)\}.$$

- i) È possibile ottenere la clausola vuota con un singolo passo di risoluzione? E con due?
- ii) È vero che  $\forall x \forall y r(gx, y)$  ha come conseguenza logica  $\exists z \exists u (r(z, z) \wedge r(z, fu))$ ?

2. Sia  $\mathcal{L} = \{p, q, r, =\}$ , dove  $p, q$  sono simboli di relazione unari e  $r$  è un simbolo di relazione binario.

a) Siano  $I, J$  le seguenti interpretazioni di  $L$ :

$$D^I = \{0, 1\}, \quad p^I = \{0\}, \quad q^I = \{1\}, \quad r^I = \{(0, 1)\}$$

$$D^J = \{0, 1\}, \quad p^J = \{0\}, \quad q^J = \{1\}, \quad r^J = \{(1, 0)\}.$$

Per quali  $n \in \mathbb{N}$  Duplicator ha una strategia vincente nel gioco di  $n$  passi fra  $I$  e  $J$ ?

Per quali  $n \in \mathbb{N}$  Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di  $n$  passi fra  $I$  e  $J$ ?

b) Sia  $F$  il seguente enunciato:

$$F = \forall x (p(x) \rightarrow \exists y (q(y) \wedge r(x, y))).$$

Siano  $I, J$  interpretazioni di  $L$  tali che  $I \models F, J \models \neg F$ . Per quali  $n$  Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di  $n$  passi fra  $I$  e  $J$ ? Descrivi nei dettagli questa strategia.

3. a) Sia

$$P = \begin{cases} 0 < Sz : - \\ x < y : -Sx < Sy \end{cases}$$

Qual è il modello minimo di  $P$ ?

Quali formule atomiche chiuse vengono refutate dal programma?

Descrivi un modello di Herbrand del programma diverso dal modello minimo, ed un modello del programma che non sia isomorfo ad alcuna interpretazione di Herbrand.

b) Scrivere un programma Prolog che, data una lista  $L$  di numeri naturali, calcoli la lista  $L'$  ottenuta da  $L$  cancellando tutte le ripetizioni. Ad esempio, data la lista  $L = [3, 4, 3, 5, 4, 4]$  il programma deve calcolare la lista  $L' = [3, 4, 5]$ .