

**Scritto di Logica Matematica,
11 febbraio 2009**

1. Siano F, G le due formule seguenti:

$$F = \forall x(\exists y \neg r(x, gy) \rightarrow \exists zr(z, x)), \quad G = \forall x(\forall yr(x, gy) \vee \exists yr(y, x))$$

Dimostrare che $F \models G$ utilizzando il metodo di risoluzione. Nelle risoluzioni, utilizzare la fattorizzazione o spiegare perché non sia possibile utilizzarla.

2. Sia $\mathcal{L} = \{p, q, r, =\}$, dove p, q sono simboli di relazione unari e r è un simbolo di relazione binario.
a) Siano I, J le seguenti interpretazioni di L :

$$D^I = \{0, 1\}, \quad p^I = \{0\}, \quad q^I = \{1\}, \quad r^I = \{(0, 1)\}$$

$$D^J = \{0, 1\}, \quad p^J = \{0\}, \quad q^J = \{1\}, \quad r^J = \{(1, 0)\}.$$

Per quali $n \in \mathbb{N}$ Duplicator ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J ? Per quali $n \in \mathbb{N}$ Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J ?

- b) Sia F il seguente enunciato:

$$F = \forall x(p(x) \rightarrow \exists y(q(y) \wedge r(x, y))).$$

Siano I, J interpretazioni di L tali che $I \models F, J \models \neg F$. Per quali n Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J ? Descrivi nei dettagli questa strategia.

Sia F la seguente formula di \mathcal{L}

$$F = \forall x(\exists yr(x, y) \rightarrow r(x, x)).$$

- a) Date due interpretazioni I, J di L tali che $I \models F, J \models \neg F$, per quali numeri naturali n siamo certi che Spoiler abbia una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht di n passi fra I, J ? Descrivi nei dettagli la strategia di Spoiler.
- b) Determina un numero $n > 0$ e due interpretazioni I, J di L tali che $I \models F, J \models \neg F$ e Duplicator ha una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht di n passi fra I, J .
3. a) Sia $\mathcal{L} = \{\epsilon, [|]\}$ l'usuale linguaggio delle liste. Scrivere un programma Prolog P per descrivere il predicato binario:
 $EVENSX(L, L') \Leftrightarrow L'$ è ottenuta da L cancellando tutti gli elementi in posizione dispari, partendo da sinistra; (ad esempio, vogliamo che il goal : $\neg EVENSX([x, y, z, w], [y, w])$ sia refutabile).
- b) Scrivere un altro programma P' per descrivere il predicato binario:
 $EVENDX(L, L') \Leftrightarrow L'$ è ottenuta da L cancellando tutti gli elementi in posizione dispari, partendo da destra; (ad esempio, vogliamo che il goal : $\neg EVENDX([x, y, z, w], [x, z])$ sia refutabile).
- c) Sia L un linguaggio, P un programma Prolog e H un'interpretazione di Herbrand di L (vista come sottoinsieme della base di Herbrand). È vero che, se H rende vero P e $A \in H$ (A formula atomica chiusa), allora $P \models A$?