II FOGLIO MFI/Logica per le Applicazioni: ESERCIZI PREPARAZIONE SCRITTO

30 novembre 2012

1. Sia F la formula
$$F := \forall x \forall y[p(x) \wedge \neg p(y) \to \exists z(r(x,z) \wedge r(z,y) \wedge \neg p(z))].$$
Quale giocatore ha una strategia vincente nel gioco di Eherenfeucht di 3 passi fra I e J, dove I, J sono strutture tali che $I \models F$ e $J \models \neg F$? Descrivi esplicitamente tale strategia.

2. Considera il linguaggio $L = \{m, s, =\}$ dove m ed s sono simboli relazionali ternari e le due interpretazioni I, J di L tali che:
$$D^I = \mathbb{R}, \quad m^I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = z\}, \quad s^I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$$
$$D^J = \mathbb{Q}, \quad m^J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = z\}, \quad s^I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$$
   (a) Stabilisci il minimo numero di passi n per cui Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J e descrivi nei dettagli la strategia.
   (b) Se n è il numero determinato al punto precedente, descrivi la strategia vincente di Duplicator nel gioco di $n-1$ passi fra I e J.

3. Sia L il linguaggio al prim'ordine $L = \{a, p, r\}$, dove a è una costante, p è un simbolo relazionale unario e r è un simbolo relazionale binario; utilizzando il teorema di compattezza, dimostra che non esiste alcun insieme di enunciati Γ di L tale che per ogni struttura I di L valga:
$$I \models \Gamma \Leftrightarrow \text{ esiste un cammino } d_1 = a^I R^I d_2 R^I \ldots R^I d_n \text{ con } d_n \in p^I.$$

4. Date due strutture $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, di un linguaggio L denotiamo con $D(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$ ($S(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$) il fatto che Duplicator (rispettivamente: Spoiler) abbia una strategia vincente nel gioco di Eherenfeucht di n passi fra le due strutture, Dare una dimostrazione o formire un controesempio per ognuna delle seguenti affermazioni.
   (a) Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono tre strutture di un linguaggio relazionale L, allora, per ogni n vale:
$$D(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n) \wedge D(\mathcal{B}, \mathcal{C}, n) \Rightarrow D(\mathcal{A}, \mathcal{C}, n).$$
   (b) Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono tre strutture di un linguaggio relazionale L, allora, per ogni n vale:
$$S(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n) \wedge S(\mathcal{B}, \mathcal{C}, n) \Rightarrow S(\mathcal{A}, \mathcal{C}, n).$$
   (c) Sia $\mathcal{A}$ una struttura di dominio A per il linguaggio $L = \{R, =\}$ dove R è un simbolo relazionale binario. Se $\mathcal{B}$ è la struttura di L con dominio $A \times A$ e $R^{\mathcal{B}}$ è definita da
$$(a,b) R^{\mathcal{B}} (a', b') \Leftrightarrow a R^{\mathcal{A}} a' \text{ e } b R^{\mathcal{A}} b',$$
   allora per ogni n si ha $D(\mathcal{A}, \mathcal{B}, n)$.

5. Per ognuna delle seguenti formule F (nei vari linguaggi CTL, μ, MSO), trova, quando possibile, una interpretazione che soddisfa F ed una che soddisfa $\neg F$ (nel caso non fosse possibile, giustifica adeguatamente la risposta):

   (a) $AG(EGP \to AFQ)$;

   (b) $AG(EG(AFP))$;

   (c) $EF(AG(PUAGQ)$;

   (d) $\nu X(P \vee \Diamond X)$;

   (e) $\mu X(P \wedge \Diamond X)$;

   (f) $\forall X \exists x X(x)$;

   (g) $\forall X(X(a) \wedge \forall z(X(z) \to X(fz)) \to \forall x X(x))$.