1. Teorema di Compattezza e risultati limitativi

Il Teorema di Compattezza afferma che l'insoddisfacibilità di un insieme di enunciati dipende sempre da un sottoinsieme finito di questi. Non è infatti possibile ottenere un insieme insoddisfacibile in cui tutti i sottoinsiemi finiti sono soddisfacibili. Questa proprietà vale per la Logica Proposizionale e per la Logica Predicativa ed è dimostrabile semanticamente (utilizzando ad esempio una costruzione nota come *ultraprodotto*) oppure facendo uso dei calcoli per le logiche in questione.

Teorema 1.1. *(Teorema di Compattezza per la Logica Proposizionale e Predicativa) Sia* Γ *un insieme di enunciati (di formule proposizionali) di un linguaggio al prim'ordine (proposizionale). Si ha:*

$$\Gamma \text{ è insoddisfacibile } \Leftrightarrow \text{ esiste un sottoinsieme finito } \Gamma' \text{ di } \Gamma \text{ che è insoddisfacibile.}$$

Dimostrazione. L'implicazione da destra a sinistra è banale, perché nessun insieme soddisfacibile può contenerne un altro soddisfacibile.

Per l'implicazione opposta, utilizzeremo il calcolo della deduzione naturale che è corretto e completo per la conseguenza logica: dato un insieme di enunciati Γ, F si ha

$$\Gamma \models F \Leftrightarrow \text{ esiste una deduzione naturale di } F \text{ con ipotesi attive in } \Gamma.$$

Ricordando che una deduzione naturale $\Gamma \triangleright F$ di F con ipotesi attive in Γ è rappresentata da un albero finito , in cui la radice è etichettata con F e le foglie sono etichettate da ipotesi scaricate o da enunciati in Γ, si deduce che $\Gamma \triangleright F$ implica $\Gamma' \triangleright F$, dove Γ' è l'insieme degli enunciati di Γ che etichettano le foglie della deduzione naturale. Abbiamo quindi

$$\Gamma \models F \Leftrightarrow \Gamma \triangleright F \Leftrightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma, \Gamma' \text{ finito}, \ \Gamma' \triangleright F \Leftrightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma, \Gamma' \text{ finito}, \ \Gamma' \models F.$$

Rcordando infine che, sia in logica proposizionale che in logica predicativa, un insieme di enunciati (o formule) Γ è insoddisfacibile se e solo se $\Gamma \models \bot$, si ottiene la tesi. □

Il Teorema di compattezza viene usato, fra l'altro, per dimostrare risultati *limitativi* sulla espressività del linguaggio al prim'ordine.

Definitione 1.1. *Sia dato un linguaggio* L*, una classe* $\mathcal{C}$ *di strutture per* L *e una proprietà* $\mathcal{P}$ *(vista come un sottoinsieme di* $\mathcal{C}$*);*
- la classe $\mathcal{P}$ *si dice* esprimibile al prim'ordine *o* elementare*, se esiste un insieme di enunciati* Γ *tale che, per ogni* $I \in \mathcal{C}$ *valga:*

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow I \in \mathcal{P};$$

- la classe $\mathcal{P}$ *si dice* elementare di base *se esiste un enunciato* ϕ *tale che, per ogni* $I \in \mathcal{C}$*, valga:*

$$I \models \phi \Leftrightarrow I \in \mathcal{P}.$$

Vediamo un esempio di questo tipo di applicazione. Sia L un linguaggio al prim'ordine, contenente un simbolo predicativo binario r. Una struttura I di L si dice *fondata* se r^I non ha catene infinite, cioè se non esiste alcuna successione $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi del dominio tale che per ogni i valga $(d_i, d_{i+1}) \in r^I$.

Proposizione 1.2. *Sia* L *un linguaggio al prim'ordine, contenente un simbolo predicativo binario* r*. La proprietà di "fondatezza" non è esprimibile al prim'ordine, cioè, non esiste alcun insieme di enunciati* Γ *tale che, per ogni struttura* I *di* L *valga:*

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow I \text{ è fondata.}$$

Dimostrazione. Nota bene: a lezione abbiamo dimostrato questo risultato nel caso in cui Γ fosse composto da un unico enunciato ϕ. Qui riportiamo la dimostrazione anche nel caso di un qualsiasi insieme Γ, anche infinito, di enunciati. Supponiamo per assurdo che un tale insieme Γ esista. Consideriamo un insieme numerabile $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ di nuove costanti (nel senso che non appaiono già come costanti di L), ed il linguaggio $L' = L \cup C$. Sia Γ' l'insieme degli enunciati di L' definito da:

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{r(c_i, c_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}.$$

È facile verificare che Γ' è un insieme insoddisfacibile. Infatti, se per assurdo J fosse un modello di Γ', consideriamo il modello I di L ottenuto *dimenticando* l'interpretazione dei simboli non in L (come sopra) otteniamo una contraddizione: da una parte $I \models \Gamma$ (perché $J \models \Gamma$!), quindi r^I è fondata, dall'altra gli elementi $d_0 = c_0^J, \ldots, d_n = c_n^J, \ldots$ sono anche elementi del dominio di I e formano una catena infinita in J, quindi anche in I (perché $r^I = r^J$). Questo è un assurdo, quindi ne segue che Γ' è insoddisfacibile.

Mostriamo che Γ' è soddisfacibile: essendo questo palesemente in contraddizione con quanto appena dimostrato, dovremo concludere che l'insieme Γ non esiste.

Per il Teorema di compattezza, è sufficiente dimostrare che ogni sottoinsieme finito Δ di Γ' è soddisfacibile. Se Δ è finito, esisterà un numero $n \in N$ tale che

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{r(c_0, c_1), r(c_1, c_2), \ldots, r(c_{n-1}, c_n)\}.$$

Sia J la struttura per L' tale che $D^J = \{0, 1, \ldots, n+1\}$, $c_i^J = i$ per $0 \leq i \leq n+1$, $r^J = \{(0,1), (1,2), \ldots, (n, n+1)\}$, e che interpreta gli altri simboli di L in maniera arbitraria (ad esempio: $c_k = 0$ per $k > n+1$, e se L contiene un simbolo funzionale unario f, $f^J(d) = 0$ per ogni $d \in D^J$).

Dimostriamo che

$$J \models \Gamma \cup \{r(c_{n+1}, c_n), r(c_n, c_{n-1}), \ldots, r(c_1, c_0)\}.$$

Dalla definizione, $J \models \{r(c_0, c_1), r(c_1, c_2), \ldots, r(c_{n-1}, c_n)\}$. Per dimostrare che $J \models \Gamma$, sia I la struttura di L che si ottiene da J *dimenticando* l'interpretazione dei simboli non in L, cioè: $D^I = \{0, 1, \ldots, n+1\}$ e I e J coincidono sull'interpretazione dei simboli di L. Si ha $I \models \Gamma$ perché r^I è fondata, quindi $J \models \Gamma$.

Poiché $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{r(c_0, c_1), r(c_1, c_2), \ldots, r(c_{n-1}, c_n)\}$, ne segue che Δ è soddisfacibile.

Avendo dimostrato che ogni sottoinsieme finito di Γ' è soddisfacibile, abbiamo che lo stesso Γ' è soddisfacibile per compattezza.

Ricapitolando: avendo dimostrato che Γ' è sia soddisfacibile che insoddisfacibile, siamo giunti ad una contraddizione. La contraddizione deriva dall'aver supposto l'esistenza di un insieme Γ di enunciati al prim'ordine con la proprietà:

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow I \text{ è fondata;}$$

ne segue che un tale insieme non può esistere. □

Il Teorema di Compattezza cessa di valere se ci restringiamo alla classe dei modell finiti, come mostra il prossimo esempio. Questo spiega perché metodi come quello dei giochi di Ehrenfeucht, che valgono su qualsiasi classe di modelli, siano molto apprezzati nelle applicazioni.

Esempio 1.1. L'insieme $\Gamma = \{c_i \neq c_j) : i \neq j, i, j \in \mathbb{N}\}$. è insoddisfacibile su modelli con dominio finito, ma ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

1.1. **Esercizi.**

(1) Una relazione binaria $\rho \subseteq A \times A$ si dice *ciclica* se esistono n elementi del dominio $a_1, \ldots, a_n$ tali che

$$(a_1, a_2) \in \rho,\ (a_2, a_3) \in \rho, \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in \rho, (a_n, a_1) \in \rho$$

(in questo caso, la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ si dice un *ciclo* della relazione ρ).

Sia L un linguaggio predicativo contenente un simbolo predicativo binario r .

i) Per ogni $n \geq 1$, scrivere una formula predicativa F_n tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models F_n \Leftrightarrow\ r^I \text{ ha un ciclo di lunghezza } n$$

ii) Dimostrare che non esiste alcun insieme di enunciati Γ di L tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow\ r^I \text{ è ciclica.}$$

(2) Si ricorda che la chiusura transitiva ρ^* di una relazione binaria ρ su un insieme A è definita da

$$\rho^* = \bigcup_{n \geq 1} \rho^n,$$

dove

$$\rho^1 = \rho, \quad \rho^{n+1} = \rho^n \cup \{(d, d') \in A \times A : \exists d''(d, d'') \in \rho^n, (d'', d') \in \rho\}.$$

Sia L un linguaggio predicativo contenente un simbolo predicativo binario r e due costanti a, b.

i) Per ogni $n \geq 1$, scrivere una formula predicativa F_n tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models F_n \Leftrightarrow (a^I, b^I) \in (r^I)^n.$$

ii) Dimostrare che non esiste alcuna insieme di enunciati Γ di L tale che per ogni struttura I di L valga:

$$I \models \Gamma \Leftrightarrow\ (a^I, b^I) \text{ è nella chiusura transitiva } (r^I)^* \text{ di } r^I.$$

Suggerimento: procedere per assurdo e considerare l'insieme $\Gamma \cup \{\neg F_n : n \geq 1\}$.

(3) Sia L un linguaggio al prim'ordine, $\mathcal{P}$ una classe di interpretazioni per L e

$$\overline{\mathcal{P}} = \{I :\ I \text{ struttura di } L \text{ e } I \notin \mathcal{P}\}$$

la classe complementare. Dimostrare che vale il seguente risultato:

$$\mathcal{P} \text{ e } \overline{\mathcal{P}} \text{ sono esprimibili al prim'ordine } \Leftrightarrow\ \mathcal{P} \text{ é elementare di base}$$

(suggerimento per la freccia non banale: considerare l'insieme $\Gamma \cup \Gamma'$ dove Γ descrive $\mathcal{K}$ e Γ' descrive $\overline{\mathcal{K}}$, e utilizzare il teorema di compattezza sull'insieme $\Gamma \cup \Gamma'$).