1. Correttezza e Completezza di Risoluzione Predicativa

Come nel caso proposizionale, un albero di risoluzione della clausola C a partire da clausole in S è un albero binario etichettato, in cui la radice è etichettata da C, le foglie sono etichettate da (rinomine) di clausole in S e un nodo interno è etichettato da un risolvente predicativo delle clausole che etichettano i due figli del nodo.

Come nel caso proposizionale vogliamo cercare di utilizzare questi alberi di risoluzione per stabilire l'insoddisfacibilità di un insieme di clausole S, cercando un albero di risoluzione che abbia radice etichettata con la clausola vuota e foglie etichettate da (rinomine di) clausole in S. Un tale albero si chiama *albero di refutazione* da S.

La possibilità di rinominare le clausole di S è essenziale per la completezza del metodo di risoluzione. In altri termini, esistono insiemi di clausole insoddisfacibili per cui non esiste alcun albero di risoluzione della clausola vuota a partire da clausole in S (senza rinomina). Un esempio è dato dall'insieme di clausole $S = \{C_1, C_2\}$ dove $C_1 = \{p(x)\}, C_2 = \{\neg p(fx)\}$. Se rinominiamo C_1 sostituendo la variabile x con y otteniamo la clausola vuota da tale rinomina e da C_2, con un singolo passo di risoluzione. Invece non esiste alcun albero di risoluzione della clausola vuota dalle clausole in S non rinominate, perché non esiste nessuna sostituzione che unifichi i termini x e $f(x)$.

Come nel caso proposizionale, l'esistenza di alberi di refutazione da S di altezza n è legata alla presenza della clausola vuota all'interno degli insiemi risolventi:

Definitione 1.1. *Dato un insieme di clausole S definiamo $Ris^n(S)$ induttivamente come segue:*

$$Ris^0(S) = S, \quad Ris^{n+1}(S) = Ris^n(S) \cup \{C : C \text{ è un risolvente di (rinomine) di due clausole in } Ris^n(S)\}.$$

Diremo che C deriva per risoluzione da S se esiste un numero n tale che $C \in Ris^n(S)$.

Vale il seguente Teorema (che dimostreremo nel prossimo capitolo):

Teorema 1.1. *Se S è insoddisfacibile se e solo se esiste un n tale che $\square \in Res^n(S)$.*

Questo Teorema può essere utilizzato per testare se un insieme di clausole predicative è insoddisfacibile. L'idea è di generare tutti i possibili risolventi a partire da clausole in S, aggiumgerli all'insieme S e proseguire fino a che non si trova la clausola vuota, come nel caso proposizionale. Nel caso predicativo, però, non abbiamo più la certezza di trovare un n per cui vale $Res^n(S) = Res^{n+1}(S)$: è quindi possibile che il procedimento non abbia fine (ma questo accade solo se S è soddisfacibile).

2. Risoluzione e Conseguenza Logica

Vogliamo ora mostrare come sia possibile utilizzare il metodo di Risoluzione anche per rispondere a quesiti del tipo: dati gli enunciati $F_1, \ldots, F_n, G$, determinare se vale

$$F_1, \ldots, F_n \models G.$$

Per poter utilizzare Risoluzione ridurremo il problema precedente ad un problema di insoddisfacibilità di un insieme di clausole. Come primo passo ricordiamo che si ha:

$$F_1, \ldots, F_n \models G \quad \Leftrightarrow \quad \{F_1, \ldots, F_n, \neg G\} \text{ è insoddisfacibile} \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G \text{ è insoddisfacibile}$$

Basterà quindi ridurre il problema dell'insoddisfacibilità di un enunciato al problema dell'insoddisfacibilità di un insieme di clausole.

2.1. **Skolemizzazione.** Per prima cosa mostriamo come un qualsiasi enunciato sia *equisoddisfacibile* ad un enunciato in forma prenessa in cui non appaiono quantificatori esistenziali (un enunciato *universale*).

Definitione 2.1. *Una formula F si dice* equisoddisfacibile *ad una formula G se e solo se vale:*

$$\exists M M \models F \quad \Leftrightarrow \quad \exists N N \models G$$

Dato un enunciato F, possiamo prima trasformare F in un enunciato logicamente equivalente (e quindi anche equisoddidfacibile) in forma prenessa e poi, per eliminare gli eventuali quantificatori esistenziali, sfruttare il fatto che la formula $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G(x_1, \dots, x_n, y)$ è equisoddisfacibile alla formula $\forall x_1 \dots \forall x_n G\{x_1, \dots, x_n, y | f(x_1, \dots, x_n)\}$, dove il simbolo funzionale f non compare in G .
Infatti si ha (dimostrazione lasciata per esercizio):

$$\forall x_1 \dots \forall x_n G\{y | f(x_1, \dots, x_n)\} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G,$$

mentre ogni modello I, σ di $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y G$ può essere esteso ad un modello I', σ per la formula $\forall x_1 \dots \forall x_n G\{y | f(x_1, \dots, x_n)\}$ interpretando opportunamente la nuova funzione f.

Se il quantificatore esistenziale non è preceduto da alcun simbolo universale, la variabile y può essere sostituita da una nuova costante: ad esempio, la formula $\exists x(p(x) \wedge q(f(x), a))$ è equisoddisfacibile a $p(c) \wedge q(f(c), a)$.

Un enunciato universale ottenuto seguendo questo procedimento a partire da un enunciato F si dice una *skolemizzazione* di F.

Esempio 2.1. *Per trasformare l'enunciato*

$$F = \forall x \exists y p(x, y) \wedge \forall u \exists v q(u, v).$$

in un enunciato equisoddisfacibile universale, procediamo come segue. Mettendo la formula in forma prenessa otteniamo:

$$\forall x \exists y \forall u \exists v (p(x, y) \wedge q(u, v)),$$

da cui, per skolemizzazione, otteniamo prima

$$\forall x \forall u \exists v (p(x, fx) \wedge q(u, v)),$$

e poi

$$\forall x \forall u (p(x, fx) \wedge q(u, h(x, u))),$$

NOTA BENE: non è detto che il procedimento sopra descritto sia l'unico modo o il miglior modo di ottenere un enunciato equisoddisfacibile ed universale a partire da un enunciato F . Nell'esempio precedente notiamo che, se si mette l'enunciato prima in forma prenessa e poi si skolemizza, in qualsiasi ordine si proceda si deve introdurre almeno un simbolo di funzione binario, mentre la formula è anche equisoddisfacibile a

$$\forall x \forall u (p(x, fx) \wedge q(u, hu),$$

ottenuta skolemizzando localmente di due congiunti $\forall x \exists y p(x, y)$, $\forall u \exists v q(u, v)$.

2.2. **Da enunciati universali a insiemi di clausole.** Una volta ridotto il problema di conseguenza logica ad un problema di insoddisfacibilità di un enunciato universale tramite la forma prenessa e la skolemizzazione, ci rimane l'ultimo passaggio: traformare qust'ultimo problema in quello dell'insoddisfacibilità di un insieme di clausole. A tale scopo, è sufficiente mettere in forma normale congiuntiva la *matrice* della formula universale ottenuta (se $F = \forall x_1, \dots, \forall x_n G(x_1, \dots, x_n)$ è una formula universale con G priva di quantificatori, G si dice la matrice della formula universale): in questo modo si ottiene una formula logicamente equivalente ad F (e quindi equisoddisfacibile ad F) con la matrce in forma normale congiuntiva, da cui si ricava facilmente l'insieme delle clausole cercato.

Esempio 2.2. *Per trasformare l'enunciato universale*

$$F = \forall x \forall y \forall z ((p(x,y) \to p(x,x) \land q(z)) \land q(x))$$

in un insieme equisoddisfacibile (anzi equivalente!) di clausole, si considera la matrice

$$(p(x,y) \to p(x,x) \land q(z)) \land q(x)$$

di F e la si trasforma in forma normale congiuntiva:

$$\begin{aligned} (p(x,y) \to p(x,x) \land q(z)) \land q(x) &\equiv \\ (\neg p(x,y) \lor (p(x,x) \land q(z))) \land q(x) &\equiv \\ (\neg p(x,y) \lor p(x,x)) \land (\neg p(x,y) \lor q(z)) \land q(x). \end{aligned}$$

La formula F è quindi logicamente equivalente alll'enunciato

$$\forall x \forall y \forall z [(\neg p(x,y) \lor p(x,x)) \land (\neg p(x,y) \lor q(z)) \land q(x)],$$

che a sua volta è equivalente all'insieme di clausole

$$S = \{\{\neg p(x,y), p(x,x)\}, \quad \{\neg p(x,y), q(z)\}, \quad \{q(x)\}\}.$$

3. Esercizi

(1) Siano ψ, θ gli enunciati seguenti:

$$\psi := \forall x \exists y \, [(r(x, fy) \to r(fx, fx)) \land (\neg r(x, fy) \to \forall z r(fz, fz))],$$

$$\theta := \exists y r(y,y).$$

La formula ψ ha come conseguenza logica la formula θ? Se la risposta è affermativa, dimostralo utilizzando il metodo di risoluzione; qual è il numero minimo di passi di risoluzione necessario per arrivare alla clausola vuota?

(2) Siano F, G, H gli enunciati seguenti:

$$F \;:=\; \forall x \, (\exists y \, r(y,x) \land \neg r(x, f(x))), \quad G \;:=\; \forall x \, (\exists z \; r(z,x) \land \exists z \neg r(z, f(x)) \to r(x,x))$$

$$H \;:=\; \exists x \; r(x,x).$$

Dimostra che $F \land G \models H$ utilizzando il metodo di risoluzione.

(3) Utilizzando il metodo di risoluzione, dimostrare che il seguente insieme di enunciati Γ è insoddisfacibile,:

$$\Gamma = \{\forall x \forall y \exists z (r(x, y) \to q(fz)), \quad \forall y (q(y) \vee \exists x r(x, y)), \quad \neg \exists y q(y)\}.$$

Esiste una refutazione che utilizza solo due risoluzioni?

(4) (a) Siano F, G, H e D le quattro formule seguenti:

$$F = \forall x \exists y (q(x, y) \vee r(x, y)), \qquad G = \forall x \forall y (\forall z \neg q(z, z) \to \neg q(x, y)),$$

$$H = \forall x \forall y (r(x, y) \to \exists z q(z, z)), \qquad D = \exists z q(z, z)$$

Provare che $F, G, H \models D$ utilizzando il metodo di risoluzione.

(b) È possibile derivare la clausola vuota, con uno o più passsi di risoluzione, dall'insieme di clausole

$$S = \{\{\neg q(u, fu)\}, \{q(x, y), q(y, x)\}\}?$$

(c) (i) Siano F, G, H gli enunciati seguenti:

$$F \ := \ \forall x \ \exists y \, r(x, y) \wedge \forall x \neg r(x, f(x)), \quad G \ := \ \forall x \ (\exists y \ r(x, y) \wedge \exists y \neg r(x, y) \to r(x, x))$$

$$H \ := \ \forall x \ r(x, x).$$

Dimostra che $F \wedge G \models H$ utilizzando il metodo di risoluzione.

(ii) Siano $C_1 = \{\neg r(x, y), \neg r(fx, x)\}, \qquad C_2 = \{r(z, z), r(z, w)\}$.
Possiamo ottenere la clausola vuota con un singolo passo di risoluzione?
L'insieme $\{C_1, C_2\}$ è soddisfacibile?

(d) Siano F, G e H le le tre formule seguenti:

$$F := \forall x (\forall y \neg q(y, x) \to p(x)), \qquad G := \exists x \ (px \to r(fx)), \qquad H := \exists x \ (\exists y \ q(y, x) \vee rx).$$

Usando il metodo di risoluzione dimostrate che $F, G \models H$.

(e) Considera le seguenti clausole:

$$C_1 = \{r(gx, fy)\}, \qquad C_2 = \{\neg r(gu, v), \neg r(z, fu)\}.$$

È possibile ottenere la clausola vuota con un singolo passo di risoluzione? Giustificare adeguatamente la risposta.