



Seconda Simulazione Scritto Metodi Formali e Logica Matematica, Primo Modulo

(1) Dimostrare che

$$\forall x \exists z \forall v (r(x, v) \wedge r(v, z)) \rightarrow \exists x \neg p(x) \models \forall x p(x) \rightarrow \exists x \forall z \exists v \neg (r(x, v) \wedge r(v, fz))$$

utilizzando il metodo di risoluzione.

(2) Considerare la formula F

$$F := \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow \neg s(y, x)) \wedge \exists z (s(z, z) \wedge \neg r(z, z)),$$

- a) Stabilire il minimo numero di passi n per cui Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J , per ogni coppia di interpretazioni tali che $I \models F$ e $J \models \neg F$, e descrivere nei dettagli la strategia.
- b) Se n è il numero determinato al passo precedente, determinare due interpretazioni I, J di $\mathcal{L}$, la prima che soddisfa F , la seconda che non soddisfa F , tali che Duplicator abbia una strategia vincente nel gioco di $n - 1$ passi fra I e J .

(3) Considera i modelli M, w e N, v descritti in alto nella pagina (dove w e v sono i nodi in basso nel disegno).

(a) Per ognuna delle formule seguenti, stabilire se vale in w oppure in v :

$$Q \wedge \Diamond P \quad E[(P \wedge \Diamond Q)U(Q \wedge \Diamond P)], \quad \mu X(Q \vee \Diamond X), \quad \nu X(P \wedge \Diamond(Q \wedge \Diamond X)).$$

(b) I modelli (M, w) e (N, v) sono bisimili?

(c) Determina una proprietà invariante per bisimulazione che sia vera in (M, w) e falsa in (N, v) .

(4) (* Esercizio facoltativo)

Considera il linguaggio $L = \{p, =\}$, dove p è un simbolo relazionale unario e la seguente proprietà delle strutture finite di L :

gli insiemi p^I e $D^I \setminus p^I$ hanno la stessa cardinalità

Dimostra che questa proprietà non è esprimibile al prim'ordine in nessuna estensione del linguaggio L .