1 Giochi a due, con informazione perfetta e somma zero

Nel gioco del Nim, se semplificato all'estremo, ci sono due giocatori I, II e una pila di 6 pedine identiche. In ogni turno di gioco I rimuove una o due pedine dalla cima della pila, e il giocatore II fa la stesa cosa, se rimangono pedine. Com'è ovvio, possono esseerci al più tre turni. Il giocatore che rimuove l'ultima pedina vince e l'altro perde. Questo tipo di gioco si chiama gioco a due giocatori, a somma zero e informazione perfetta, perché ci sono due giocatori, la vincita dell'uno implica la perdita dell'altro e ogni giocatore è perfettamente a conoscenza delle informazioni e delle mosse dell'altro giocatore.

Le possibili partite del gioco si possono rappresentare sotto forma di tabella:

Partita	Vincitore
111111	II
11112	I
11121	I
11211	I
1122	II
12111	I
1212	II
1221	II
211111	I
2112	II
2121	II
2211	II
222	I

Come si vede dalla tabella, il secondo giocatore ha un modo di giocare (una strategia) che gli permette di vincere qualsiasi cosa faccia il primo giocatore: è sufficiente rispondere con un numero di pedine diverso da quello giocato dal primo giocatore .

La struttura matematica di questo gioco è molto semplce. Possiamo considerare l' insieme $A = \{1, 2\}$ ed i giocatori si alternano scegliendo un elemento di A, fino a raggiungere la cifra 6. Le partite di lunghezza pari sono vinte da II quelle di lunghezza dispari da I.

Nella formalizzazione dei giochi è comodo avere a che fare con partite tutte della stessa lunghezza. Nella formalizzazione del NIM possiamo stabilire che le partite siano successioni di cifre $1, 2$ di lunghezza 6. Alcune di queste successioni non rappresentano partite reali, come nel caso della successione $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$: infatti una partita reale sarebbe terminata (per mancanza di pedine) già dalla seconda mossa del giocatore I. In altre sequenze, come (221211) non esistono neanche sottosequenze che equivalgano ad una partita reale. Risolviamo il problema considerando queste sequenze come partite in cui, dopo aver esaurito le 6 pedine reali, i giocatori continuano a giocare con pedine immaginarie, ma senza che le nuove pedine influiscano sull'esito del gioco (nell'esempio, la partita $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ è vinta da I, mentre la partita (221211) è vinta da II).

Formalmente, stabiliiamo che il giocatore II vince tutte le partite $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2)$ tali che

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i) \geq 6, \qquad \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + b_i) + a_i < 6 \text{ per qualche } n \leq 2$$

.

Più in generale, possiamo considerare la seguente famiglia di giochi a due: un gioco $G_n(A, W)$ viene descritto da un'arena A (un insieme non vuoto), un numero naturale n che specifica la lunghezza del gioco e un sottoinsieme W di A^{2n} che specifica l'insieme delle vincite per il giocatore II. Il primo giocatore sceglie un elemento a_0 di A; il secondo giocatore risponde con un elemento b_0, sempre in A, e così via, per n volte. Alla fine del gioco la partita $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{n-1}, b_{n-1})$ è vinta da II se la sequenza appartiene a W; in caso contrario la partita è vinta da I.

Esempio 1. Sia $A = \mathbb{N}$ e $B \subseteq \mathbb{N}$. Il gioco è costituito da un solo turno ($n = 1$): II vince se la somma dei due numeri è in B. L'insieme delle vincite per II è quindi $W = \{(a_0, b_0) \in \mathbb{N}^2 : a_0 + b_0 \in B\}$. In questo caso II ha una strategia vincente se e solo se B è infinito.

Un concetto importante in teoria dei giochi è quello di strategia vincente. Informalmente:

- se il giocatore I ha un modo di giocare che gli garantisca la vittoria, qualsiasi siano le mosse di II, diciamo che II ha una strategia vincente.
- se il giocatore II ha un modo di giocare che gli garantisca la vittoria, qualsiasi siano le mosse di I, diciamo che II ha una strategia vincente;

Possiamo formalizzare il concetto di *strategia* (non necessariamente vincente) per il primo giocatore considerandola come una funzione σ con dominio l'insieme delle sequenze di lunghezza pari minore o uguale a $2n$ (compresa la sequenza vuota) e codominio A:

$$\sigma : A^0 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{2n} \to A$$

Una partita $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ è giocata da I seguendo la strategia σ se $\sigma(a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k) = a_{k+1}$, per ogni $k < n$ (in particolare, $\sigma(\epsilon)$ indica il primo elemento da giocare).

In modo simile, una strategia per il secondo giocatore è una funzione

$$\tau : A^1 \cup A^3 \cup \ldots \cup A^{2n-1} \to A,$$

ed una partita $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ è giocata da I seguendo la strategia σ se $\sigma(a_0, b_0, \ldots, a_k) = b_k$, per ogni $k \leq n$.

Una strategia σ di I si dice *vincente* se ogni partita del gioco in cui I segue σ è vncente per I. Le strategi vnceti per II si definiscono in modo analogo.

Esempio 2. *Nel gioco del NIM semplificato, la strategia vincente di II è definita da*

$$\sigma(a_0, b_0, \ldots, a_k) = \begin{cases} 2 & \textit{se } a_k = 1; \\ 1 & \textit{se } a_k = 2. \end{cases} \quad .$$

Esercizio 3. *Possiamo generalizzare il gioco del NIM ammettendo un qualsiasi numero $m \geq 2$ di pedine iniziali. Stabilire, a seconda del valore di m, quale giocatore ha una strategia vincente e descrivere tale strategia.*

Ovviamente, non è possibile che entrambi i giocatori abbiano una strategia vincente per lo stesso gioco. Nei giochi finiti, qualsiasi sia A, W è possibile dimostrare che almeno uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Più in generale, possiamo definire strategie di I a partire da una fissata posizione p di lunghezza $2k$ con $k < n$: si tratta di una funzione

$$\sigma : A^{2k} \cup A^{2k+2} \cup \ldots \cup A^{2n} \to A.$$

Una partita dalla posizione p che segue σ è una partita $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ tale che $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{k-1}, b_{k-1}) = p$ e $\sigma(a_0, b_0, \ldots, a_h, b_h) = a_{h+1}$, per ogni $k \leq h < n$ Una tale strategia si dirà vincente per I a partire da p se ogni partita che segue σ a partire da p è vincente per I. In modo simile si definisce una strategia per II, che parte da una posizione $p = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_k)$.

Definizione 4. *Un gioco a due si dice determinato se almeno uno dei due giocatori ha una strategia vincente.*

Teorema 5. *(Zermelo 1871–1953) I giochi $\mathcal{G}_n(A, W)$ sono determinati.*

Dimostrazione. Consideriamo il linguaggio $L = \{R\}$ dove R è una relazione di arietà $2n$ e la seguente formula di L:

$$F := \forall a_0 \exists b_0 \forall a_1 \exists b_1 \ldots \forall a_{n-1} \exists b_{n-1} R(a_0, b_0, a_1, b_1, a_{n-1}, b_{n-1}).$$

Considerando l'interpretazione J di L che ha come dominio l'insieme $\{1, 2\}$ e come interpretazione R^J di R proprio l'insieme W delle vincite per il giocatore II, abbiamo allora che $J \models F$ se e solo se II ha una strategia vincente nel gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$.

Allo stesso modo, una strategia vincente per I viane rappresentata dalla formula

$$G := \exists a_0 \forall b_0 \exists a_1 \forall b_1 \ldots \exists a_{n-1} \forall b_{n-1} \neg R(a_0, b_0, a_1, b_1, a_{n-1}, b_{n-1})$$

in modo che $J \models G$ se e solo se I ha una strategia vincente nel gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$.

Per dimostare il teorema, basta fare vedere che se I non ha una strategia vincente, allora II ne ha una: questo è ovvio, visto che la negazione di F equivale a G.

□

1.1 Giochi infiniti

Esempio 6. Sia A l'insieme delle cifre $\{0, \ldots, 9\}$ e C un fissato sottoinsieme dell'intervallo reale $[0, 1]$. In questo gioco i due giocatori scelgono alternativamente elementi da A ed il gioco va avanti all'infinito. Una partita è quindi una successione infinita

$$(a_0, b_0, a_1, b_1 \ldots),$$

ed è vinta da II se il numero reale $r = 0, a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots$ appartiene a C. Se C è numerabile, $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$, I ha una strategia vincente: all'ennesimo turno gli basta scegliere a_{n-1} tale che $r \neq c_{n-1}$ (questo è sempre possibile: basta scegliere a_{n-1} uguale a 0 se l'ennesima cifra dell'espansione decimale di c_n è diversa da 0, e $a_{n-1} = 0$, altrimenti). Stessa cosa se il complementare di C è numerabile, ma questa volta è I ad avere una strategia vincente.

In generale un gioco infinito a due (somma zero e informazione perfetta) viene definito da un'arena A (un insieme non vuoto) e un insieme $W \subseteq A^\omega$ che caratterizza le partite infinite vinte da II. Indichiamo il gioco con $\mathcal{G}_\omega(A, W)$. Alcuni giochi sono particolarmente semplici, ad esempio quelli in cui W è un insieme numerabile (vedi esempio precedente). Un'altra misura di semplicità è data da un criterio topologico.

Nell'insieme A^ω definiamo *intervalli* quei sottoinsiemi $O_{(z_0,\ldots,z_k)}$ di A^ω definiti a partire da una successione finita $(z_0, \ldots, z_k)$ di elementi di A nel modo seguente:

$$O_{(z_0,\ldots,z_k)} = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_i = z_i, \forall i = 0, \ldots k-1\}$$

.

Come nel caso della retta reale, un insieme aperto di A^ω è un insieme X che è unione di intervalli. In altre parole, un insieme X è aperto se e solo se ogni qualvolta $(x_0, x_1, \ldots) \in X$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$O_{(x_0,\ldots,x_k)} \subseteq W.$$

Possiamo allora classificare i sottoinsiemi W di A^ω a seconda della loro *complessità topologica.* Ai primi livelli troviamo gli insiemi più semplici, che sono gli insiemi aperti o i loro complementari, gli insiemi chiusi; ad esempio ogni insieme W finito è chiuso. Poi la gerarchia della complessità topologica sale considerando unioni numerabili o intersezioni numerabili dei livelli precedenti.

Un gioco $\mathcal{G}_\omega(A, W)$ si dice aperto se W è un insieme aperto nella topologia di cui sopra e cioè se, per ogni punto $x = (x_0, x_1, \ldots) \in W$ esiste un n tale che tutti gli elementi che iniziano con la successione $(x_1, \ldots x_n)$ sono in W.

Esercizio 7. *Dimostrare che, fissata una successione finita $(z_0, \ldots, z_k)$ di elementi di A gli intervalli $O((z_0, \ldots, z_k)))$ e i loro complementari $A^\omega \setminus O((z_0, \ldots, z_k)))$ sono insiemi aperti.*

Esercizio 8. *Dimostrare che, fissata una successione finita $(z_0, \ldots, z_k)$, il gioco $\mathcal{G}_\omega(A, W)$ dove $W = O((z_0, \ldots, z_k)))$ oppure $W = A^\omega \setminus O((z_0, \ldots, z_k)))$ è determinato.*

Supponiamo che A sia un sottoinsieme dei numeri naturali, $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$. Dimostreremo:

Teorema 9. *(Gale-Stewart -1953)) Se $A \subseteq \mathbb{N}$ allora ogni gioco $\mathcal{G}_\omega(A, W)$, dove W è un sottoinsieme chiuso di A^ω, è determinato.*

Dimostrazione. Supponiamo che I non abbia una strategia vincente e mostriamo come costruire una strategia per II. Per ogni $a_0 \in A$ deve esistere un $b_0 \in A$ tale che il giocatore I non ha una strategia vincente dalla posizione (a_0, b_0). Il giocatore II può quindi *scegliere* un tale b_0 come sua prima mossa. Continuando in questo modo, II può assicurarsi le scelte in modo che da ogni posizione parziale $p = (a_0, b_0, \ldots, a_i, b_i)$ del gioco il giocatore I non abbia una strategia vincente. Mostriamo che ogni partita infinita $\sigma = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ in cui II segue questa strategia appartiene a W (ed è quindi vinta da II). In caso contrario, la partita apparterrebbe a $A^\omega \setminus W$ che è un insieme aperto. La partita sarebbe allora già decisa ad uno stadio finito, in quanto esisterebbe un n tale che ogni sequenza $(a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n \ldots)$ non appartiene a W. A partire dalla sequenza $(a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n)$, quindi, I avrebbe una strategia (qualsiasi mossa lo fa vincere), contrariamente alle ipotesi fatte. $\square$

NOTA BENE (per chi ha familiarità con l'assioma della scelta AC): il Teorema 9 vale (con la stessa dimostrazione) anche se A non è un sottoinsieme dei numeri naturali, ma è *ben ordinabile*. Quindi usando l'assioma della scelta possiamo dimostrare il Teorema 9 per un qualsiasi insieme A).

Gli insiemi aperti e chiusi di A^ω non sono altro che i primi gradini della cosidetta *Gerarchia Boreliana*. Ad un livello successivo della gerarchia si trovano ad esmpio le unioni numerabili di insiemi chiusi (o l'intersezione numerbile di insiemi aperti). Procedendo in modo simile si creano i vari livelli della gerarchia. Un famoso Teorema (Martin 1970) , dimostrato utilizzando l'assioma dela scelta, afferma che se l'insieme delle vincite W appartiene alla gerarchia boreliana, il gioco $G_\omega(A, W)$ è determinato.

Esercizi

1. Sia $A = \{0, 1\}$, $W = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) : a_0 \neq b_1 \text{ e } a_1 \neq b_1\}$. Determinare quale giocatore ha una strategia vincente nel gioco $\mathcal{G}_2(A, W)$.

2. Supponiamo di avere due giochi $\mathcal{G}_n(A, W)$, $\mathcal{G}_n(A', W')$ con $A \cap A' = \emptyset$.
Sia $A'' = A \times A' = \{(a, a') : a \in A, a' \in A'\}$ e W'' tale che

$$((x_0, x_0'), (y_0, y_0'), (x_1, x_1'), (y_1, y_1') \ldots, (x_{n-1}, x_{n-1}'), (y_{n-1}, y_{n-1}')) \in W''$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}) \in W \text{ e } (x_0', y_0', x_1', y_1', \ldots, x_{n-1}', y_{n-1}') \in W'.$$

Dimostrare che:

   a) Se il giocatore II ha una strategia vincente in $\mathcal{G}_n(A, W)$ e in $\mathcal{G}_n(A', W')$, allora ha una stategia vincente in $\mathcal{G}_n(A'', W'')$;

   b) Se il giocatore I ha una strategia vincente in $\mathcal{G}_n(A, W)$ oppure in $\mathcal{G}_n(A', W')$, allora ha una stategia vincente in $\mathcal{G}_n(A'', W'')$.

3. Risolvere l'esercizio 3 del testo.

4. Per chi ha familiarità con gli ordinali e l'assioma della scelta. Dimostrare supponendo che valga AC che esiste un sottoinsieme W di $\mathbb{N}^\omega$ tale che il gioco $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{N}, X)$ non è determinato.