1 Giochi di Ehrenfeucht-Fraissé e Logica del Prim'ordine

In questo tipo di giochi l'arena è costituita da due grafi orientati $G = (V, E), G' = (V', E')$. Lo scopo del I giocatore è di mostrare, in un numero finito n di passi, che i due grafi *differiscono strutturalmente.*

Il gioco di Eherenfeucht Fraissé di n passi su G, G' (che denotiamo con $EF_n(G, G')$) si svolge come segue. Il primo giocatore (chiamato anche *Spoiler* in questo tipo di giochi) sceglie un elemento a_0 in uno dei due grafi, ed il secondo giocatore (chiamato anche *Duplicator*) risponde con un elemento b_0 che appartiene all'altra struttura. Queste due scelte a_0, b_0 costituiscono il primo turno di gioco, che prosegue nello stesso modo per n turni: all'i-esimo turno Spoiler sceglierà un elemento a_{i-1} in uno dei due grafi e Duplicator risponderà con un elemento b_{i-1} nell'altro grafo (nota bene: nulla impedisce a Spoiler o a Duplicator di ripetere una scelta già fatta precedentemente da uno dei due giocatori). Per stabilire il vincitore della partita, alla fine degli n turni si considerano l'insieme delle scelte $v_0, \ldots, v_{n-1}$ fatte dai due giocatori in V e le corrispondenti scelte $v'_0, \ldots, v'_{n-1}$ in V'. Più precisamente, per ogni partita $p = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}.b_{n-1}) \in A^{2n}$ si considera la funzione $\phi(v_i) = v'_i$ fra n nodi $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ di V e n nodi $\{v'_0, \ldots, v'_{n-1}\}$di V' definiti per $i = 0, \ldots, n-1$ da

$$v_i = \begin{cases} a_i, \text{ se } a_i \in V; \\ b_i \text{ altrimenti} \end{cases} \quad , \quad v'_i = \begin{cases} a_i, \text{ se } a_i \in V'; \\ b_i \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Duplicator vince la partita se la corrispondenza $\phi(v_i) = v'_i$ fra il sottografo

$$(\{v_1, \ldots, v_n\}, E \cap (\{v_1, \ldots, v_n\} \times \{v_1, \ldots, v_n\}))$$

di G ed il sottografo

$$(\{v'_1, \ldots, v'_n\}, E' \cap (\{v'_1, \ldots, v'_n\} \times \{v'_1, \ldots, v'_n\}))$$

di G' è un isomorfismo dei due sottografi, (detto anche *isomorfismo locale* fra G e G').

In altre parole, Duplicator vince se per $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$:
- $v_i = v_j \Leftrightarrow v'_i = v'_j$;
-$(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v'_i, v'_j) \in E'$.

Esempio 1. Consideriamo due grafi $G = (\{0, 1, \ldots, m\}, E)$ e $G' = (\{0, 1, \ldots, k\}, E')$ dove $E = \{(0, i) : i \leq m\}$ ed $E' == \{(0, i) : i \leq k\}$. Se $n \leq min\{k, m\}$, Duplicator ha una strategia vincente nel gioco $E_n(G, G')$: è sufficiente che risponda alle scelte di Spoiler in modo coerente rispetto all'ugualianza - se a_i è un vertice w precedentemente scelto in G o G', deve rispondere con il vertice corrispondente w', già scelto nell'altra struttura- e in modo che $a_i = 0$ se e solo se $b_i = 0$.

Esercizio 2. Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi tali che in G esiste un nodo collegato a tutti i vertici, mentre in G' tale vertice non esiste . In altre parole, considerando G, G' come interpretazioni del linguaggio $L = \{R\}$ con R binario, (interpretato con E in G e con E' in G') la proprietà $F := \exists x \forall y x R y$ vale in G ma non in G'. Determinare quale dei due giocatori ha una strategia vincete nel gioco $EF_2(G, G')$.

Esercizio 3. Come nell'esercizio precedente, siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi tali che in G la formula F è vera, mentre è falsa in G', dove

$$F := \forall x \forall y \exists z (xRy \to xRz \wedge zRy).$$

Verificare che, sotto queste condizioni, Spoiler ha una strategia vincente nel gioco $EF_3(G, G')$.

Esercizio 4. Per ognuna delle formule elencate e per il relativo n dimostrare che se $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ sono due grafi tali che in G $G \models F$ e $G' \models \neg F$, Spoiler ha una strategia vincente nel gioco $EF_n(G, G')$.

1. $F := \forall x \exists y (xRy \vee yRx)$, $n = 2$;

2. $F := \forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \to \exists w (yRw \wedge zRw))$, $n = 4$;

3. $F := \forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \to \exists w (yRw \wedge zRw))$, $n = 3$; (nota bene, la formula è la stessa del punto precedente, ma il numero di passi del gioco è minore, quindi la strategia per Spoiler diventa più difficile da trovare).

La prima domanda che ci poniamo su questo tipo di giochi è se siano o meno determinati. La riposta è sempice, perché i giochi di Eherenfeucth-Fraïssé sono riconducibili ai giochi finiti descritti nel paragrafo precedente, e abbiamo dimostrato che questo tipo di giochi sono sempre determinati (Teorema di Zermelo).

Esercizio 5. Dimostrare che i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé sono determinati riducendoli ai giochi finiti del paragrafo precedente. Più precisamente, dimostrare che per ogni gioco di tipo $EF_n(G, G')$ esiste un insieme non vuoto A ed un sottoinsieme $W \subseteq A^\omega$ tale che
- il giocatore I ha una strategia vincente in $\mathcal{G}_n(A, W)$ se e solo se Spoiler ha una strategia vincente in $EF_n(G, G')$;
- il giocatore II ha una strategia vincente in $\mathcal{G}_n(A, W)$ se e solo se Duplicator ha una strategia vincente in $EF_n(G, G')$.

Soluzione Dati due grafi orientati $G = (V, E), G' = (V, E')$ ed un numero naturale n consideriamo il gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ dove $A = V \cup V'$ e W è l'insieme delle partite

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) \in A^{2n}$$

tali che

1. $a_i \in V \Leftrightarrow b_i \in V'$, per ogni i;

2. detto $v_i \in \{a_i, b_i\}$ il vertice che appartiene a V e $v'_i \in \{a_i, b_i\}$ il vertice che appartiene a V' si ha, per $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$
   - $v_i = v_j \Leftrightarrow v'_i = v'_j$;
   -$(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v'_i, v'_j) \in E'$.

Supponiamo che II abbia una strategia vincente nel gioco $\mathcal{G}_n(V \cup V', W)$ e mostriamo come la stessa strategia può essere utilizzata da Duplicator nel gioco $EF_n(G, G')$: visto che la strategia è vincente per il secondo giocatore nel gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$, ogni coppia a_i, b_i di una partita che segue la strategia di II in $\mathcal{G}_n(V \cup V', W)$ dovrà verificare $a_i \in V \Leftrightarrow b_i \in V'$, ed essere quindi una risposta possibile anche per Duplicator nel gioco $EF_n(G, G')$. La seconda condizione della definizione di W ci dice anche che alla fine la partita sarà vincente per Duplicator.

Supponiamo invece che sia I ad avere una strategia vincente nel gioco $\mathcal{G}_n(V \cup V', W)$. Spoiler può allora utilizzare questa strategia anche nel gioco $EF_n(G, G')$ restringendola alle partite in cui Duplicator risponde sempre nella struttura diversa da quella dell'ultima scelta di Spoiler e la strategia così costruita sarà vincente per Spoiler.

Dagli esempi precedenti si intuisce che l'esistenza di strategie vincenti per Spoiler nei giochi di Eherenfeucth-Fraissé $EF_n(G, G')$ è legata alla capacità della logica al prim'ordine di esprimere differenze fra i due grafi G, G', dove il numero n di passi del gioco è legato in qualche maniera alle quantificazioni presenti nella formula. D'altra parte l'esercizio 4 ci fa capire che n non è legato all'aspetto puramente sintattico di una formula in grado di differenziare fra G e G'. Per comprendere meglio questo aspetto, notiamo infatti che la formula

$$F := \forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \rightarrow \exists w (yRw \wedge zRw))$$

dell'esercizio 4 è logicamente equivalente alla formula

$$F' := \forall y \forall z (\exists x \ (xRy \wedge xRz) \rightarrow \exists w (yRw \wedge zRw)).$$

Le due formule F, F' sono logicamente equivalenti ma hanno rango differente, dove il rango di una formula è definito induttivamente come segue (la definizione si applica a formule F in cui gli operatori $\rightarrow, \leftrightarrow$ sono stati tradotti in termini di $\vee, \neg, \wedge$):

Definizione 6. *Il rango (di quantificazione) $rg(F)$ di una formula F è definito da:*

1. *il rango di una formula atomica è zero;*
2. *il rango di una formula di tipo $\neg G$ è pari al rango di G;*
3. *il rango di una formula del tipo $F_1 \vee F_2$ o $F_1 \wedge F_2$ è il massimo dei ranghi delle due formule F_1, F_2;*
4. *il rango di una formula del tipo $\exists x G$ o $\forall x G$ è pari al rango di G più 1.*

Notiamo anche che possiamo supporre che la formula F sia in forma normale negativa, nel senso che in F tutte le negazioni appaiono solo di fronte alle formule atomiche (la trasformazione che trasforma una formula in una formula equivalente in forma normale negativa non cambia il rango).

Esempio 7. *se F è la formula $\forall x \forall y \forall z H$ il suo rango è pari al rango di H più 3; se $H := (xRy \wedge xRz \to \exists w(yRw \wedge zRw))$ il rango di H è 1, visto che il rango di $(xRy \wedge xRz)$ è zero e il rango di $\exists w(yRw \wedge zRw))$ è 1. Ne segue che $rg(F) = 4$.*

Se invece F' è la formula

$$\forall y \forall z (\exists x \ (xRy \wedge xRz) \to \exists w(yRw \wedge zRw)),$$

il suo rango è 3.

Dimostreremo che, se esiste una formula F tale che $G \models F$ e $G' \models \neg F$, allora Spoiler ha una strategia vincente nel gioco $EF_n(G, G')$, dove $n = rg(F)$. In particolare, se G, G' sono differenziati da una formula F di rango n che è equivalente ad una formula di grado $m < n$, allora Spoiler avrà una strategia vncente anche nel gioco $EF_m(G, G')$.

Per prima cosa definiamo le strategie per Spoiler nel gioco di n passi $\mathcal{G}_n(G, G')$ *a partire* da una data *posizione* del gioco ovvero da una sequenza

$$p = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1}) \in A^{2k}$$

tale che $a_i \in V \Leftrightarrow b_i \in V'$. Tali strategie sono funzioni

$$\sigma : A^0 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{2(n-1)} \to A$$

tali che per ogni partita

$$p = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1}, a_k, b_k, \ldots, a_{k+n-1}, b_{k+n-1})) \in A^{2(k+n)}$$

che segue tale strategia dal k-esimo turno in poi
(ovvero tale che $\sigma(\epsilon) = a_k$ e $\sigma(a_k, b_k, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}) = a_{k+i+1}$, per ogni $i < n - 1$)
è vincente per Spoiler (ovvero: la corrispondenza parziale fra G e G' indotta da p non è un isomorfismo locale).

Teorema 8. *Sia F una formula tale che $G \models F$ e $G' \models \neg F$; allora Spoiler ha una strategia vincente nel gioco $EF_n(G, G')$, dove $n = rg(F)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo qualche cosa di più, ovvero: per ogni k e per ogni formula $F(x_0, \ldots, x_{k-1})$ (dove le variabili libere di F sono fra le variabili $x_0, \ldots, x_{k-1}$), se $v_0, \ldots, v_{k-1}$ in G, $v'_0, \ldots, v'_{k-1}$ in G' sono tali che $G \models F(v_0, \ldots, v_{k-1})$ e $G' \not\models F(v'_0, \ldots, v'_{k-1})$ [1] allora Spoiler ha una strategia vincente a partire da una qualsiasi posizione $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1})$ tale che $\{a_i, b_i\} = \{v_i, v'_i\}$ per ogni $i = 0, \ldots, k-1$ nel gioco di $n = rg(F)$ passi fra G e G'.

La dimostrazione si ottiene per induzione sul rango di F.

- Se $F(x_0, \ldots, x_{k-1})$ è una formula di rango zero, allora è una combinazione booleana di formule atomiche del tipo $x_i R x_j$ oppure $x_i = x_j$. Supponiamo ad esempio che $F := (x_i R x_j)$. Poiché per ipotesi $G \models F(v_i, v_j)$ e $G' \models \neg F(v_i, v_j)$ abbiamo $v_i E v_j$ ma non $v'_i E' v'_j$ e Spoiler vince il gioco di zero passi partendo dalla posizione $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_k, b_k)$, perché la funzione $\phi(v_i) = v'_i$ non è un isomorfismo locale. Il caso generale in cui F è una qualsiasi formula di rango 0 è lasciato per esercizio.

[1] notazione *sporca*

- Nel passo induttivo, supponiamo che $rg(F) = n+1$. Allora F è una combinazione booleana di formule di rango $\leq n$ e di formule del tipo $\exists xH$, $\forall xH$ con $rg(H) \leq n$. Supponiamo ad esempio che $F(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \exists x_k H(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k)$. Poiché $G \models F(v_0, \ldots, v_{k-1})$, esiste un $v \in G$ tale che $G \models H(v_0, \ldots, v_{k-1}, v)$, mentre per ogni $v' \in G'$ si ha $G' \not\models H(v_0, \ldots, v_{k-1}, v')$. La strategia vincente di Spoiler a partire dalla posizione $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1})$ inizia quindi con la scelta di $a_k = v \in G$. Qualsiasi sia la risposta $b_k = v'$ di Duplicator in G', sappiamo che $G' \not\models H(v_0, \ldots, v_{k-1}, v')$; per ipotesi induttiva, Spoiler ha una strategia vincente $\sigma_{v'}$ nel gioco di $rg(H) = rg(F) - 1$ passi a partire dalla posizione $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1}, v, v')$. Ma allora la scelta di v seguita dalle scelte suggerite dalle strategie $\sigma_{v'}$ forniscono una strategia σ per Spoiler nel gioco di $rg(F)(= rg(H) + 1)$ passi a partire dalla posizione $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1})$.
- Il caso $F(x_0, \ldots, x_k) = \forall x_{k+1} F_1(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1})$ e tutti gli altri casi necessari a terminare la dimostrazione sono lasciati per esercizio.

□

Viceversa, possiamo dimostrare che, se Spoiler ha una strategia vincente in $EF_n(G, G')$, allora esiste almeno una enunciato di rango $\leq n$ che è vero in G ma falso in G'. In effetti, dimostreremo che se tale enunciato non esiste, cioè se G e G' verificano le stesse formule di rango minore o uguale ad n allora è Duplicator ad avere una strategia vincente nel gioco $EF_n(G, G')$ (e quindi non può averla anche Spoiler).

La dimostrazione di questa proprietà si basa sul seguente Lemma:

Lemma 9. *Fissate le variabili $x_0, \ldots, x_k$, il numero di formule di rango n che hanno variabili libere in $x_0, \ldots, x_k$ è finito, a meno di equivalenza logica.*

Dimostrazione. Per induzione sul rango. Una formula $F(x_0, \ldots, x_k)$ di rango zero (quindi priva di quantificatori) è una combinazione booleana di formule atomiche. Il numero delle formule atomiche che utilizzano $x_0, \ldots, x_k$ è finito e il valore di verità di F dipende solo dal valore di verità delle formule atomiche che la compongono, una volta interpretate $x_0, ldots, x_k$ nel dominio. Esistono quindi solo un numero finito di formule atomiche in $x_1, \ldots, x_n$ a due a due non logicamente equivalenti.

Una formula di rango $n+1$ è combinazione booleana di formule di rango $\leq n$ (che, a meno di equivakenza logica, sono un numero finito) e formule del tipo $\exists x F(x, x_1, \ldots, x_k)$ con x fissato, diverso da $x_1, \ldots, x_k$. Queste ultime formule, a meno di equivalenza logica, sono tante quante le formule di rango n nelle variabili libere $x, x_1, \ldots, x_k$, quindi sono, sempre a meno di equivalenza logica, un numero finito di formule. Una volta interpretate $x_1, \ldots, x_k$ nel dominio, il valore di verità di una formula di rango $n+1$ nelle variabili libere $x_1, \ldots, x_k$ dipende in modo booleano da un numero finito di possibili valori di verità delle formule che la compongono. Ne segue che a meno di equivalenza logica abbiamo solo un numero finito di formule di tale tipo. □

Definizione 10. *Due grafi G, G' si dicono elementarmente equivalenti fino al rango n (in simboli $G \equiv_n G'$) se verificano gli stessi enunciati di rango minore o uguale ad n.*

Teorema 11. *Se $G \equiv_n G'$ allora Duplicator ha una strategia vincente nel gioco $EF_n(G, G')$.*

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema **??** dimostriamo (per induzione su n e per ogni k) che se $v_0, \ldots, v_{k-1}$ in G, $v'_0, \ldots, v'_{k-1}$ in G' sono tali che

$$G \models F(v_0, \ldots, v_{k-1}) \Leftrightarrow G' \models F(v'_0, \ldots, v'_{k-1}),$$

per ogni formula $F(x_0, \ldots, x_{k-1})$ di rango n nelle variabili libere $x_0, \ldots, x_{k-1}$, allora Duplicator ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra G e G' a partire da una qualsiasi posizione $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1})$ tale che $\{a_i, b_i\} = \{v_i, v'_i\}$.

Per $n = 0$ tale proprietà è ovvia, visto che fra le formule atomiche ci sono $x_i R x_j$, $x_i = x_j$ e quindi la corrispondenza fra $v_0, \ldots, v_{k-1}$ in G e $v'_0, \ldots, v'_{k-1}$ in G' è un isomorfismo locale.

Nel passo induttivo, supponiamo che $G \models F(v_0, \ldots, v_{k-1}) \Leftrightarrow G' \models F(v'_0, \ldots, v'_{k-1})$ per ogni formula $F(x_0, \ldots, x_{k-1})$ di rango $n + 1$ nelle variabili $x_0, \ldots, x_{k-1}$ e sia $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1})$ una posizione tale che $\{a_i, b_i\} = \{v_i, v'_i\}$. Se Spoiler sceglie come prima mossa $v \in G$, per rispondere adeguatamente Duplicator può cercare un $v' \in G'$ tale che

$$G \models H(v_0, \ldots, v_{k-1}, v) \Leftrightarrow G' \models H(v'_0, \ldots, v'_{k-1}, v'),$$

per ogni formula H di rango minore o uguale ad n, nelle variabili libere $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k$. Infatti l'ipotesi induttiva ci garantisce che, se un tale v' esiste, allora Duplicator ha una strategia vincente nel gioco di n passi a partire dalla posizione

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1}, v, v').$$

Quindi ci basta dimostrare che un tale v' esiste. Per far questo notiamo che l'insieme delle formule $\{H(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k) : rg(H) \leq n \text{ e } G \models H(v_0, \ldots, v_{k-1}, v)\}$ è, a meno di equivalenza logica, un insieme finito. Se $H_1(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k), \ldots, H_m(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ è un insieme di rappresentanti per le classi di equivalenza logica di tale insieme, allora

$$G \models \bigwedge_{j=1}^{m} H_j(v_0, \ldots, v_{k-1}, v),$$

e quindi anche

$$G \models \exists x_k \bigwedge_{j=1}^{m} H_j(v_0, \ldots, v_{k-1}, x_k).$$

La formula

$$F((x_0, \ldots, x_{k-1}) := \exists x_k \bigwedge_{j=1}^{m} H_j(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k))$$

ha rango $n + 1$, quindi per ipotesi

$$G' \models \exists x_k \bigwedge_{j=1}^{m} H_j(v'_0, \ldots, v'_{k-1}, x_k)$$

ed esiste un v' con

$$G' \models \bigwedge_{j=1}^{m} H_j(v'_0, \ldots, v'_{k-1}, v').$$

Questo v' verifica la proprietà

$$G \models H(v_0, \ldots, v_{k-1}, v) \Leftrightarrow G' \models H(v'_0, \ldots, v'_{k-1}, v'),$$

per ogni formula H di rango minore o uguale ad n ed è quindi una buona risposta per Duplicator.

Nel caso Spoiler scelga un elemento v' in G' si procede in modo analogo.

$\square$

2 Esercizi

1. Considera la formula

   $$F = \forall x \forall y(\neg xRy \wedge \neg yRx \rightarrow \exists z(xRz \wedge yRz))),$$

   e due grafi G, G' tali che $G \models F$, $G' \models \neg F$. Determina il numero minimo n per il quale Spoiler ha sempre una strategia vincente nel gioco di n passi fra G e G', e descrivi tale strategia.

2. Data la formula

   $$\phi = \forall x \forall y \forall z(xRy \wedge xRz \rightarrow yRz \vee zRy),$$

   siano G, G' due grafi tali che $G \models \phi$ e $G' \models \neg\phi$. Dimostra che Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di tre passi fra G e G'.

3. Sia $L = \{<, =\}$ ed I, J due interpretazioni di L in cui $<^I, <^J$ sono ordini lineari densi (cioè in cui vale $\forall z \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)))$ e privi di massimo e di minimo.

   Dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, Duplicator ha una strategia vincente per il gioco di Ehrenfeucht di lunghezza n fra I eJ.

4. Utilizzando l'esercizio precedente, dimostra che $(\mathbb{Q}, <, =)$ e $(\mathbb{R}, <, =)$ sono un esempio di due strutture che sono elementarmente equivalenti ma non sono isomorfe.

5. Dimostra (utilizzando i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé) che se I, J sono due strutture del linguaggio $L = \{R, =\}$ con R simbolo per relazione binario, I è una struttura con dominio finito elementarmente equivalente a J, allora I, J sono isomorfe.