1 Giochi di Ehrenfeucht-Fraissé ed Espressività della Logica al Prim'Ordine

La corrispondenza fra semantica delle formule al prim'ordine e giochi ci permette di utilizzare questi ultimi per risolvere questioni di espressività:

Definizione 1. *Sia $\mathcal{C}$ una classe di grafi e $\mathcal{P}$ una proprietà applicabile a tale classe (identificata con il sottoinsieme dei grafi di $\mathcal{C}$ che la verificano). Diremo che $\mathcal{P}$ è esprimibile al prim'ordine su $\mathcal{C}$ (o che è una proprietà elementare) se esiste un enunciato ϕ del prim'ordine del inguaggio dei grafi $L = \{R, =\}$ tale che, per ogni $G \in \mathcal{C}$ valga:*

$$G \models \phi \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$$

Proposizione 2. *Siano $\mathcal{C}$ una classe di grafi e $\mathcal{P}$ una proprietà tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistano due grafi $G_n, H_n \in \mathcal{C}$ con le seguenti proprietà:*
- $G_n \in \mathcal{P}$, $H_n \notin \mathcal{P}$; -Dupliator ha una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht n passi fra G_n e H_n. Sotto queste ipotesi, la proprietà P non è esprimibile al prim'oridine.

Dimostrazione. Sia per assurdo ϕ un enunciato che esprime la proprietà $\mathcal{P}$, come nella definizione 1, sia $n = rg(\phi)$ e G_n, H_n i grafi corridspondenti. Dalla prima ipotesi segue allora che $G_n \models \phi$ e $H_n \not\models \phi$, contraddicendo la seconda. □

Esempio 3. La proprietà

$$\mathcal{P} = \text{ il dominio ha cardinalità pari}$$

non è esprimibile sulla classe $\mathcal{C}$ la classe degli ordini lineari finiti. Infatti, per ogni n, i grafi $G_n = L_k, H_n = L_h$ con cardinalità $k, h \geq 2^{n-1}$, k pari e h dispari, verificano le ipotesi della Proposizione 2.

Possiamo riformulare le condizioni di vincita del II giocatore in modo da utilizzare i giochi di Ehrenfeucht non solo nel caso dei grafi, ma anche nel caso di interpretazioni di un linguaggio L con un numero finito di relazioni e costanti. Date due strutture I, J per un tale linguaggio L, il gioco di Ehrenfeucht si gioca come sui grafi: Spoiler e Duplicator si alternano per n passi nella scelta di elementi del dominio delle due strutture. alla fine dei quali la partita

$$(a_0, b_0, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1})$$

è vinta da Duplicator se la corrispondenza $v_i \to v'_i$ fra le scelte fatte dai giocatori in I, J è un *isomorfismo locale* nel linguaggio L cioè:
-$v_i = v_j \Leftrightarrow v'_i = v'_j$;
- per ogni simbolo per costante c di L,

$$v_i = c^I \Leftrightarrow v'_i = c^J;$$

-per ogni simbolo relazionale k-ario r,

$$(v_{1_1}, \dots, v_{i_k}) \in r^I \Leftrightarrow (v'_{1_1}, \dots, v'_{i_k}) \in r^J.$$

Utilizzando una dimostrazione simile a quella vista nel caso dei grafi, possiamo allora dimostrare il seguente risultato:

Teorema 4. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ le condizioni sguenti sono equivalenti:*

1. *I e J verificano gli stessi enunciati di rango n di L;*
2. *Duplicator ha una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht di n passi fra I e J*

2 Esercizi

1. Dimostrare che se una proprietà $\mathcal{P}$ non è esprimibile al prim'ordine in una classe $\mathcal{C}$ di grafi, allora non è esprimibile in nessuna classe $\mathcal{C}' \supseteq \mathcal{C}$. Quindi la proprietà di avere un dominio di cardinalità pari non è esprimibile in alcuna classe che contenga gli ordini lineari. Trovare una classe $\mathcal{C}$ di grafi in cui tale proprietà è invece esprimibile.

2. Sia $\mathcal{C}$ la classe degli ordini lineari finiti. Dimostrare che una proprietà $\mathcal{P}$ è esprimibile al prim'ordine in $\mathcal{C}$ se e solo se $\mathcal{P}$ contiene un numero finito di ordini lineari finiti non isomorfi, oppure $\mathcal{C} \setminus \mathcal{P}$ contiene un numero finito di ordini lineari finiti non isomorfi.

3. Sia $L = \{r, p, =\}$, un linguaggio al prim'ordine con uguaglianza, dove r è un simbolo di relazionale binario e p un simbolo relazionale unario. Considera la formula
$$F = \exists x \forall y \; [r(x, y) \wedge \neg p(y) \rightarrow \neg r(y, y)],$$
e due interpretazioni I, J di L, la prima che soddisfa F, la seconda che non soddisfa F.

   Stabilisci il minimo numero di passi n per cui Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J e descrivi nei dettagli la strategia.

4. Rispondi alla stessa domanda dell'eserciizio precedente nel caso in cui la formula sia
$$\forall x \exists y \; [r(x, y) \wedge p(y) \wedge r(y, y)] \;\wedge\; \exists x \forall y \; [r(x, y) \wedge \neg p(y) \rightarrow \neg r(y, y)].$$

Gli esercizi dal 5 e 6 dimostrano come, nonostante il metodo dei giochi sia spesso difficile da applicare direttamente, sia possibile utilizzare delle riduzioni fra giochi che permettono di risolvere nuovi problemi.

5. Data una formula $\delta(x, y)$ con due variabili libere nel linguaggio $L = \{R, =\}$ ed una interpretazione $I = (A, E)$ (dove E è una relazione binaria su A), definiamo I^δ come la struttura $I^\delta = (A, \delta^A)$ con

$$\delta^A = \{(a, b) : (A, R) \models \delta(a, b)\}.$$

   a) Considerate la formula

   $$\delta_1(x, y) = xRy \vee (x = max \wedge y = min),$$

   dove $x = max$ sta per $\forall z \neg(xRz)$ e $y = min$ sta per $\forall z \neg(zRy)$.
   Dato l'ordine lineare finito $L_k = (\{0, \ldots, k-1\}, <)$, mostrare che la struttura $L_k^{\delta_1}$ è isomorfa al ciclo C_k di lunghezza k (ovvero, $C_k = (\{0, \ldots, k-1\}, E)$ dove $E = \{(0, 1), \ldots, (k-2, k-1), (k-1, 0)\}$.

   b) Considerare la formula

   $$\delta_2(x, y) = [\exists! z(xRz \wedge zRy) \vee [x = max \wedge (y = min)],$$

   dove, in logica con uguaglianza, il quantificatore $\exists! z\phi(z)$ sta per

   $$\exists z(\phi(z) \wedge \forall v(\phi(v) \rightarrow z = v)).$$

   Dimostrare che, dato l'ordine lineare finito $L_k = (\{0, \ldots, k-1\}, <)$, la struttura $L_k^{\delta_2}$ è isomorfa ad un cammino semplice di lunghezza $k-1$, se k è pari, mentre se $k = 2m+1$ è dispari, allora $L_k^{\delta_2}$ è isomorfa ad un cammino semplice di lunghezza $m-1$ unione disgiunta un ciclo di lunghezza $m+1$.

6. Questo esercizio utilizza le notazioni dell'esercizio precedente. Data una formula ϕ del linguaggio dei grafi, sia ϕ^δ la formula che si ottiene da ϕ sostituendo tutte le formule atomiche del tipo $R(x, y)$ con $\delta(x, y)$ (se necessario, rinominando le variabili legate di δ in modo che non coincidano con x o y).

   a) Dimostrare per induzione su ϕ la seguente equivalenza:

   $$(A, R)^\delta \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad (A, R) \models \phi^\delta(a_1, \ldots, a_n).$$

   b) Dimostrare che, se $qr(\delta) = k$ e $(A, R) \equiv_{n+k} (B, S)$, allora $(A, R)^\delta \equiv_n (B, S)^\delta$.

   c) Utilizzando il punto precedente e la formula δ_1 dell'esercizio 3, trovare una condizione sufficiente su m, k in modo che Duplicator vinca il gioco di n passi $EF_n(C_m, C_k)$.

   d) Considerando la formula δ_2 dell'esercizio precedente, dimostrare che la fondatezza o la connessione sono proprietà non esprimibili al prim'ordine sulla classe dei grafi finiti.