ESERCIZI SUI GIOCHI DI EHRENFEUCHT

(1) Sia $L = \{r\}$, dove r è una relazione ternaria. Sia I l'interpretazione che ha come dominio i numeri naturali e

$$r^I = \{(n, m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n + m = k\}.$$

Sia J l'interpretazione che ha come dominio i numeri interi e

$$r^J = \{(u, v, w) \in \mathbb{Z} \times Z \times \mathbb{Z} : u + v = w\}.$$

Dimostra che, per ogni $n \geq 1$ nel gioco di n passi fra I e J, se Spoiler sceglie lo zero in una delle due strutture, allora per vincere Duplicator deve rispondere con lo zero nell'altra struttura. Per quali numeri naturali n Duplicator ha una strategia vincente? E Spoiler?

(2) Sia $L = \{r\}$, dove r è una relazione binaria. Considera la formula

$$F = \forall x \forall y(\neg r(x, y) \wedge \neg r(y, x) \rightarrow \exists z(r(x, z) \wedge r(y, z))),$$

e due interpretazioni I, J tali che $I \models F$, $J \models \neg F$. Determina il numero minimo n per il quale Spoiler ha sempre una strategia vincente nel gioco di n passi fra I e J, e descrivi tale strategia.

(3) Data la formula

$$\phi = \forall x \forall y \forall z(xRy \wedge xRz \rightarrow yRz \vee zRy),$$

siano I, J due strutture di $L = \{R, =\}$ tali che $I \models \phi$ e $J \models \neg\phi$. Dimostra che Spoiler ha una strategia vincente nel gioco di tre passi fra I e J.

(4) Sia $L = \{<, =\}$ ed I, J due interpretazioni di L in cui $<^I, <^J$ sono ordini lineari densi privi di massimo e di minimo.

Dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $D(I, J, n)$ (cioè che Duplicator ha una strategia vincente per il gioco di Ehrenfeucht di lunghezza n fra I eJ).

Scrivi inoltre un insieme di enunciati Γ tale che i modelli di Γ siano tutte e sole le interpretazioni di Γ in cui $<$ è interpretato in un ordine lineare denso privo di massimo e minimo.

(5) Utilizzando l'esercizio precedente, dimostra che $(\mathbb{Q}, <)$ e $(\mathbb{R}, <)$ sono un esempio di due strutture che sono elementarmente equivalenti ma non sono isomorfe.

(6) Dimostra che se I, J sono due strutture del linguaggio $L = \{R, =\}$ con R simbolo per relazione binario, I è una struttura con dominio finito elementarmente equivalente a J, allora I, J sono isomorfe.

(7) Sia ϕ una formula della logica al prim'ordine su un linguaggio L. Dimostrare per induzione su ϕ che se h è un isomorfismo fra due interpretazioni I e J e σ è uno stato di I, allora, detto σ^h lo stato di J definito da $\sigma^h(x) = h(\sigma(x))$, vale:

$$I, \sigma \models \phi \Leftrightarrow J, \sigma^h \models \phi.$$

In particolare, se h è un isomorfismo da un' interpretazione I in sé stessa (cioè: un automorfismo), un elemento d del dominio soddisfa le stesse formule dell'elemento $h(d)$.
Dimostrare in particolare che se I è l'interpretazione di $L = \{<, =\}$ che ha come dominio $\mathbb{Z}$ e l'ordine usuale, allora ogni punto del dominio è *indistinguibile* rispetto alle formule cioè: per ogni formula ϕ con una variabile libera e per ogni d, d' del dominio vale:

$$I.\sigma[x/d] \models \phi \Leftrightarrow I, \sigma[x/d'] \models \phi.$$

Dimostrare che nell'interpretazione che ha dominio $\mathbb{N}$ e l'ordine usuale l'unico automorfismo è l'identità.