LEZIONI DI LOGICA MATEMATICA DEL 14 E 16 OTTOBRE 2008:LOGICA PROPOSIZIONALE

1. Il Teorema di Compattezza per la Logica Proposizionale

Sia $UNSAT$ l'insieme degli insiemi di clausole insoddisfacibili:

$$UNSAT = \{S : S \text{ è un insieme di clausole insoddisfacibile}\}.$$

Cerchiamo di capire meglio come sono fatti gli insiemi di clausole in $UNSAT$. Se, ad esempio, S contiene un insieme finito insoddisfacibile, allora $S \in UNSAT$. Vedremo che vale anche il viceversa: se un insieme di clausole è insoddisfacibile, allora appartiene ad $UNSAT$.

Per dimostrare questa proprietà, utilizzeremo la successione d'insiemi $(U_n)_{n\in N}$ definita induttivamente da:

$$U_0 = \{S : \square \in S\},$$

$$U_{n+1} = U_n \cup \{S : \text{ esiste un letterale } \ell \text{ che compare in } S \text{ tale che } S^\ell \in U_n, S^{\overline{\ell}} \in U_n\}.$$

Notiamo che:

$$S \in U_0 \Leftrightarrow \square \in S,$$
$$S \in U_1 \setminus U_0 \Leftrightarrow \square \notin S \text{ e } \exists \ell \quad \{\ell\} \in S \text{ e } \{\overline{\ell}\} \in S.$$

Lemma 1.1. *Ogni insieme di clausole $S \in U_n$ possiede un sottoinsieme finito insoddisfacibile,*

Dimostrazione. Per induzione su n. Ovvio per $n = 0$, perché se $S \in U_0$ allora $\square \in S$. Per il passo induttivo, sappiamo che

$$U_{n+1} = \{S : \exists \ell, S^\ell \in U_n, S^{\overline{\ell}} \in U_n\} \cup U_n.$$

Se $S \in U_{n+1}$ ci sono quindi due possibilità: la prima, in cui $S \in U_n$, ci assicura per induzione che S ha un sottoinsieme finito insoddisfacibile, la seconda, in cui esiste un letterale ℓ tale che $S^\ell \in U_n, S^{\overline{\ell}} \in U_n$. In quest'ultimo caso, sappiamo per induzione che esistono due sottoinsiemi finiti $F \subseteq S^\ell, G \subseteq S^{\overline{\ell}}$. Allora l'insieme

$$H = (F \cap S) \cup \{C \cup \{\overline{\ell}\} : C \in F \setminus S\} \cup (G \cap S) \cup \{C \cup \{\ell\} : C \in G \setminus S\}$$

è tale che $H^\ell \supseteq F$, $H^{\overline{\ell}} \supseteq G$; quindi H^ℓ e $H^{\overline{\ell}}$ sono insoddisfacibili e H è un sottoinsieme insoddisfacibile e finito di S. $\square$

Lemma 1.2. *Si ha*

$$UNSAT = \bigcup_{n\in N} U_n.$$

Dimostrazione. L'incusione di $\bigcup_{n\in N} U_n$ in $UNSAT$ segue dal precedente Lemma.

Per dimostrare l'inclusione inversa, cioè che

$$UNSAT \subseteq \bigcup_{n\in N} U_n,$$

mostriamo che se $S \notin \bigcup_{n\in N} U_n$, allora è soddisfacibile. Siano $\{P_1, P_2, \ldots\}$ le lettere proposizionali che compaiono in clausole di S (anche se negate). Definiamo per induzione una successione di letterali
$$\{\ell_1, \ell_2, \ldots\},$$
dove ℓ_i è P_i o $\neg P_i$, e tale che
$$(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\ell_n} \notin \bigcup_{n\in N} U_n,$$
per ogni n. Per scegliere il primo elemento della successione ℓ_1 fra P_1 e $\neg P_1$, mostriamo che l'ipotesi $S \notin \bigcup_{n\in N} U_n$ implica
$$S^{P_1} \notin \bigcup_{n\in N} U_n, \text{ oppure } S^{\neg P_1} \notin \bigcup_{n\in N} U_n.$$
Infatti, se per assurdo sia S^{P_1} che $S^{\neg P_1}$ appartenessero a tale unione, potremmo trovare un indice n tale che entrambi appartengano a U_n. Ma allora per definizione di U_{n+1} si avrebbe $S \in U_{n+1}$, e quindi $S \in \bigcup_{n\in N} U_n$, una contraddizione. Se $S^{P_1} \notin \bigcup_{n\in N} U_n$ definiamo $\ell_1 := P_1$, mentre se $S^{\neg P_1} \notin \bigcup_{n\in N} U_n$ definiamo $\ell_1 := \neg P_1$. Al k-esimo passo della costruzione della sequenza degli ℓ_i, abbiamo già definito $\ell_1, \ldots, \ell_k$ tali che
$$(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\ell_k} \notin \bigcup_{n\in N} U_n,$$
e vogliamo definire ℓ_{k+1} tale che
$$(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\ell_{k+1}} \notin \bigcup_{n\in N} U_n.$$
Considerando la variabile P_{k+1} e ragionando come sopra si avrà
$$(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{P_{k+1}} \notin \bigcup_{n\in N} U_n,$$
oppure
$$(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\neg P_{k+1}} \notin \bigcup_{n\in N} U_n;$$
nel primo caso poniamo $\ell_{k+1} = P_{k+1}$, nel secondo caso poniamo $\ell_{k+1} = \neg P_{k+1}$.

Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza di una successione di letterali
$$\{\ell_1, \ell_2, \ldots\},$$
dove ℓ_i è P_i o $\neg P_i$ tale che
$$(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\ell_n} \notin \bigcup_{n\in N} U_n,$$
per ogni n. Sia ora v la valutazione che rende veri tutti gli ℓ_i. Facciamo vedere che $v(S) = T$, e che quindi S è soddisfacibile. Altrimenti esisterebbe una clausola $C \in S$ con $v(C) = F$. Poiché C è un insieme finito di letterali, esiste un numero naturale n tale che ogni letterale in C è fra $\ell_1, \overline{\ell_1}, \ldots, \ell_n, \overline{\ell_n}$. Poiché $v(C) = F$, la clausola C non contiene nessuno dei letterali $\ell_1, \ldots, \ell_n$, quindi $C \setminus \{\overline{\ell_1}\} \in S^{\ell_1}, C \setminus \{\overline{\ell_1}, \overline{\ell_2}\} \in (S^{\ell_1})^{\ell_2}, \ldots$, e, infine,
$$C \setminus \{\overline{\ell_1}, \ldots, \overline{\ell_n}\} \in (((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\ell_n}.$$
Ma $C \setminus \{\overline{\ell_1}, \ldots, \overline{\ell_n}\} = \square$, e abbiamo così dimostrato che $(((S^{\ell_1})^{\ell_2})^{\cdots})^{\ell_n} \in U_0$, contrariamente alle proprietà della sequenza degli ℓ_i. $\square$

Teorema 1.3. *(Teorema di Compattezza,). Se un insieme di clausole è insoddisfacibile, esiste un suo sottoinsieme finito che è insoddisfacibile.*

Dimostrazione. Segue dai Lemmi 1.1,1.2. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema di completezza per il metodo di Risoluzione, anche nel caso infinito.

Teorema 1.4. *(Teorema di Completezza). Se un insieme di clausole S è insoddisfacibile, esiste un n tale che $\square \in Res^n(S)$.*

Dimostrazione. Se S è insoddisfacibile, per il Teorema di Compattezza esiste $S' \subseteq S$ finito e insoddisfacibile. Per il Teorema di Completezza nel caso finito, esiste n tale che $\square \in Res^n(S') \subseteq Res^n(S)$. $\square$