1. Logica con uguaglianza

Definitione 1.1. *Sia L un linguaggio contenente il simbolo predicativo binario $=$. Una interpretazione I di L si dice* normale *se*

$$=^I = \{(d,d) : d \in D^I\}$$

Definiamo la conseguenza lgica con uguaglianza restringendoci alle interpretazioni normali:

Definitione 1.2. *Sia Γ, F un insieme di formule del linguaggio L. Diremo che Γ ha conseguenza logica con uguaglianza F (in simboli $\Gamma \models_= F$) se, per ogni interpretazione normale I e stato σ su I, se $I, \sigma \models \Gamma$ allora $I, \sigma \models F$.*
Un enunciato F si dirà soddisfacibile nella logica con uguaglianza se esiste una interpretazione normale I tale che $I \models F$.

Notiamo che esistono enunciati soddisfacibili che non lo sono nella logica con uguaglianza; ad esempio l'enunciato

$$a = b \wedge p(a) \wedge \neg p(b)$$

ha come modello l'interpretazione non normale I con $D^I = \{0,1\}$, $a^I = 0$. $b^I = 1$. $p^I = \{0\}$ e $=^I = \{(0,1)\}$, mentre nessuna interpretazione normale lo soddisfa,

2. Riduzione della Logica con uguaglianza alla Logica

Dato L, si considera il seguente insieme di enunciati $Eq(L)$:

$\forall x(x = x)$;
$\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$
$\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$
un enunciato per ogni simbolo funzionale n-ario:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_i (x_i = y_i) \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n));$$

un enunciato per ogni simbolo relazionale n-ario:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_i (x_i = y_i) \rightarrow (p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow p(y_1, \ldots, y_n))).$$

Si ha:

Teorema 2.1. *Se I è un'interpretazione normale, allora $I \models Eq(L)$.*
Se $I \models Eq(L)$ allora esiste un'interpretazione normale J che rende veri esattamente gli stessi enunciati di I.

Dimostrazione. L'interpretazione J è il *quoziente* dell'interpretazione I rispetto alla relazione d'equivalenza $=^I$ (tale quoziente si denota anche con il simbolo $I/=^I$). In particolare:

$$D^J = \{[d] : d \in D^I\},$$

dove $[d]$ è la classe d'equivalenza dell'elemento d rispetto a $=^I$;
per ogni simbolo di costante c,

$$c^J = [c^I];$$

per ogni simbolo funzionale n-ario f si ha

$$f^j([d_1], \ldots, [d_n]) = [f^I(d_1, \ldots, d_n)];$$

per ogni simbolo predicativo n-ario p:

$$([d_1], \ldots, [d_n]) \in p^J \Leftrightarrow (d_1, \ldots, d_n) \in p^I.$$

Si noti che le interpretazioni dei simboli funzionale e relazionali sono ben poste perché $I \models Eq(L)$.

Dato uno stato σ su I, sia $\overline{\sigma}$ lo stato su J definito ponendo $\overline{\sigma}(x) = [\sigma(x)]$, per ogni variabile x. Si dimostra che, per ogni formula F del linguaggio L vale:

$$I, \sigma \models F \Leftrightarrow J, \overline{\sigma} \models F$$

(la dimostrazione è lasciata al lettore, vedi suggerimenti negli esercizi), da cui segue

$$I \models F \Leftrightarrow J \models F$$

se F è un enunciato. □

Ad esempio, si consideri l'interpretazione seguente: I con $D^I = \{0, 1\}$, $a^I = 0$. $b^I = 1$. $p^I = \{0, 1\}$ e $=^I= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. L'interpretazione I non è normale, ma verifica $Eq(L)$. Il quoziente J di I rispetto ad $=^I$ è l'interpretazione normale il cui dominio $D^J = \{d\}$ è dato da un unico elemento $d = [0] = [1]$, cioè l'unica classe d'equivalenza di $=^I$ in I. Inoltre:

$$a^J = [a^I] = [0] = d, \quad b^j = [b^I] = [1] = d, p^J = \{[0]\} = \{d\}.$$

3. Esercizi

(1) Data un'interpretazione normale I ed uno stato σ su I, sia $\overline{\sigma}$ lo stato sul quoziente J definito come nel Teorema :

$$\overline{\sigma}(x) = [\sigma(x)],$$

dove, se $d \in D^I$, denotiamo con $[d]$ la classe di d rispetto alla relazione d'equivalenza $=^I$. Si dimostri, per induzione sulla complessità strutturale del termine t che vale:

$$\overline{\sigma}(t) = [\sigma(t)].$$

(2) Dato uno stato σ su I, lo stato $\overline{\sigma}$ su J è definito ponendo $\overline{\sigma}(x) = [\sigma(x)]$, per ogni variabile x. Si dimostri che, per ogni formula F del linguaggio L vale:

$$I, \sigma \models F \Leftrightarrow J, \overline{\sigma} \models F$$

(suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente per dimostrare la base dell'induzione)