LOGICA PREDICATIVA

1. Ripasso da Elementi di Logica

1.1. **Sintassi della logica Predicativa.** (Per il materiale di questa Sezione, si veda il Cap. 5 delle dispense di El. di Logica del Prof. Marcone reperibili all'indirizzo http://www.dimi.uniud.it/ marcone/ElLogica.html)

Rivedere la definizione di linguaggio predicativo, termine, formula, variabili libere e legate.

1.2. **Semantica della Logica Predicativa.** (Cap. 6 di El. di Logica)

Rivedere la definizione di interpretazione I e di stato σ di un linguaggio predicativo, la definizione induttiva di $\sigma(t)$ se σ è uno stato e t un termine, la definizione di $\sigma[x/d]$. Rivedere la definizione induttiva di

$$I, \sigma \models F.$$

Lemma 1.1. *(Vedi Lemma 6.10 di El. di Logica)*
Sia F una formula del linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ e siano I, I' due interpretazioni di $\mathcal{L}$ che hanno lo stesso dominio e coincidono sui simboli di costanti, funzioni e relazioni che occorrono in F. Se inoltre σ e σ' sono stati rispettivamente di I e I' che coincidono sulle variabili libere di F. allora

$$I, \sigma \models F \qquad \Leftrightarrow \qquad I', \sigma' \models F.$$

1.3. **Sostituzioni libere di termini in formule.** I termini sono oggetti sintattici. Data però un'interpretazione I e uno stato σ, il termine t viene interpretato da I, σ come un oggetto del dominio dell'interpretazione, che indicheremo come $\sigma(t)$. La definizione di $\sigma(t)$ viene data induttivamente, a partire da costanti e variabili, che vengono interpretate rispettivamente con a^I e $\sigma(x)$, seguendo lea regola: $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n) = f^I(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Diremo anche che un elemento d del dominio di I è *denotato* dal termine t del linguaggio se $\sigma(t) = d$.

Rivedere la definizione di sostituzione di un termine t al posto di una variabile x nella formula F (notazione $F\{x/t\}$: la definizione formale è la 5.45 delle dispense di El. di Logica).
Nota bene: il termine t viene sostituito SOLO nelle occorrenze libere di x in F e non in quelle legate: ad esempio, se $F = \forall x r(x, y) \wedge p(x)$ e $t = f(a)$ allora

$$F\{x/t\} = \forall x r(x, y) \wedge p(f(a)).$$

Dato un termine t e una formula F di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$, il significato che vorremmo attribuire alla formula

$$F\{x/t\}$$

sotto una data interpretazione I e un dato stato σ è che la formula F vale sull'elemento del dominio denotato da t.

Come possiamo tradurre, dato un elemento del dominio d, l'affermazione
sotto una data interpretazione I e un dato stato σ è che la formula F vale sull'elemento d?

Non certo con $I, \sigma \models F(d)$, visto che $F(d)$ non è una formula, ma con $I, \sigma[x/d] \models F$.

Come tradurre formalmente l'affermazione:
sotto una data interpretazione I e un dato stato σ è che la formula F vale sull'elemento del dominio denotato da t?

Risposta: $I, \sigma[x/\sigma(t)] \models F$.

Quindi, ci aspettiamo che valga la seguente proprietà:

$$I, \sigma \models F\{x/t\} \qquad \Leftrightarrow \qquad I, \sigma[x/\sigma(t)] \models F.$$

L'equivalenza precedente non è però sempre verificata, se non imponiamo opportune restrizioni alle sostituzioni:

Esempio: se $F = \exists y r(x, y)$ e $t = y$ allora $F\{x/t\} = \exists y r(y, y)$. Si consideri allora l'interpretazione I dove

$$D^I = \mathbb{N}, \qquad r^I = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\},$$

e sia σ uno stato di I tale che $\sigma(y) = 0$. Abbiamo $I, \sigma[x/\sigma(t)] \models F$, perché esiste un numero naturale maggiore di zero, ma $I, \sigma \not\models F\{x/t\}$, perché nessun numero naturale è minore di sé stesso.

Il problema è che quando si considera l'elemento $\sigma(t)$ nella parte destra dell'equivalenza in considerazione, ogni variabile di t viene valutata rispetto a σ; nella parte sinistra, invece, è possibile che dopo la sostituzione $F\{x/t\}$ alcune variabili di t diventino variabili legate della formula $F\{x/t\}$ e, quando valutiamo la formula $F\{x/t\}$ rispetto a σ, il valore di queste variabili non dipenda più da σ.

Abbiamo allora bisogno di restringere le sostituzioni di termini in formule a quelle dove questo non accade: diremo che un termine t è libero per la sostituzione alla variabile x nella formula F se una volta effettuata la sostituzione, nessuna occorrenza di una variabile di t risulterà legata in $F\{x/t\}$. Ad esempio:

se $F = \forall y r(x, y) \wedge p(x)$, il termine $t = y$ non è libero per la sostituzione perché la variabile y di t diventa legata in $F\{x/t\} = \forall y r(y, y) \wedge p(y)$; il termine $t = g(x, z)$ è invece libero per la sostituzione ad x in F.

Più formalmente abbiamo:

Definitione 1.1. *Se t è un termine e F una formula, t si dice libero per la sostituzione in F se:*
F è atomica, oppure
$F = \neg G$ e t è libera per la sostituzione ad x in G, oppure
$F = G \circ H$ e t è libera per la sostituzione ad x in G e in H per $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ oppure
$F = \forall y G$ o $F = \exists y G$, $x \neq y$, t non contiene y e t è libera in G oppure
$F = \forall x G$ (in questo caso non vi sono occorrenze libere di x in F, e non viene in ogni caso effettuata alcuna sostituzione...).

Notiamo che dalla definizione segue che se t è un termine chiuso (cioè, che non contiene variabili) oppure t è un termine che contiene la sola variabile x, allora t è sempre libero per la sostituzione ad x in F.

Vale il Lemma di Sostituzione seguente:

Lemma 1.2. *Se t è libero per la sostituzione ad x in F, si ha*

$$I, \sigma \models F\{x/t\} \qquad \Leftrightarrow \qquad I, \sigma[x/\sigma(t)] \models F.$$

La seguente proprietà può cadere senza l'ipotesi che t sia libero per la sostituzione:

Lemma 1.3. *Se t è libero per la sostituzione ad x in F, si ha*

$$I, \sigma \models \forall x F \quad \Rightarrow \quad I, \sigma \models F\{x/t\};$$

$$I, \sigma \models F\{x/t\} \quad \Rightarrow \quad I, \sigma \models \exists x F.$$

2. Forma Prenessa

Una formula G della logica predicativa si dice in forma prenessa se è della forma

$$G = Qx_1 \dots Qx_n H,$$

dove $Q \in \{\forall, \exists\}$ e H è una formula priva di quantificatori.

Lemma 2.1. *Ogni formula della logica predicativa è semanticamente equivalente ad una formula in forma prenessa*

Dimostrazione. È sufficiente applicare alle sottoformule della formula data le seguenti equivalenze, che, a condizione che x non sia libero nella formula G, risultano tutte valide:

$$QxF \circ G \equiv Qx(F \circ G), \qquad \neg QxF \equiv \overline{Q}x\neg F,$$

$$QxF \to G \equiv \overline{Q}x(F \to G), \quad G \to QxF \equiv Qx(G \to F),$$

per $Q \in \{\forall, \exists\}, \circ \in \{\wedge, \vee\}$; $\overline{\exists} = \forall$, $\overline{\forall} = \exists$;

Dimostriamo, a titolo d'esempio, l'equivalenza $\forall xF \vee G \equiv \forall x(F \vee G)$. Sia I, σ un'interpretazione, stato tale che $I, \sigma \models \forall xF \vee G$. Si hanno quindi due casi:

(1) nel primo caso, per ogni $d \in D^I$ si ha $I, \sigma[x, |d] \models F$, quindi anche $I, \sigma[x|d] \models F \vee G$ e $I, \sigma \models \forall x(F \vee G)$;
(2) nel secondo caso $I, \sigma \models G$. In questo caso, poiché x non è libera in G si ha anche $I, \sigma[x|d] \models G$ per ogni $d \in D^I$. Ne segue $I, \sigma[x|d] \models F \vee G$ e quindi $I, \sigma \models \forall x(F \vee G)$.

Viceversa, se $I, \sigma \models \forall x(F \vee G)$. abbiamo che $I, \sigma[x|d] \models F \vee G$, per ogni $d \in D^I$. Se vale $I, \sigma[x|d] \models G$ per almeno un $d \in D^I$, allora anche $I, \sigma \models G$ (x non libera in G) e quindi anche $I, \sigma \models \forall xF \vee G$. Altrimenti, $I, \sigma[x|d] \models F$ per ogni $d \in D^I$ e quindi $I, \sigma \models \forall xF$, da cui si ha $I, \sigma \models \forall xF \vee G$. □

Se x è libera in G, si può trasformare preventivamente la formula da trasformare aiutandosi con le equivalenze

$$QxF \equiv QyF\{x|y\},$$

dove y è libera per la sostituzione ad x in F.

A titolo d'esempio, trasformiamo in forma prenessa la formula

$$\forall x(\exists yp(x, y) \to \exists z\forall sq(z, x, fs)) \wedge p(z, x).$$

Si ha:

$$\begin{gathered}
\forall x(\exists yp(x, y) \to \exists z\forall sq(z, x, fs)) \wedge p(z, x) \equiv \\
\forall u(\exists yp(u, y) \to \exists z\forall sq(z, u, fs)) \wedge p(z, x) \equiv \\
\forall u((\exists yp(u, y) \to \exists z\forall sq(z, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u(\forall y(p(u, y) \to \exists z\forall sq(z, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u\forall y((p(u, y) \to \exists z\forall sq(z, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u\forall y(\exists z(p(u, y) \to \forall sq(z, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u\forall y(\exists w(p(u, y) \to \forall sq(w, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u\forall y\exists w((p(u, y) \to \forall sq(w, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u\forall y\exists w(\forall s(p(u, y) \to q(w, u, fs)) \wedge p(z, x)) \equiv \\
\forall u\forall y\exists w\forall s((p(u, y) \to q(w, u, fs)) \wedge p(z, x)).
\end{gathered}$$

ESERCIZI

(1) Dimostrare il Lemma 1.3 utilizzando il Lemma di sostituzione 1.2. Trovare dei controesempi al Lemma 1.3 nel caso venga a cadere l'ipotesi sulla sostituzione di t in F.

(2) Mettere in Forma Prenessa la formula seguente:

$$\forall x(\exists y p(y, fx) \to \neg\forall z(q(z) \vee p(x, fz)))$$

(3) Dimostrare che $\forall x\exists y(A \circ B)$ è logicamente equivalente a $\exists y\forall x(A \circ B)$, se x non è libera in B, y non è libera in A e $\circ \in \{\vee, \wedge, \to\}$.

L'equivalenza vale se non facciamo ipotesi su A, B?

(4) Dimostrare che una formula del tipo $\exists xF$ è equisoddisfacibile alla formula $F\{x|c\}$, dove la costante c non compare in F.

Le due formule sono anche logicamente equivalenti?

(5) (*) Sia $L = \{a, f, p\}$ dove a è una costante, f è un simbolo funzionale unario e p un simbolo relazionale binario.

Considera l'interpretazione I così definita: $D^I = T_c$ (l'insieme dei termini chiusi di L), $a^I = a$, $f^I(t) = t$ per ogni $t \in T_c$, $r^I = \{(t, ft) : t \in T_c\}$.

i) Dato il termine chiuso t, chi è t^I?

ii) Quali elementi del dominio sono denotati da termini chiusi?

iii) È vero che $I \models \forall x r(x, fx)$?