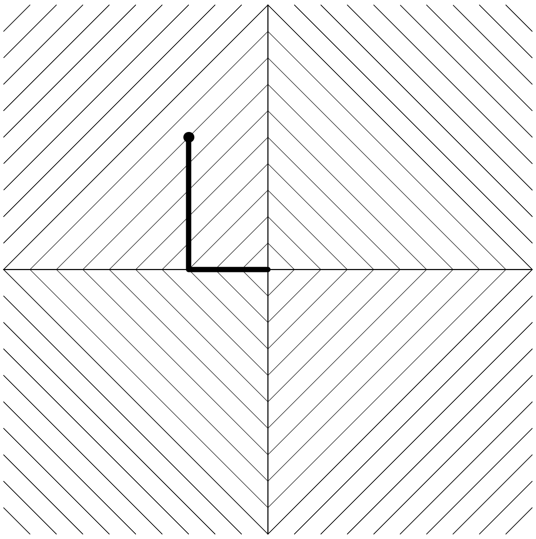
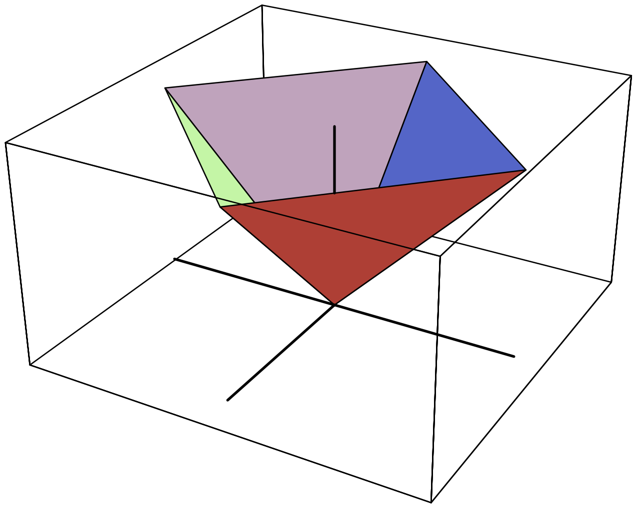
Norme nel Piano

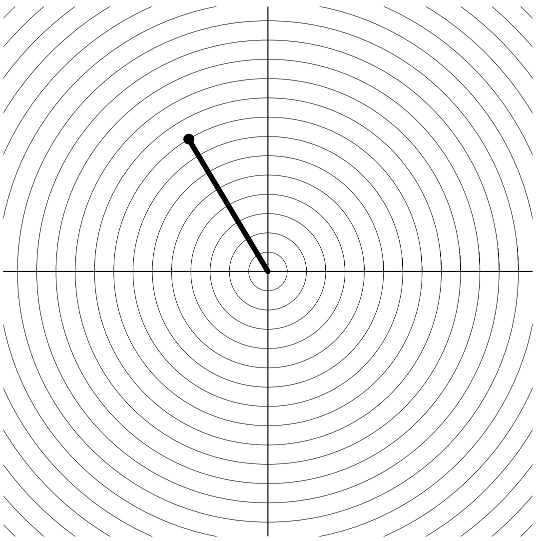


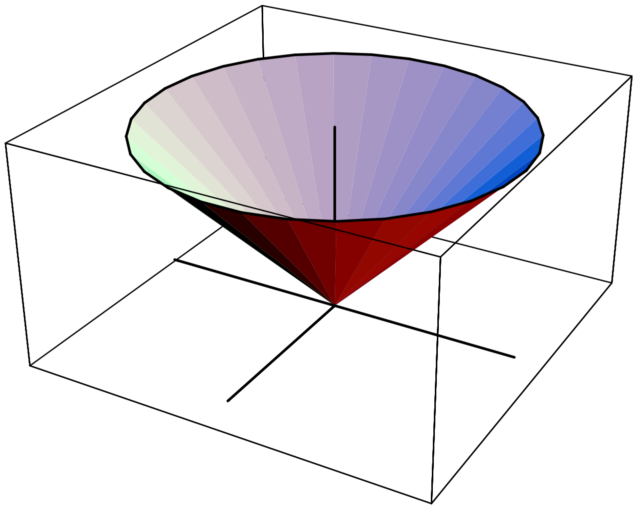


Data la norma in $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\|(x,y)\|_1 := |x| + |y| \qquad \text{per } x, y \in \mathbb{R}\,,$$

la figura in alto a sinistra mostra gli insiemi di livello e la figura a destra un grafico tridimensionale. La distanza di un punto (x, y) dall'origine è la somma delle distanze (classiche, prese in perpendicolare) del punto dai due assi cartesiani. Agli abitanti di città come Manhattan, disegnate a griglia ortogonale, capita di dover calcolare le distanze in questo modo.

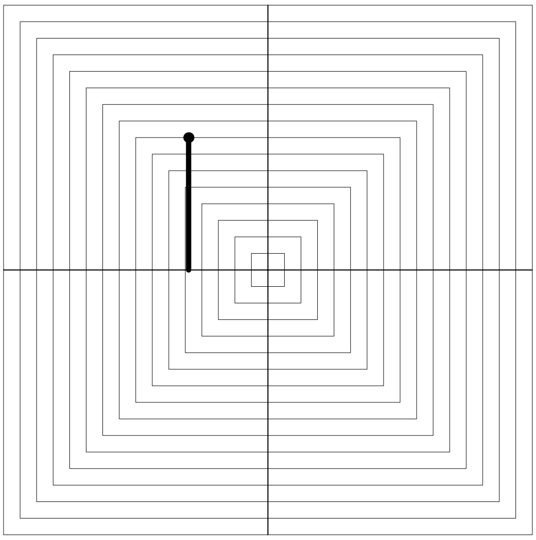


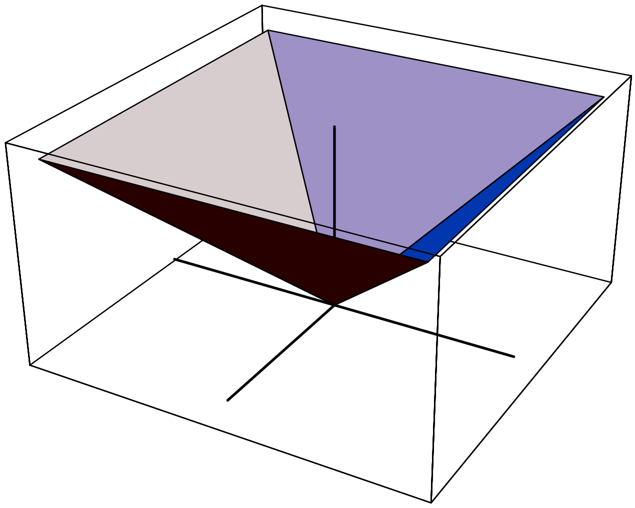


Le seconde due figure sono le curve di livello e il grafico tridimensionale della classica norma euclidea nel piano

$$\|(x,y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{per } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Si tratta della distanza "in linea d'aria". Andrebbe bene in un deserto completamente piatto, in cui tutte le direzioni fossero ugualmente faticose.





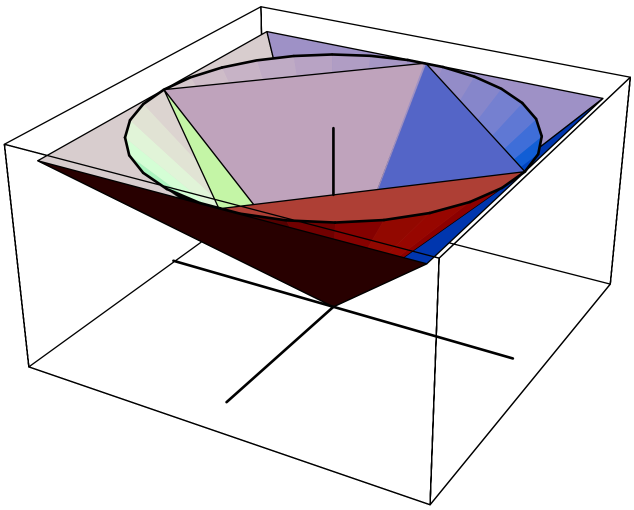
Qui sopra è illustrata la terza norma più usata in $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|,|y|\} \qquad \text{per } x,y \in \mathbb{R}\,.$$

Bisogna arrampicarsi su uno specchio per trovare un situazione in cui questa terza norma possa significare qualcosa. Per esempio si potrebbe pensare a un osservatore che non possa muoversi che sui due assi. Allora la norma di un punto è la distanza che deve fare l'osservatore per avvicinarsi il più possibile al punto, tenendosi sugli assi.

I grafici tridimensionali delle tre norme, quando sovrapposti, illustrano le disuguaglianze

$$\|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_1\,,$$



la prima delle quali è ovvia, mentre la seconda riflette il teorema euclideo secondo cui la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Altre disuguaglianze importanti sono

$$\|(x,y)\|_1 \le \sqrt{2}\|(x,y)\|_2 \le 2\|(x,y)\|_\infty\,.$$

La prima deriva interpretando $|x|+|y|$ come il prodotto scalare canonico fra $(|x|,|y|)$ e $(1,1)$ e applicando la disuguaglianza di Schwarz; per la seconda, se $|x| \ge |y|$ si ha

$$\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}|x|\,,$$

e basta osservare che il primo membro è la norma $\|(x,y)\|_2$ mentre l'ultimo è $\sqrt{2}\|(x,y)\|_\infty$. Se $|x| \le |y|$ i conti sono analoghi.

Esercizio. Le norme e le seminorme sono funzioni convesse, cioè $\|\theta x + (1-\theta)y\| \le \theta\|x\| + (1-\theta)\|y\|$ se $x,y \in X$, $\theta \in [0,1]$.

Esercizio. Sia X uno spazio vettoriale reale. La somma e il massimo di due seminorme su X sono ancora seminorme su X. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ è lineare, allora $x \mapsto |f(x)|$ è una seminorma. Se $A\colon X \to Y$ è lineare e $v \mapsto \|v\|$ è una norma su Y, allora $x \mapsto \|Ax\|$ è una seminorma su X, ed è una norma se e solo se A è iniettiva.

Esercizio. La funzione $(x,y) \mapsto \max\{|x+y|, |x-y|\}$ è una seminorma o una norma su $\mathbb{R}^2$? Che disuguaglianze la legano alle norme $\|v\|_1$, $\|v\|_2$, $\|v\|_\infty$?

Esercizio. Data una seminorma $\|\cdot\|$ e un $c>0$ l'insieme di livello $\{x \in X \ : \ \|x\| = c\}$ è simmetrico rispetto all'origine (cioè x gli appartiene se e solo se $-x$ gli appartiene). Gli insiemi di livello c_1 e c_2 sono omotetici fra loro.

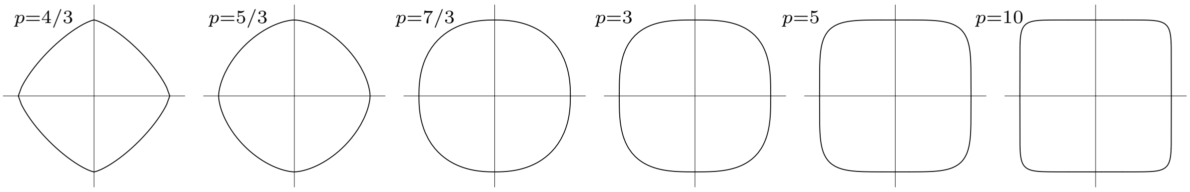
Esercizio. La funzione $(x,y) \mapsto \max\{x+y,\, y-x,\, -y\}$ è una norma in $\mathbb{R}^2$? Come sono i suoi insiemi di livello? Più in generale, se $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono lineari, la funzione $(x,y) \mapsto \max\{f(x,y), g(x,y)\}$ può essere una seminorma (quando?) ma mai una norma. Esiste una norma sul piano i cui insiemi di livello siano triangoli, oppure pentagoni, esagoni, poligoni regolari di n lati?

Esercizio. La funzione $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+2y^2}$ è una norma su $\mathbb{R}^2$? Come sono i suoi insiemi di livello? Esistono norme nel piano i cui insiemi di livello siano parabole, o iperboli?

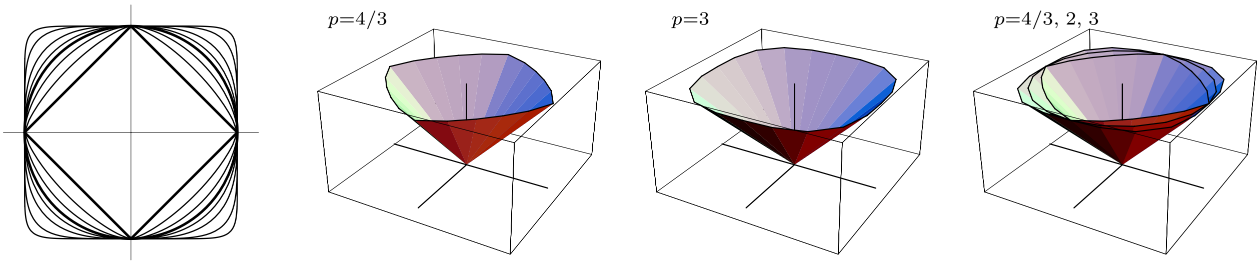
Esercizio. Sia $1 \le p < +\infty$ e consideriamo la funzione

$$(x,y) \mapsto \big\|(x,y)\big\|_p := \big(|x|^p + |y|^p\big)^{1/p} \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Dimostrare che è una funzione convessa. (Suggerimento: dati $u, v \in \mathbb{R}^2$ calcolare la derivata prima e la derivata seconda seconda rispetto a $t \in \mathbb{R}$, dove esistono, di $t \mapsto \|tu + (1-t)v\|_p$ e applicare i criteri noti di convessità in termini di comportamento delle derivate). Dimostrare poi che $v \mapsto \|v\|_p$ è una norma. (Suggerimento: per la disuguaglianza triangolare, usare la disuguaglianza di convessità con $\theta = 1/2$). Le figure seguenti mostrano l'insieme di livello $\{v \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|v\|_p = 1\}$ per alcuni valori di p.



Segue una figura che sovrappone gli insiemi di livello $\{v \ : \ \|v\|_p = 1\}$ per diversi valori di p, mettendo in grassetto i casi speciali $p=1$ e $p=2$, e poi dei grafici tridimensionali di $v \mapsto \|v\|_p$ per due valori di p uno minore e uno maggiore di 2, dapprima separatamente e poi confrontati con il valore $p=2$, che risulta intermedio.



Dimostrare che, per $v \in \mathbb{R}^2$ fissato, la funzione $p \mapsto \|v\|_p$ è debolmente decrescente da $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$, ed è strettamente decrescente se v non è su uno dei due assi cartesiani (nel qual caso risulta costante). Come mai allora la norma $\|v\|_p$ decresce mentre invece gli insiemi di livello si ingrandiscono? Dimostrare che

$$\lim_{p \to +\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty \qquad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^2 .$$

Questo fatto rende ragione dell'altrimenti misterioso simbolo $\|v\|_\infty$.

Esercizio. La formula che definisce $\|v\|_p$ ha senso anche quando $0 < p < 1$. In tal caso è una norma? (Suggerimento: provare la disuguaglianza triangolare su $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$). Come sono gli insiemi di livello? E il limite per $p \to 0^+$?

Esercizio. Il piano $\mathbb{R}^2$ può essere pensato anche come uno spazio vettoriale di dimensione 1 sul campo dei complessi. Dimostrare che le uniche norme di spazio vettoriale complesso nel piano sono del tipo $z \mapsto \alpha\|z\|_2$ con $\alpha > 0$ costante.