Induzione

In una storia di fantascienza noi umani riceviamo un messaggio misterioso da intelligenze aliene. Forse la conversazione fra di loro languisce, ed hanno pensato di invitare al loro salotto il primo pianeta sconosciuto con cui ci si intenda. Ma su che base due intelligenze prese a caso nell'universo possono mai sperare di sintonizzarsi? Che cosa c'è nell'intersezione, nel nocciolo di tutte le intelligenze possibili? Che cosa prendere come stele di Rosetta cosmica? Finalmente il colpo di genio: il messaggio è una versione extraterrestre degli assiomi di Peano.

Il secolo scorso ha visto un formidabile sforzo di ridurre la quantità di postulati occorrenti all'analisi matematica. Si sono ricondotti i numeri reali ai numeri razionali, e questi a loro volta agli interi. Giuseppe Peano (1858–1932) ha dato infine un'elegante sistemazione ai numeri naturali.

L'idea è di pensare l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad \dots$$

come una catena di perline, legate fra loro da frecce:

$$\bigcirc \longrightarrow \bigcirc \longrightarrow \bigcirc \longrightarrow \bigcirc \longrightarrow \bigcirc \longrightarrow \cdots$$

I postulati descrivono la catena:

i) *c'è esattamente una perlina (che chiameremo "la prima"), a cui non arriva alcuna freccia;*
ii) *a tutte le perline, esclusa la prima, arriva una e una sola freccia (non ci sono diramazioni verso sinistra);*
iii) *da tutte le perline parte una e una sola freccia (non ci sono ramificazioni verso destra).*

Abbiamo già infinite perline! Qualcuno riesce a figurarsene un numero finito che rispetti i tre postulati? Se però ci illudiamo di cavarcela così a buon mercato, proviamo a pensare ad una catena sconnessa, fatta di una sottocatena simile ad $\mathbb{N}$ più un pezzo separato in forma di collana, con le frecce che girano, ad esempio, in senso orario. Ci vuole un postulato di *connessione*.

I primi tre riguardano le relazioni di ciascuna perlina con quelle immediatamente vicine. La connessione o sconnessione è una proprietà della catena nel suo complesso. L'assioma mancante sarà per forza qualitativamente diverso dai precedenti. Una soluzione non è difficile se ci si accontenta di un linguaggio impreciso:

iv$_1$) *ogni perlina si può raggiungere dalla prima in un numero finito di passi (per passo si intende il seguire una freccia).*

Negli assiomi bisogna che compaiano solo i concetti di perline, frecce e insiemi, e numeri ben precisi, come uno, due, tre, ma non un concetto generico come "numero finito", che sembra portarci in un circolo vizioso, giacché i numeri finiti sono proprio quello che vorremmo descrivere. Ma c'è una via d'uscita.

Sia A l'insieme delle perline raggiungibili dalla prima in un "numero finito" di passi. È ragionevole che valgano le due proprietà seguenti:

1. *la prima perlina appartiene ad A;*
2. *ogniqualvolta una perlina è in A, anche la sua successiva è in A.*

Nelle due proprietà non si menziona alcun numero generico. Torniamo per un attimo alla catena sconnessa immaginata prima. L'insieme A corrisponde alla sottocatena delle perline legate alla prima, ed esclude quindi la collana. Però le proprietà valgono anche se si prende come A la catena complessiva, quindi da sole non rendono bene l'idea di raggiungibilità in un numero finito di passi.

Ciò che non va nella catena in due pezzi è questo: ci sono *due* sottinsiemi *diversi* che godono delle proprietà 1 e 2! L'assioma definitivo si può scrivere così:

iv$_2$) *fra tutti i sottinsiemi della catena, l'insieme di tutte le perline è l'unico a godere delle proprietà 1 e 2.*

Altrimenti detto:

iv$_3$) *se A è un sottinsieme della catena e gode delle proprietà 1 e 2, allora A coincide con tutta la catena.*

Esercizio. Consideriamo la catena sconnessa fatta di $\mathbb{N}$ più $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Valgono gli assiomi di Peano?

Esercizio. Un sottinsieme A che goda della proprietà 2 è detto "induttivo" o "ereditario". In $\mathbb{N}$ gli insiemi induttivi sono il vuoto e le semirette. Quali sono nel caso dell'esercizio precedente? E nel caso di $\mathbb{N}$ più la collana? Dimostrare poi che l'intersezione fra due insiemi induttivi è ancora induttiva.

Esercizio. Supponiamo di avere una catena in cui valgono i primi tre assiomi. Vorremmo esprimere l'idea che una perlina "segue" (o "precede") un'altra, nel senso intuitivo che si può raggiungere dall'altra (o viceversa) seguendo un numero finito (eventualmente nullo) di frecce. Meditare su questa proposta:

- *si dice "m precede n" se n appartiene ad ogni insieme induttivo che contenga m.*

Che cosa accade nei vari esempi di catene che abbiamo introdotto?

*** Esercizio.** Dimostrare che in $\mathbb{N}$, dati due numeri qualsiasi, uno dei due precede sempre l'altro.
Suggerimento: fissiamo n e consideriamo $A=\{m \mid m \text{ precede o segue } n\}$. Valgono le proprietà 1 e 2?

*** Esercizio.** Dimostrare che l'assioma iv equivale al seguente:
iv$_4$) *ogni sottinsieme S non vuoto della catena ha un elemento che precede tutti gli altri ("elemento minimo").*

Suggerimento: dapprima $\neg\text{iv}_2 \Rightarrow \neg\text{iv}_4$: sia A un sottinsieme proprio di $\mathbb{N}$ per cui valgano 1 e 2. Considerare $S=\mathbb{N}\setminus A$. Poi $\neg\text{iv}_4 \Rightarrow \neg\text{iv}_2$: sia S un sottinsieme non vuoto e senza elemento minimo. Poniamo $S'=\{n \mid n \text{ segue almeno un elemento di } S\}$ e sia $A=\mathbb{N}\setminus S'$. Per A valgono la 1 e la 2?

Sull'assioma iv si basa il *principio di induzione*, uno dei metodi fondamentali di dimostrazione in matematica. Supponiamo di avere una proposizione $P(n)$ che ha senso per ogni numero naturale n, e vogliamo dimostrare che in realtà è vera per ogni n. Se indichiamo con A l'insieme degli n per i quali è vera, basterà mostrare che per A valgono le proprietà 1 e 2. In altre parole:

> *Sia $P(n)$ una proposizione riguardante il numero naturale generico n. Supponiamo di avere dimostrato che:*
> a. $P(1)$ *è vera;*
> b. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
>
> *Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ è vera.*

Vediamo per disteso un esempio semplice ed importante.

Il grande matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) aveva iniziato la sua carriera come bambino prodigio. Era stato ammesso a scuola in una classe con bambini molto più grandi di lui. Un giorno il compito in classe consisteva nel trovare, entro un certo tempo, la somma dei primi cento numeri naturali:

$$1+2+3+4+\quad\cdots\quad+97+98+99+100\,.$$

Il risultato andava scritto sulla lavagnetta di ciascuno e questa consegnata capovolta sulla cattedra. Il giovane Gauss scrive subito il risultato e consegna. Sarà anche l'unico a dare la risposta giusta. Come ha fatto?
Il trucco sta nel non cominciare a sommare da sinistra a destra, ma di formare coppie primo–ultimo, secondo–penultimo, terzo–terzultimo ... Quanto fa la somma di ciascuna delle coppie? La prima fa 101, la seconda anche, la terza pure ... Quante sono le coppie? Cinquanta. Dunque il risultato è $101\times50=101\times100/2=10100/2=5050$.

Il ragionamento nel caso dei primi cento numeri si estende di slancio alla somma dei primi n, se n è pari:

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad \frac{n}{2} \quad \frac{n}{2}+1 \quad \cdots \quad n-1 \quad n\,.$$

La somma di ciascuna coppia equidistante dagli estremi è $n+1$, le coppie sono $n/2$ e il conto è presto fatto:

$$\boxed{1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}\,.$$

Per n dispari la formula è la stessa, anche se ci si arriva in modo diverso: o si procede come prima, sommando però a parte il numero spaiato centrale, oppure si applica la formula al numero pari $n-1$ e poi si aggiunge n. Provare per esercizio.

Vogliamo ora usare l'induzione per ridimostrare la formula. Poniamo

$$P(n) = \text{“}\, 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \,\text{”}.$$

Certamente il principio di induzione è vero, giacché sappiamo già che $P(n)$ è vera per ogni n. Ma questo non garantisce che l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ sia dimostrabile in modo meccanico (così come l'unico modo per dimostrare che l'implicazione "4 è pari" $\Rightarrow$ "Roma è nel Lazio" è di constatare separatamente il fatto fortuito che le due proposizioni sono vere). Fortunatamente $P(n)$ e $P(n+1)$ sono intimamente legate e c'è qualche speranza.
Facciamo dunque finta di non sapere che $P(n)$ è vera sempre. Verifichiamo le due proprietà. La prima è facillima: "$1 = 1 \times 2/2$". Per la 2, $P(n)$ è scritta sopra, mentre $P(n+1)$ è

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+n} + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,.$$

Supponiamo che sia vera $P(n)$. Allora alla somma racchiusa nella grafa si può sostituire $n(n+1)/2$. Sostituiamo questo valore e otteniamo una identità, che è certamente vera:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,.$$

Abbiamo provato che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. È bene ribadire che $P(n)$ è assunta vera non affermativamente, ma solo come ipotesi di lavoro, giacché ciò che interessa sul momento è la verità dell'*implicazione*. Alla fine, la a. e la b. *insieme* danno che $P(n)$ è vera sempre.

Le proposizioni che verificano $\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ sono dette *induttive*. Una P induttiva o è sempre falsa, oppure è vera su una semiretta.

Esercizio. Trovare diversi valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ per i quali è induttiva la proposizione

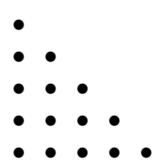
$$1+2+3+\cdots+n = an^2 + bn + c\,.$$

Per quali valori è vera?
Lo stesso per

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d\,.$$

Qualcuno intravvede una vaga generalizzazione?

Esercizio. I numeri della forma $1+2+3+\cdots+n$ sono detti triangolari, perché si possono disporre in un triangolo che è "metà" di un quadrato di lato n (quando si passa da n a $n+1$ si aggiunge una diagonale di $n+1$ punti):

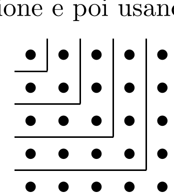


Questa visualizzazione suggerisce una scorciatoia per la formula $n(n+1)/2$? Che nome sarebbe acconcio ai numeri della forma $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$?

Esercizio. La somma dei primi n numeri dispari

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$$

è uguale ad n^2. Dimostrarlo prima per induzione e poi usando la figura



Che dire delle somme dei numeri *pari*?

Esercizio. Dimostrare che

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1\,.$$

La formula si può interpretare scrivendo la rappresentazione binaria dei numeri della somma.
Più in generale dimostrare l'importante formula (che è alla base della teoria delle *serie geometriche*):

$$\boxed{a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}\,,$$

dove $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Oltre che per induzione, ci si può arrivare ponendo il primo membro uguale a x e moltiplicando per a:

$$ax = a(a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n) = \underbrace{a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^n}_{x-a^0} + a^{n+1} =$$

$$= x - a^0 + a^{n+1} = x - 1 + a^{n+1}\,.$$

Dal primo e dall'ultimo membro si ricava x.