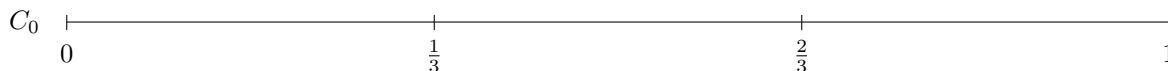


# L'Insieme di Cantor e la Curva di Peano

## 1. L'insieme di Cantor

Consideriamo l'intervallo  $[0, 1]$  di  $\mathbb{R}$  e chiamiamolo  $C_0$ :



Tagliamo  $C_0$  in tre parti uguali e gettiamo via il segmento di mezzo, lasciando però gli estremi. Rimaniamo con l'insieme  $C_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ :



Con ognuno dei due segmenti rimasti ripetiamo in scala il procedimento: divisione in tre parti uguali e scarto di quella di mezzo, tenendo gli estremi. Si ricava  $C_2 := [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ :



Spezziamo e scartiamo senza mai più stancarci, producendo una successione di insiemi:



Notare che le due metà, sinistra e destra, di  $C_{n+1}$  sono copie esatte, ridotte di un terzo, di  $C_n$ . Questo può aiutare l'intuizione: guardare  $C_{n+1}$  con una lente che ingrandisce tre volte è lo stesso che guardare  $C_n$  ad occhio nudo.

L'intersezione di tutti i  $C_n$

$$\text{insieme di Cantor} := \mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

è stata introdotta da Georg CANTOR (1845–1918).

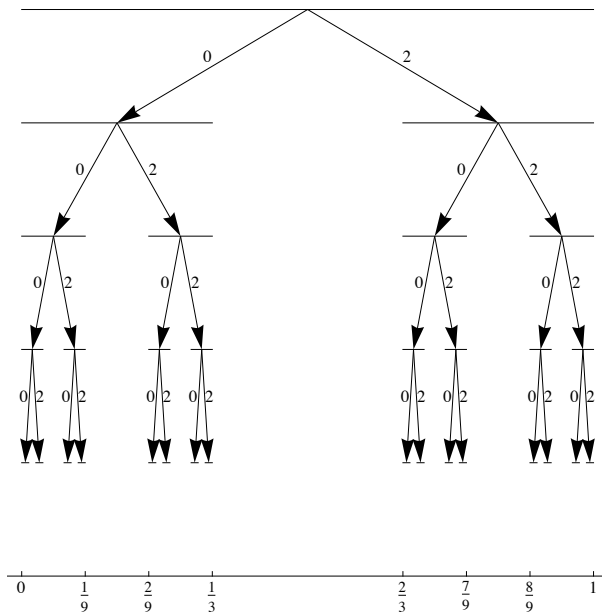
Tutti i  $C_n$  sono chiusi in  $\mathbb{R}$ , perché unione di un numero finito di intervalli chiusi. Quindi anche  $\mathcal{C}$  è chiuso, perché intersezione di una famiglia di insiemi chiusi. Gli insiemi  $C_n$  sono poi anche inscatolati:  $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$  e diventano via via più piccoli al crescere di  $n$ . Non potrebbe succedere che  $\mathcal{C}$  fosse vuoto? No, perché ad esempio i punti 0 e 1 appartengono a tutti i  $C_n$  e quindi anche all'intersezione. Più in generale, gli estremi di uno qualsiasi degli intervallini di cui è composto  $C_n$  non verranno mai tolti dai passaggi successivi. Ogni volta poi il numero di estremi raddoppia (dimostrarlo per induzione). Quindi  $\mathcal{C}$  contiene almeno l'insieme numerabile di tutti tali estremi. Ma non è finita qui.

Scegliamo a piacimento uno dei due pezzi di cui è composto  $C_1$  e prendiamo nota della scelta nel modo seguente:

$$a_1 := \begin{cases} 0 & \text{se è quello di sinistra,} \\ 2 & \text{se è quello di destra.} \end{cases}$$

(Il perché di 0 e 2 sarà più chiaro nel seguito, ma non è già ora completamente irragionevole se si pensa che il numero 1 corrisponde al segmento di mezzo che è stato scartato). Ora concentriamoci sul segmentino preferito e in  $C_2$  scegliamo una delle due parti che ne sopravvivono. Scriviamo

$$a_2 := \begin{cases} 0 & \text{se è quella di sinistra,} \\ 2 & \text{se è quella di destra.} \end{cases}$$



E continuiamo così: ad ogni passaggio ci restringiamo nel terzo di sinistra (scrivendo 0) oppure nel terzo di destra (scrivendo 2). In qualunque modo facciamo le infinite scelte, otteniamo:

a. una successione di scelte fra sinistra e destra, che codifichiamo come una applicazione  $a: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2\}$ ;

b. una successione di intervalli inclusi (il successivo è incluso nel precedente) e chiusi (perché gli estremi non vengono mai scartati). Per un noto teorema esiste almeno un punto in comune a tutti questi intervalli. Poiché l'ampiezza dell'intervallino al passo  $n$  è  $3^{-n}$ , l'intersezione contiene *uno e un solo punto*.

Abbiamo dunque definito una applicazione  $T$  avente per dominio l'insieme  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  delle successioni di scelte e codominio l'insieme  $\mathcal{C}$  di Cantor. L'applicazione è *iniettiva*. Infatti se due successioni  $a, b$  sono diverse, esiste (per definizione di diversità) almeno un  $n$  tale che  $a_n \neq b_n$ .

Prendiamo *il più piccolo* fra tali  $n$ . Allora le successioni  $a$  e  $b$  ci conducono al passo  $n$ -esimo a scegliere due sottointervalli *disgiunti* dello stesso intervallino. Il punto di  $\mathcal{C}$  individuato da  $a$  appartiene ad uno dei sottointervalli, mentre quello individuato da  $b$  sta nell'altro. I due punti non possono quindi coincidere.  $T$  è anche *suriettiva*. Infatti un punto  $x \in \mathcal{C}$  è individuato da quella particolare successione in cui le scelte non sono a capriccio, ma sono dettate dalla risposta a "il punto  $x$  sta nella parte a sinistra o in quella destra?"

Dunque l'insieme di Cantor  $\mathcal{C}$  e l'insieme  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  sono equipotenti. Dato che  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  ha la stessa cardinalità di  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , *l'insieme di Cantor ha la potenza del continuo*.

**Esercizio.** Indichiamo con  $\ell(C_n)$  la lunghezza totale di  $C_n$ , ossia la somma delle lunghezze degli intervallini di cui è composto  $C_n$ . Calcolare  $\ell(C_n)$ . Se immaginiamo che la retta  $\mathbb{R}$  sia massiccia, ossia che ogni segmento abbia "massa" eguale alla propria lunghezza, concludere che l'unica massa che è ragionevole attribuire a  $\mathcal{C}$  è zero. Si avrebbe così un esempio di un insieme di massa nulla che ha tanti punti quanti la retta, la quale ha massa infinita.

**Esercizio.** Convincersi che  $\mathcal{C}$  contiene infinite copie di  $\mathcal{C}$  stesso, in scala ridotta.

Volendo si può scrivere una formula analitica per la funzione  $T$ :

$$T: \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}, \quad T(a) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

(è qui che si capisce che conviene usare 0 e 2 per la codifica). Vediamo di dimostrare la formula. La scelta  $a_1$  corrisponde all'intervallino di estremi

$$\frac{a_1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

$a_2$  fa prendere come nuovo estremo sinistro quello precedente sommato di  $a_2/9$ , con l'altro estremo a distanza  $1/9$  verso destra:

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} \quad \text{e} \quad \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} + \frac{1}{9}.$$

E così via: la scelta  $a_n$  equivale all'intervallo di estremi

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} \quad \text{e} \quad \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^n}.$$

La successione degli estremi sinistri è debolmente crescente, quella degli estremi destri è debolmente decrescente, ed entrambe hanno per limite  $T(a)$ .

Ovviamente, la formula per  $T$  è parente stretta della formula che lega un numero reale di  $[0, 1]$  alla sua *espansione ternaria*. La differenza sta nel fatto che di solito non è ammesso che l'espansione in base  $p$  termini con infiniti  $p - 1$  consecutivi, per evitare le doppie rappresentazioni come quella  $1,000000\dots = 0,999999\dots$  in base dieci. Le nostre successioni di  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  possono benissimo invece terminare con infiniti 2 consecutivi (qual'è quella che rappresenta 1?). Anzi, questo accade proprio negli estremi destri degli intervallini che compongono i  $C_n$ , i quali estremi si individuano scegliendo sistematicamente la destra dal momento in cui compare l'intervallino in poi.

**Esercizio.**  $1/4 \in \mathcal{C}$ ? (La forma ternaria di  $1/4$  è ...)

Potremmo metterla in questi termini: conveniamo di ammettere che un numero positivo abbia anche *due* espansioni  $p$ -esimali, in una delle quali compaiano infiniti zeri consecutivi e nell'altra infiniti  $p - 1$  consecutivi (ossia di accettare ad esempio sia  $0,999999\dots$  che  $1,000000\dots$  in base dieci come espansioni del numero 1). Allora *i punti dell'insieme di Cantor sono semplicemente quei numeri di  $[0, 1]$  in almeno una delle cui espansioni ternarie non compare la cifra 1.*

**Esercizio.** L'insieme di Cantor non contiene alcun intervallo non degenere di  $\mathbb{R}$ . Anzi, fra due punti distinti di  $\mathcal{C}$  c'è tutto un intervallo non degenere che non interseca  $\mathcal{C}$ . Ciò nonostante nessun punto di  $\mathcal{C}$  è isolato, cioè in ogni intorno di un punto di  $\mathcal{C}$  ci sono infiniti altri punti di  $\mathcal{C}$ .

C'è una semplice relazione fra la distanza  $|x - y|$  di due punti di  $\mathcal{C}$  (visti come punti di  $\mathbb{R}$ ) e le loro rappresentazioni ternaria  $a = T^{-1}(x)$ ,  $b = T^{-1}(y)$ . Infatti, se  $|x - y| < 1/3^n$ , necessariamente  $x$  e  $y$  stanno nello stesso intervallino almeno fino all' $n$ -esimo passo. Anche viceversa:

$$|x - y| < \frac{1}{3^n} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

Varrebbe l'equivalenza anche con " $\leq$ " al posto di " $<$ "?

Consideriamo l'espansione ternaria  $a = T^{-1}(x) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  di un punto  $x \in \mathcal{C}$ . Che accade se trasformiamo tutte le cifre "2" in "1" e interpretiamo il risultato come una espansione binaria? Come passo intermedio per rispondere alla domanda, consideriamo la seguente funzione:

$$B: \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1], \quad B(a) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k/2}{2^k}.$$

Notare che  $a_k/2 \in \{0, 1\}$  se  $a_k = 0$  ed è 1 se  $a_k = 2$ . Supponiamo che  $a, b \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  abbiano uguali i primi  $n$  termini:  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ . Allora sia  $B(a)$  che  $B(b)$  giacciono nell'intervallo di estremi

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k/2}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{0}{2^k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k/2}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

L'ultima sommatoria vale esattamente  $2^{-n}$ . Dunque  $B(a)$  e  $B(b)$  non possono distare fra loro più di  $2^{-n}$ , che è la distanza degli estremi dell'intervallo:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n \implies |B(a) - B(b)| \leq \frac{1}{2^n}$$

(vale la freccia " $\Leftarrow$ "?). La reinterpretazione binaria dell'espansione ternaria di  $x \in \mathcal{C}$  è la composizione  $B(T^{-1}(x))$ . Collegando quanto sappiamo su  $T^{-1}$  e su  $B$ , otteniamo che se  $x, y \in \mathcal{C}$  allora

$$|x - y| < \frac{1}{3^n} \implies |B(T^{-1}(x)) - B(T^{-1}(y))| \leq \frac{1}{2^n}.$$

In particolare,  $B \circ T^{-1}: \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  è *uniformemente continua*. Non è *iniettiva*. Consideriamo per esempio il suo valore nei punti  $1/3$  e  $2/3$ :

$$\begin{aligned} T^{-1}(1/3) &= (0, 2, 2, 2, \dots), & T^{-1}(2/3) &= (2, 0, 0, 0, \dots), \\ B(T^{-1}(1/3)) &= 0,01111\dots_{\text{base due}} = 0,10000\dots_{\text{base due}} = 1/2, \\ B(T^{-1}(2/3)) &= 0,10000\dots_{\text{base due}} = 1/2. \end{aligned}$$

Però è *suriettiva* su  $[0, 1]$ . Infatti ogni numero di  $[0, 1]$  si può scrivere in forma binaria  $\sum_{k \geq 1} r_k/2^k$  con  $r_k \in \{0, 1\}$ , ed è chiaro che questo si può ottenere applicando  $B$  alla successione  $(2r_1, 2r_2, 2r_3, \dots)$ , che a sua volta corrisponde a un punto dell'insieme di Cantor.

Altra proprietà è che  $B \circ T^{-1}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  è *debolmente crescente*. Siano infatti  $x < y$  due punti di  $\mathcal{C}$  e siano  $a = T^{-1}(x)$ ,  $b = T^{-1}(y)$ . Allora esiste un  $n$  tale che  $a_k = b_k$  per  $k < n$  e  $a_n \neq b_n$  perché  $x \neq y$ . Necessariamente però  $a_n = 0$  e  $b_n = 2$ , perché altrimenti  $x = T(a)$  sarebbe maggiore di  $y = T(b)$ . Allora

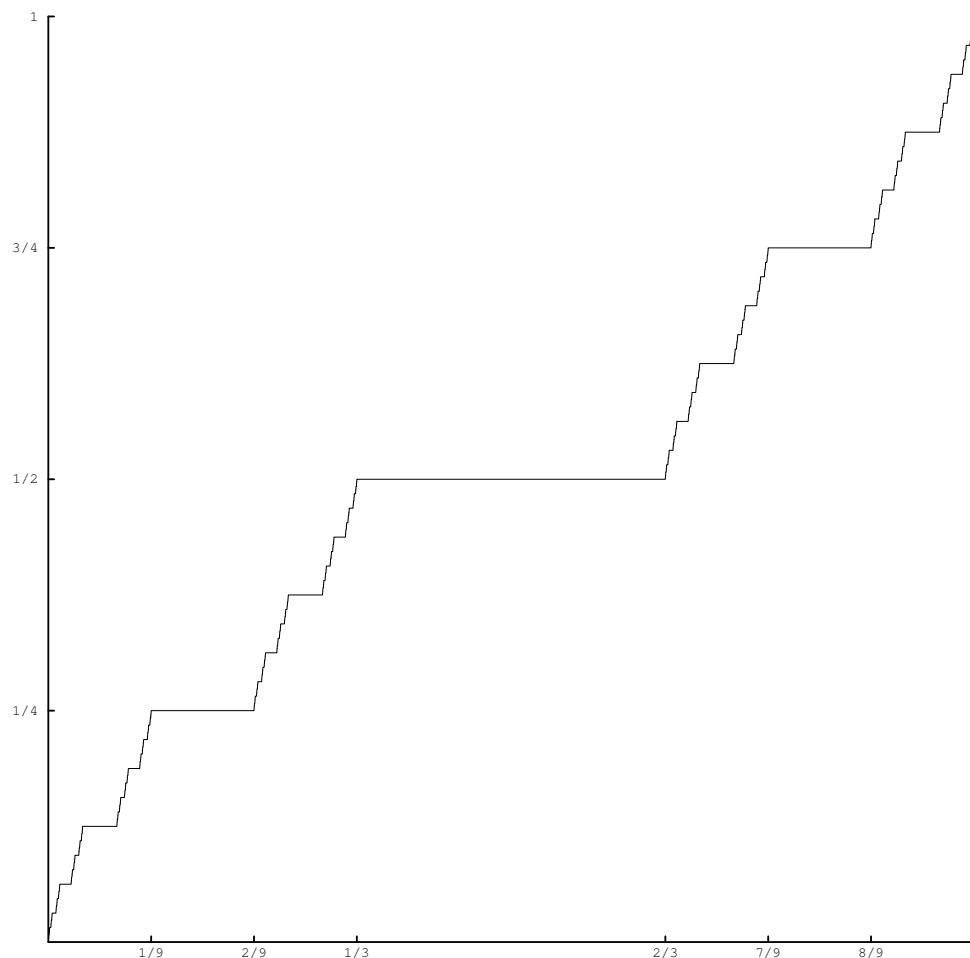
$$B \circ T^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k/2}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{0/2}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2/2}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k/2}{2^k} + \frac{2/2}{2^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k/2}{2^k} + \frac{2/2}{2^n} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k/2}{2^k}.$$

**Esercizio.** Dimostrare che  $B(T^{-1}(x)) = B(T^{-1}(y))$  se e solo se  $x = y$  oppure  $x$  e  $y$  sono gli estremi di uno degli intervallini che vengono scartati nella costruzione di  $\mathcal{C}$ .

Possiamo estendere la definizione di  $B \circ T^{-1}$  a tutto l'intervallo  $[0, 1]$  conservando la debole crescenza nel modo seguente:

$$V(x) := \begin{cases} B(T^{-1}(x)) & \text{se } x \in \mathcal{C}, \\ B(T^{-1}(x')) & \text{se } x \notin \mathcal{C} \text{ e } x' \text{ è l'estremo sinistro dell'intervallino a cui appartiene } x \\ & \text{che viene tolto a } [0, 1] \text{ quando si costruisce } \mathcal{C}. \end{cases}$$

Si può dimostrare che  $V$  è debolmente crescente prendendo  $x < y$  e considerando i possibili casi (appartenenza a  $\mathcal{C}$  o a intervallini). Immediato è che  $V$  è suriettiva su  $[0, 1]$ , perché coincide con  $B \circ T^{-1}$  su  $\mathcal{C}$ . Essendo la  $V$  debolmente crescente da  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}$  ed essendo la sua immagine un intervallo, risulta che  $V$  è *continua*. È una funzione abbastanza famosa, chiamata talvolta *funzione di Vitali* (dal nome di G. VITALI, 1875–1932). Il suo grafico, che segue, è detto "*scalinata del demonio*". Il perché sia una scalinata è chiaro, essendo formata da (infiniti) gradini. Il diavolo c'entra per vari motivi: uno è che pur avendo dei gradini, il grafico non ha nessun salto  $-$ . Un altro modo in cui  $V$  mette alla prova la nostra intuizione è che, pur crescendo dal valore 0 al valore 1, *non è strettamente crescente* su alcun sottointervallo non degenere di  $[0, 1]$ .



Più nascosto è il fatto che la funzione di Vitali frustra le speranze di chi voglia generalizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale. Per qualche dettaglio in più vedere l'esercizio seguente.

**Esercizio.** La funzione di Vitali è derivabile, con derivata nulla, in ogni punto di  $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$ . Poniamo  $g(x) := V'(x)$  dove  $V$  è derivabile, e  $g(x) :=$  qualsiasi cosa dove  $V$  non è derivabile. Dimostrare che  $g$  è integrabile secondo Riemann su  $[0, 1]$  (non appena il "qualsiasi cosa" sia limitato), però  $V(x) \neq \int_0^x g = 0$  per ogni  $x > 0$ .

**Esercizio.** Dimostrare che  $|x - y| \leq 1/3^n \Rightarrow |V(x) - V(y)| \leq 1/2^n$ . Posto  $n = \lfloor -\log_3 |x - y| \rfloor$ , si ha  $|V(x) - V(y)| \leq 1/2^n$ . Dedurre che  $|V(x) - V(y)| \leq 2|x - y|^{\log_3 2}$  per ogni  $x, y \in [0, 1]$ , cioè che la funzione di Vitali è hölderiana di esponente  $\log_3 2 \cong 0,631$ .

**Esercizio.** (Autosimilarità e algoritmo per decidere se un numero è in  $\mathcal{C}$ ) Mostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  vale

$$x \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} 3x \in \mathcal{C} & \text{se } 0 \leq x \leq 1/3, \\ 3x - 2 \in \mathcal{C} & \text{se } 2/3 \leq x \leq 1, \\ \text{falso} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo  $f(x) := 3x$  se  $0 \leq x \leq 1/3$ ,  $f(x) := 3x - 2$  se  $2/3 \leq x \leq 1$ , e  $f(x) = x$  altrimenti. Sia  $x \in [0, 1]$ : allora  $x \in \mathcal{C}$  se e solo se la successione iterativa  $a_0 = x$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$  non cade mai (definitivamente costante) in  $]1/3, 2/3[$ . Quando  $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  la successione o si ferma in  $]1/3, 2/3[$ , o ne sta sempre fuori ed è definitivamente periodica; l'alternativa si può decidere in un numero di iterazioni non superiore al denominatore di  $x$ . Decidere se  $x = 1/4$  e  $x = 9/13$  sono nell'insieme di Cantor calcolando tale successione  $a_n$ . Implementare l'algoritmo in generale nel proprio linguaggio di programmazione preferito.

**Esercizio.** (Autosimilarità e algoritmo per calcolare la funzione di Vitali) Mostrare che la funzione di Vitali  $V$  soddisfa la relazione di autosimilarità

$$V(x) = \begin{cases} V(3x)/2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/3, \\ 1/2 & \text{se } 1/3 < x < 2/3, \\ (1 + V(3x - 2))/2 & \text{se } 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Questo dice fra l'altro che la parte del grafico di  $V$  contenuta in ciascuno dei rettangoli  $[0, 1/3] \times [0, 1/2]$ ,  $[2/3, 1] \times [1/2, 1]$  è una copia in scala (compressa lateralmente) dell'intero grafico nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Applichiamo la formula due volte partendo per esempio da  $x = 1/4$  si ricava

$$V(1/4) = \frac{1}{2}V(3/4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + V(1/4)}{2}.$$

Il primo e l'ultimo membro contengono entrambi  $V(1/4)$ . Possiamo vedere l'uguaglianza come un'equazione nell'incognita  $V(1/4)$ , un'equazione che possiamo risolvere ricavando

$$V(1/4) = 1/3.$$

Possiamo sviluppare quest'idea e ricavare un algoritmo per calcolare  $V(x)$ . Definiamo (come in un esercizio precedente)  $f(x) := 3x$  se  $0 \leq x \leq 1/3$ ,  $f(x) := 3x - 2$  se  $2/3 \leq x \leq 1$ , e  $f(x) = x$  altrimenti. Fissato  $x \in [0, 1]$  poniamo  $a_1 := x$ ,  $a_{n+1} := f(a_n)$ . Prendiamo una variabile indeterminata  $y$  (che poi sarà  $V(x)$ ), e definiamo la successione

$$b_0 = y, \quad b_{n+1} := \begin{cases} 2y & \text{se } 0 \leq a_n \leq 1/3, \\ 1/2 & \text{se } 1/3 < a_n < 2/3, \\ 2y - 1 & \text{se } 2/3 \leq a_n \leq 1. \end{cases}$$

Notare che se sostituiamo  $y = V(x)$  in  $b_n$  otteniamo  $b_n = V(a_n)$  per ogni  $n$ . Prendiamo un  $x \in [0, 1]$  che sia o razionale o non in  $\mathcal{C}$ ; la successione  $a_n$  è definitivamente periodica; siano  $n \geq 0$ ,  $p \geq 1$  i minimi indici per i quali  $a_{n+p} = a_n$ ; uguagliando  $b_{n+p} = b_n$  si ottiene un'equazione di primo grado nell'incognita  $y$ , la cui unica soluzione coincide con  $V(x)$ . Usare il procedimento per mostrare che  $V(9/13) = 4/7$ .

## 2. La curva di Peano

Nel 1890 Giuseppe PEANO (1858–1932) pubblicò un articolo intitolato “*Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*” sui *Mathematische Annalen*. Vi si descriveva una funzione

$$c: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

che è *continua e suriettiva*. La funzione  $c$  viene detta *curva di Peano*. Qui “curva” è intesa nel senso di descrizione del moto di una particella, tramite la legge  $c$  che associa ad ogni istante  $x \in [0, 1]$  la posizione  $c(x)$  della particella.

Per afferrare l’importanza della curva di Peano bisogna capire che a quei tempi l’Analisi Matematica era grosso modo divisa in due filoni:

1. quello tradizionale studiava le proprietà speciali di particolari classi di funzioni, quali le funzioni algebriche, esponenziali, trigonometriche;
2. unopiù recente usava il concetto di continuità per dimostrare teoremi su funzioni “generiche”.

L’esperienza quotidiana con le funzioni speciali tradizionali porta naturalmente a congetturare alcune proprietà di tipo “generico”. Una di queste era che l’insieme dei punti attraversati da una particella in moto (la “traiettoria”) fosse un oggetto “unidimensionale”, se non si sta a cavillare su eccezioni isolate, come i punti di incrocio. Ci si aspettava che il concetto di continuità bastasse a dare una dimostrazione rigorosa. Le cose non sono così semplici. La curva di Peano è continua ma la sua traiettoria decisamente non è unidimensionale.

Si poneva seriamente il problema di che cos’è la *dimensione* di un insieme, o, meglio, di un sottinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Già Cantor aveva fatto notare che il numero di punti non distingue per esempio fra la retta  $\mathbb{R}$  e il piano  $\mathbb{R}^2$ . Anche se è facile dimostrare che non esiste alcuna biiezione *lineare* fra  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbb{R}^m$  se  $n \neq m$ , la teoria degli spazi vettoriali non assegna alcuna dimensione a oggetti curvi come una parabola. La continuità può aiutare a distinguere le dimensioni? Per esempio, esistono o no biiezioni *continue* fra il segmento  $[0, 1]$  e il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ ? La risposta a domande come questa ha richiesto molta fatica. Sappiamo oggi che una funzione da  $[0, 1]$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$  non può essere allo stesso tempo continua, iniettiva e suriettiva (non si conoscono dimostrazioni elementari). La curva di Peano mostra che possiamo però rinunciare all’iniettività senza perdere il resto.

Costruiremo la curva di Peano in due stadi. Dapprima definiremo una funzione  $\gamma$  continua e suriettiva dall’insieme di Cantor in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Assegneremo poi il valore di  $c(x)$  come  $\gamma(x)$  se  $x \in \mathcal{C}$  e opportunamente se  $x \notin \mathcal{C}$ , in modo tale che il risultato sia continuo e l’immagine non trabordi il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

L’idea di base è la stessa che dimostra che il segmento è equipotente al quadrato: da un’espansione  $p$ -esimale possiamo ricavarne due prendendo per una le cifre di posto dispari e per l’altra le cifre di posto pari. Chiamiamo con  $\sigma$  questo sdoppiamento, nella forma ternaria che ci interessa:

$$\begin{aligned} \sigma: \{0, 2\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}}, & \sigma(a) &:= (\sigma'(a), \sigma''(a)), \\ \sigma'(a)_n &:= a_{2n-1} & & \text{(cifre di } a \text{ con posto dispari)}, \\ \sigma''(a)_n &:= a_{2n} & & \text{(cifre di } a \text{ con posto pari)}. \end{aligned}$$

Veniamo alla funzione  $\gamma$ . Il suo valore in un punto  $x \in \mathcal{C}$  si calcola in tre tappe:

- i. trovare lo sviluppo ternario  $a = T^{-1}(x)$ ;
- ii. sdoppiare  $a$  tramite  $\sigma$  ottenendo  $(b, c) = (\sigma'(a), \sigma''(a))$ ;
- iii. calcolare la “binarizzazione” di  $b$  e di  $c$  con la funzione  $B$  introdotta in precedenza:  $\gamma(x) = (B(b), B(c))$ .

Riassumendo, la definizione di  $\gamma(x)$  è

$$\gamma(x) := \left( B(\sigma'(T^{-1}(x))), B(\sigma''(T^{-1}(x))) \right) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Familiarizziamoci con  $\gamma$  calcolandola in alcuni punti notevoli:

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad a = (0, 0, 0, \dots), \quad b = c = (0, 0, 0, \dots), \quad B(b) = B(c) = 0, \quad \gamma(0) = (0, 0); \\ x = 1, & \quad a = (2, 2, 2, \dots), \quad b = c = (2, 2, 2, \dots), \quad B(b) = B(c) = 0, 1111 \dots_{\text{base due}} = 1, \\ & \quad \gamma(1) = (1, 1); \\ x = 1/3, & \quad a = (0, 2, 2, 2, \dots), \quad b = (0, 2, 2, 2, \dots), \quad c = (2, 2, 2, \dots), \\ & \quad B(b) = 0, 01111 \dots_{\text{base due}} = 1/2, \quad B(c) = 1, \quad \gamma(1/3) = (1/2, 1); \\ x = 2/3, & \quad a = (2, 0, 0, 0, \dots), \quad b = a, \quad c = (0, 0, 0, \dots), \\ & \quad B(b) = 0, 1_{\text{base due}} = 1/2, \quad B(c) = 0, \quad \gamma(2/3) = (1/2, 0). \end{aligned}$$

Indaghiamo un po' a fondo su come si comporta  $\gamma$  negli estremi  $x'$ ,  $x'' = x' + 1/3^n$  di uno degli intervallini che vengono scartati per costruire  $C_n$ . Le rappresentazioni ternaria di  $x'$  e  $x''$  coincidono fino al posto  $n - 1$  e poi quella di  $x'$  prosegue con 0222... mentre quella di  $x''$  con 2000... Il risultato è lievemente diverso a seconda che  $n$  sia pari o dispari. Per esempio, supponiamo  $n = 2k$ , con  $k \geq 1$ . Allora

$$\left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} = (t_1, t_2, \dots, t_{2k-2}, t_{2k-1}, \left\{ \begin{array}{l} 0, 2, 2, 2, \dots \\ 2, 0, 0, 0, \dots \end{array} \right.$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sigma'(a) &= (t_1, t_3, \dots, t_{2k-1}, 2, 2, 2, \dots), & \sigma''(a) &= (t_2, t_4, \dots, t_{2k-2}, 0, 2, 2, 2, \dots) \\ \sigma'(b) &= (t_1, t_3, \dots, t_{2k-1}, 0, 0, 0, \dots), & \sigma''(b) &= (t_2, t_4, \dots, t_{2k-2}, 2, 0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

Confrontiamo le binarizzazioni:

$$B(\sigma'(a)) - B(\sigma'(b)) = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k \text{ cifre}} 111 \dots \text{base due} = \frac{1}{2^k},$$

$$B(\sigma''(a)) - B(\sigma''(b)) = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k-1 \text{ cifre}} 0111 \dots \text{base due} - 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k-1 \text{ cifre}} 1000 \dots \text{base due} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} = 0$$

Quindi:

$$n = 2k, k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(x') = \gamma(x'') + \left( \frac{1}{2^k}, 0 \right).$$

Il caso di  $n$  dispari è analogo e lasciamo la verifica ai lettori:

$$n = 2k + 1, k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(x') = \gamma(x'') + \left( 0, \frac{1}{2^k} \right).$$

In ogni modo  $\gamma$  ha o la stessa ascissa o la stessa ordinata sugli estremi  $x'$  e  $x''$ .

L'applicazione  $\gamma$  è *suriettiva*. Infatti, siano  $y, z \in [0, 1]$ . Abbiamo già notato che la composizione  $B \circ T^{-1}$  è suriettiva. Esistono dunque  $y', z' \in \mathcal{C}$  tali che  $B(T^{-1}(y')) = y$ ,  $B(T^{-1}(z')) = z$ . "Alterniamo" le cifre ternaria di  $y'$  e  $z'$ : dati  $b = T^{-1}(y')$ ,  $c = T^{-1}(z')$ , definiamo

$$a := (b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots) \quad \text{e} \quad x := T(a).$$

Si ha allora  $\sigma(a) = (b, c)$  e quindi

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \left( B(\sigma'(T^{-1}(x))), B(\sigma''(T^{-1}(x))) \right) = \left( B(\sigma'(a)), B(\sigma''(a)) \right) = (B(b), B(c)) = \\ &= \left( B(T^{-1}(y')), B(T^{-1}(z')) \right) = \\ &= (y, z). \end{aligned}$$

**Esercizio.**  $\gamma$  non è iniettiva. (Attenzione, non basta sapere che  $B \circ T^{-1}$  non è iniettiva).

La funzione  $\gamma$  è anche *continua*. Siano infatti  $x, y \in \mathcal{C}$ ,  $a = T^{-1}(x)$ ,  $b = T^{-1}(y)$ . Allora, per quanto già sappiamo su  $T^{-1}$  e per la definizione di  $\sigma$  si ha

$$|x - y| < \frac{1}{3^{2n}} \quad \Rightarrow \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{2n} = b_{2n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma'(a)_1 = \sigma'(b)_1, \dots, \sigma'(a)_n = \sigma'(b)_n, \\ \sigma''(a)_1 = \sigma''(b)_1, \dots, \sigma''(a)_n = \sigma''(b)_n, \end{cases}$$

e quindi, per la proprietà di  $B$ :

$$|x - y| < \frac{1}{3^{2n}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\gamma'(x) - \gamma'(y)| = |B(\sigma'(a)) - B(\sigma'(b))| \leq \frac{1}{2^n} \\ |\gamma''(x) - \gamma''(y)| = |B(\sigma''(a)) - B(\sigma''(b))| \leq \frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

Se adottiamo su  $\mathbb{R}^2$  la norma  $\|(u_1, u_2)\|_\infty := \max\{|u_1|, |u_2|\}$ , che è equivalente alla norma euclidea, si ha

$$\boxed{|x - y| < \frac{1}{3^{2n}} \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(x) - \gamma(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}}$$

e questo dimostra la continuità. Anzi, questa è una stima del modulo di continuità uniforme.

Veniamo finalmente alla definizione completa della curva di Peano  $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ . Abbiamo già detto che  $c(x)$  coincide con  $\gamma(x)$  per  $x \in \mathcal{C}$ . Prendiamo ora un punto  $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$  e siano  $x', x''$  gli estremi dell'intervallo contenente  $x$  la cui parte interna viene tolta a  $C_{n-1}$  nel costruire  $C_n$  (sia  $n$  che l'intervallo sono determinati univocamente da  $x$ ):

$$x' < x < x'' = x' + \frac{1}{3^n}.$$

Definiamo come  $c(x)$  quel punto di  $[0, 1] \times [0, 1]$  che divide il segmento che congiunge  $\gamma(x')$  con  $\gamma(x'')$  nella stessa proporzione in cui  $x$  divide il segmento  $[x', x'']$ :



(questo procedimento è detto “interpolazione lineare”). In formula:

$$c(x) := \frac{x - x'}{x'' - x'}\gamma(x'') + \frac{x'' - x}{x'' - x'}\gamma(x').$$

In generale, se  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , il punto che divide il segmento  $[u, v]$  in parti proporzionali a  $\lambda, \mu > 0$  è  $(\lambda u + \mu v)/(\lambda + \mu)$ . Visto che  $\gamma(x')$  e  $\gamma(x'')$  appartengono a  $[0, 1] \times [0, 1]$ , anche tutto il segmento che li congiunge giace nel quadrato. Tale segmento è addirittura parallelo a uno degli assi, come abbiamo visto.

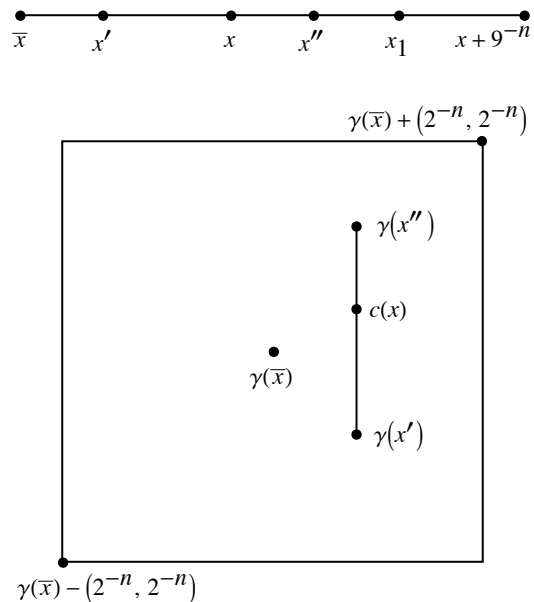
Abbiamo ora una applicazione  $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  che è suriettiva. L'ultimo scoglio è dimostrare che è *continua*.

**Proposizione.** *La funzione  $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  è continua.*

**Dimostrazione.** Sia  $\bar{x} \in [0, 1]$  e studiamo la continuità a destra di  $c$  nel punto  $\bar{x}$ . La continuità a sinistra si tratta analogamente. Se  $x \notin \mathcal{C}$  in un intorno di  $\bar{x}$  la  $c$  è lineare (affine) e quindi continua. Supponiamo pertanto che  $\bar{x} \in \mathcal{C}$ . Sia  $n \in \mathbb{N}$  e consideriamo l'intervallo  $[\bar{x}, \bar{x} + 3^{-2n}]$ . Possono succedere due cose:

(1.) In quell'intervallo non cadono punti di  $\mathcal{C}$ ; questo vuol dire che  $\bar{x}$  è l'estremo sinistro di uno degli intervalli che vengono tolti per produrre  $\mathcal{C}$ ; perciò a destra di  $\bar{x}$  la funzione  $c$  è lineare (affine) e pertanto è continua a destra in  $\bar{x}$ .

(2.) In quell'intervallo cade almeno un punto  $x_1$  di  $\mathcal{C}$ . Allora qualunque punto  $x$  di  $[\bar{x}, x_1]$  o è un punto di  $\mathcal{C}$ , e quindi  $\|c(x) - c(\bar{x})\|_\infty = \|\gamma(x) - \gamma(\bar{x})\|_\infty \leq 2^{-n}$ , oppure appartiene a qualche intervallo  $]x', x''[$  di quelli che vengono tolti per fare  $\mathcal{C}$ . Entrambi gli estremi  $x', x''$  sono in  $[\bar{x}, x_1]$ , quindi entrambi  $\gamma(x'), \gamma(x'')$  distano da  $\gamma(\bar{x})$  meno di  $2^{-n}$  nella norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Il punto  $c(x)$ , appartenendo al segmento di estremi  $\gamma(x'), \gamma(x'')$  e quindi anche il suo punto  $c(x)$  dista da  $\gamma(\bar{x})$  meno di  $2^{-n}$ . Infatti le palle rispetto a una norma sono sempre *convesse*, cioè se contengono due punti contengono anche tutto il segmento che li congiunge; qui addirittura la palla è un quadrato e il segmento è parallelo a uno dei lati.  $\square$



Con più fatica si può essere più precisi e valutare il modulo di continuità uniforme di  $c$ .

**Proposizione.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x, y \in [0, 1]$  si ha

$$|x - y| < \frac{1}{3^{2n}} \quad \Rightarrow \quad \|c(x) - c(y)\|_\infty \leq \frac{3}{2^n}.$$



**Dimostrazione.** Prendiamo  $x, y \in [0, 1]$ , con  $|x - y| < 1/3^{2n}$ , e vogliamo dire quanto al massimo può essere grande  $\|c(x) - c(y)\|_\infty$ . La discussione si divide in alcuni casi, a seconda di come sono  $x$  e  $y$  rispetto a  $\mathcal{C}$ .

a. Se  $x$  e  $y$  appartengono entrambi a  $\mathcal{C}$ , allora già sappiamo che

$$\|c(x) - c(y)\|_\infty = \|\gamma(x) - \gamma(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}.$$

b. Supponiamo che almeno uno dei due fra  $x$  e  $y$  non stia in  $\mathcal{C}$ , però entrambi appartengano allo stesso intervallino chiuso  $[x', x'']$ , la cui parte interna viene tolta da  $C_{m-1}$  nel produrre  $C_m$ :

$$x' \leq x < y \leq x'' = x' + \frac{1}{3^m}.$$

Gli interi  $n$  ed  $m$  non hanno alcun legame fra loro. Distinguiamo in due sottocasi a seconda della loro relazione:

b1. se  $m > 2n$  allora la distanza fra  $c(x)$  e  $c(y)$ , che certo non può superare quella fra gli estremi  $c(x')$  e  $c(x'')$ , può essere valutata da quest'ultima grazie al caso a:

$$\|c(x) - c(y)\|_\infty \leq \|c(x') - c(x'')\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}.$$

b2. Se  $m \leq 2n$ , gli estremi dell'intervallo sono troppo distanti perché la maggiorazione precedente porti ad alcunché. Bisogna sfruttare più in dettaglio la definizione di  $c$ . Precisamente, usare il fatto che la distanza fra  $c(x)$  e  $c(y)$  sta alla distanza fra  $c(x')$  e  $c(x'')$  come  $|x - y|$  sta a  $|x' - x''|$ :

$$\frac{\|c(x) - c(y)\|_\infty}{\|c(x') - c(x'')\|_\infty} = \frac{|x - y|}{|x' - x''|}.$$

Il denominatore a sinistra vale  $1/2^k$  se  $m = 2k$  o  $m = 2k + 1$ , con  $k$  intero. Il denominatore a destra è  $1/3^m$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \|c(x) - c(y)\|_\infty &= \frac{|x - y|}{1/3^m} \cdot \frac{1}{2^k} = |x - y| \cdot \frac{3^m}{2^k} \leq \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{3^m}{2^k} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{3^m}{2^{m/2}} = \frac{1}{3^{2n}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^m \leq \frac{1}{3^{2n}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n} & \text{se } m \text{ è pari,} \\ \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{3^m}{2^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{2n}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^m \leq \frac{\sqrt{2}}{3^{2n}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^n} & \text{se } m \text{ è dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

La disuguaglianza dei casi precedenti è rocambolescamente confermata.

c. Supponiamo che  $x$  cada in uno di questi famosi intervallini  $[x', x'']$ , ma che  $y \in \mathcal{C}$  non sia uno degli estremi. Per esempio,  $x' \leq x \leq x'' < y$ . Allora, per i casi a e b si ha

$$\|c(x) - c(y)\|_\infty \leq \|c(x) - c(x'')\|_\infty + \|c(x'') - c(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

d. Ci rimane da considerare solo cosa accade quando  $x$  e  $y$  sono tali che

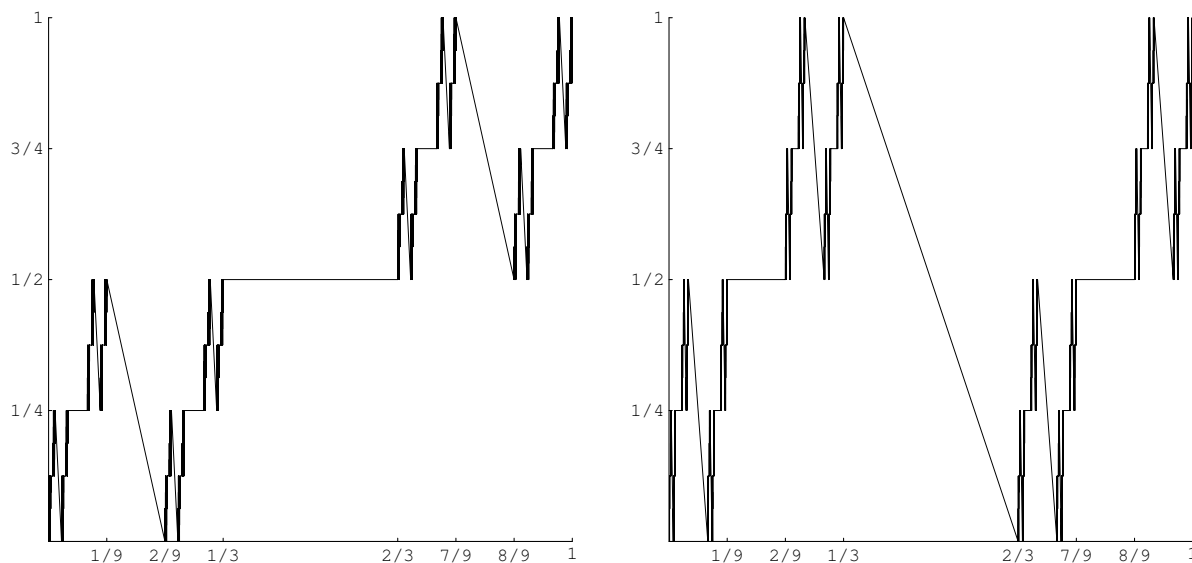
$$x' \leq x \leq x'' < y' \leq y \leq y'',$$

dove  $[x', x'']$  e  $[y', y'']$  sono due dei famosi intervallini, anche comparsi in momenti diversi. Il compito è facile:

$$\begin{aligned} \|c(x) - c(y)\|_\infty &\leq \|c(x) - c(x'')\|_\infty + \|c(x'') - c(y')\|_\infty + \|c(y') - c(y)\|_\infty \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}. \end{aligned}$$

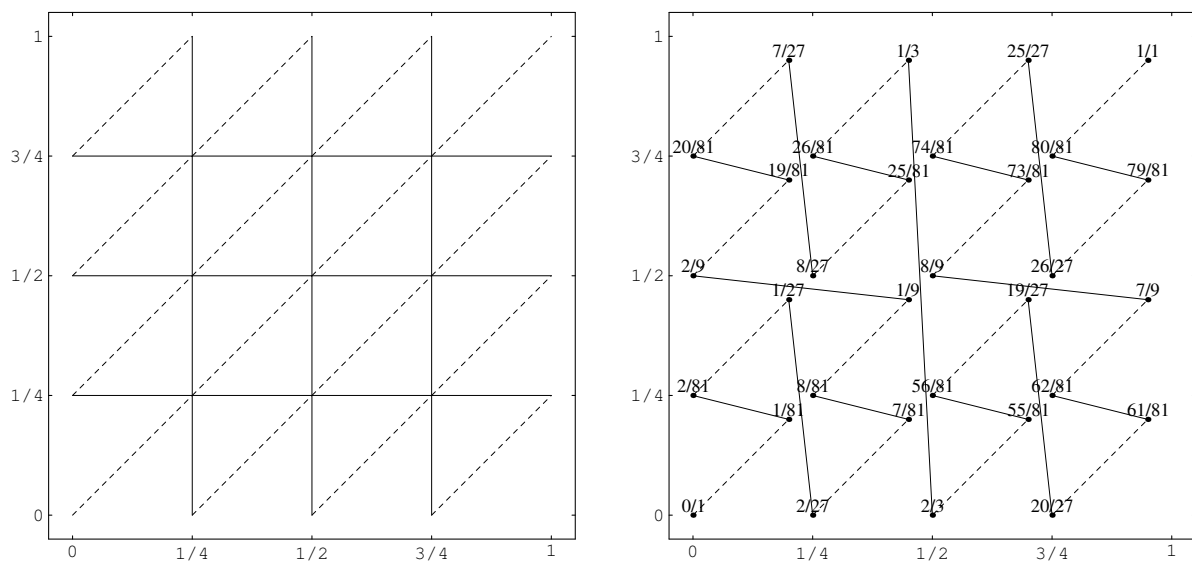
□

Quelli che seguono sono i grafici delle due componenti di  $c(x)$ , ottenuti interpolando linearmente fra i valori che  $c$  assume agli estremi degli intervallini di  $C_{10}$ . Dai calcoli che abbiamo fatto risulta che questi grafici sono indistinguibili a occhio nudo dai “veri” grafici delle componenti di  $c$ .



**Esercizio.** I grafici sono esatti sui punti di  $[0, 1] \setminus C_{10}$  e sugli estremi degli intervallini di  $C_{10}$ . Un punto di  $C_{10}$  quanto può distare dal più vicino estremo? Di quanto differisce al massimo il valore di  $c$  nei due punti?

Il proposito di visualizzare la curva di Peano stessa va incontro alla solita difficoltà delle curve piane: occorre una dimensione per il parametro più altre due per l'immagine, mentre il foglio di carta ne ha solo un totale di due. Comunque non esistono al momento soluzioni a basso costo, e dobbiamo arrangiarci. Delle due figure che seguono, quella a sinistra mostra il tragitto dell'interpolazione lineare dei valori di  $c$  sugli estremi di  $C_3$ , lasciando il linea continua quelli che appartengono alla vera  $c$ , e in linea tratteggiata i tratti spurî, dove  $c$  non coincide con l'interpolazione lineare. Il problema è che da tale figura non si capisce niente dell'ordine in cui i punti vengono percorsi, per non parlare della velocità con cui viene percorsa nei vari tratti. La figura a destra cerca di rimediare con un trucco: si fa un'interpolazione lineare non di  $c$ , ma di una funzione ottenuta sfalsando lievemente il valore di  $c$  sugli estremi destri degli intervallini di  $C_3$ . Così facendo la curva interpolata risultante diventa *iniettiva*, e si seguono facilmente le sue vicissitudini. Per aiutare anche a capire la velocità si sono forniti anche i tempi in cui i vari vertici sono raggiunti. La migliore visualizzazione si ha cercando di capire com'è percorsa la figura esatta di sinistra aiutandosi con quella sfalsata di destra.



**Esercizio.** Indagare sulle relazioni fra i seguenti oggetti, per i valori di  $x$  ove sono definiti:

$$\gamma(x), \quad \gamma(3x), \quad \gamma\left(x + \frac{2}{3}\right), \quad \gamma\left(x + \frac{2}{9}\right), \quad \gamma\left(9x + \frac{2}{3}\right) \dots$$

**Esercizio.** Dovremmo ora conoscere abbastanza proprietà della curva di Peano da compilare agevolmente una tabella dei suoi valori in molti punti notevoli. Si noterà che se  $x$  è razionale, anche le componenti di  $c(x)$  sono razionali, e si possono calcolare in un numero finito di passaggi.

**Esercizio.** Anche la curva di Peano è autosimile? In altre parole, se si esamina  $c$  su ad esempio  $[0, 1/3]$  si notano copie in scala ridotta di  $c$  tutta intera?

**Esercizio.** La curva di Peano è derivabile in tutti i punti di  $[0, 1] \setminus C$ , e la derivata ha valori sui due assi cartesiani ed è illimitata. È derivabile anche in 0? Se si definisce  $c'(x) := 0$  per  $x \in C$ , si riesce a dire qualcosa dell'integrale improprio di  $\|c'\|$ ?

**Esercizio.** La curva di Peano non è rettificabile.

**Esercizio.** Dimostrare che  $\|c(x) - c(y)\|_\infty \leq 12|x - y|^{\log_9 2}$ , e quindi che  $c$  è hölderiana di esponente  $\log_9 2 \cong 0,315$ . Com'è quest'esponente rispetto a quello della funzione di Vitali?

**Esercizio.** È lecito chiedersi se si possa trovare una curva di Peano che riempia un cubo tridimensionale, invece che un quadrato. O, più in generale, un ipercubo  $[0, 1]^n$ . Chi abbia afferrato la sostanza del caso bidimensionale dovrebbe indovinare le modifiche per passare al caso generale. Invece di sdoppiare una espansione ternaria, la si sgrana in tre, quattro, eccetera, con i dovuti aggiustamenti nella dimostrazione della continuità. Che esponente di hölderianità ci si aspetta?

**Esercizio.** È possibile costruire una curva  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua e suriettiva? (Suggerimento: usare il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi). E da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$ ?

**Esercizio.** Sia  $C$  un sottinsieme compatto di  $[0, 1]$ . Allora per ogni  $x \in [0, 1] \setminus C$  esistono unici  $x', x'' \in C$  tali che  $x \in ]x', x''[ \subset [0, 1] \setminus C$ . Sia  $\varphi: C \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Definiamo  $f(x)$  come  $\phi(x)$  per  $x \in C$  e interpolando linearmente per  $x \in [0, 1] \setminus C$  fra i valori  $\varphi(x')$  e  $\varphi(x'')$ . Dimostrare che anche  $f$  è continua. Se  $\varphi$  è hölderiana anche  $f$  lo è.

**Esercizio.** Partiamo da un  $x \in [0, 1]$  e sia  $a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tale che  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 2^{-n}$  (di tali  $a$  possono essercene due per certi  $x$ , quali?). Sdoppiamo la successione  $a$  in  $(\sigma'(a), \sigma''(a))$  come si è fatto per le successioni a valori in  $\{0, 2\}$ . Poi scriviamo  $\tilde{c}(x) := (\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma'(a)_n 2^{-n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma''(a)_n 2^{-n})$ . Dimostrare che una tale  $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  ha speranze di essere suriettiva ma non di essere continua.

Concludiamo con la figura più spettacolare: l'immagine della curva di Peano interpolata agli estremi degli intervallini di  $C_{12}$ , lievemente sfalsata per renderla iniettiva.

