Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea in IBML

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi dell'8 marzo 2024

1. Nella rappresentazione decimale di un numero irrazionale non c'è mai nessun blocco di 5 cifre che si ripeta infinite volte. O sì? E per un numero razionale?

2. Chiamiamo x il numero decimale infinito ottenuto giustapponendo le rappresentazioni in base dieci dei numeri naturali in questo modo: $x = 0{,}12345678910111213141516\ldots$ Dimostrare che x non è periodico. Questo numero ha persino un nome: costante di Champernowne.

3. Chiamiamo x il numero decimale infinito ottenuto facendo sequenze crescenti di zeri e di uni in questo modo: $x = 0{,}10110011100011110000\ldots$ Dimostrare che x non è periodico.

4. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq x < y$. Dimostrare che esiste un $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r^2 < y$. In altre parole, i quadrati dei numeri razionali sono densi fra i numeri reali positivi.

5. Interpretare i puntini nelle seguenti espressioni:

$$\{1,3,5,7,9,\ldots,19\}, \qquad \{1,3,5,7,9,\ldots\}, \qquad \{\ldots,-3,-2,-1,0\},$$
$$\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{7}\right\}, \qquad \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots\right\},$$
$$\{1^2,2^2,3^2,4^2,\ldots,n^2\}, \qquad \{2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots\}, \qquad \{1^1,2^2,3^3,4^4,\ldots,n^n\},$$
$$\{1^1,2^2,3^3,4^4,\ldots,n^n,\ldots\}, \qquad \{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2,\ldots,(2n)^2\}.$$

6. Trovare il quadrato successivo della sequenza seguente:

$$1 \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

e poi rappresentare il generico n-esimo quadrato.

7. Vero, falso, senza senso?

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = \log\frac{(1+x)}{x},$$
$$\frac{3+x}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \frac{3+x}{4-x} \cdot 2 + \sqrt{x},$$
$$\sqrt{2x+1}\sqrt{2x+1} = \sqrt{\sqrt{2x+1}},$$

$$\frac{\log(x)}{x} = \log\frac{(x)}{x}, \qquad \operatorname{sen}(1-x)(1+x) = \operatorname{sen}(1-x^2),$$

$$\frac{\cos(a-b)(a+b)}{a+b} = \cos(a-b), \qquad \cos 1 = 0,$$

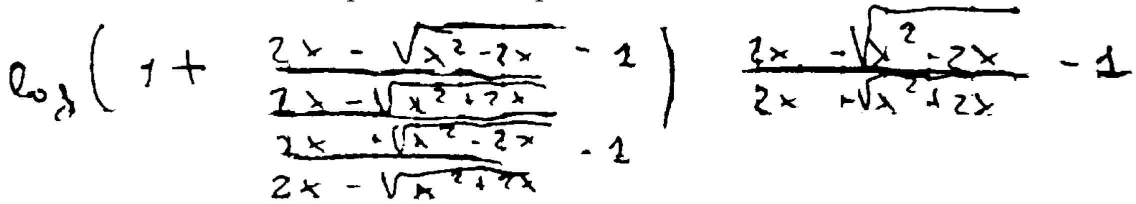
$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) \qquad \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

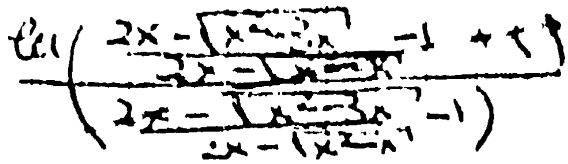
$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad -\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$$

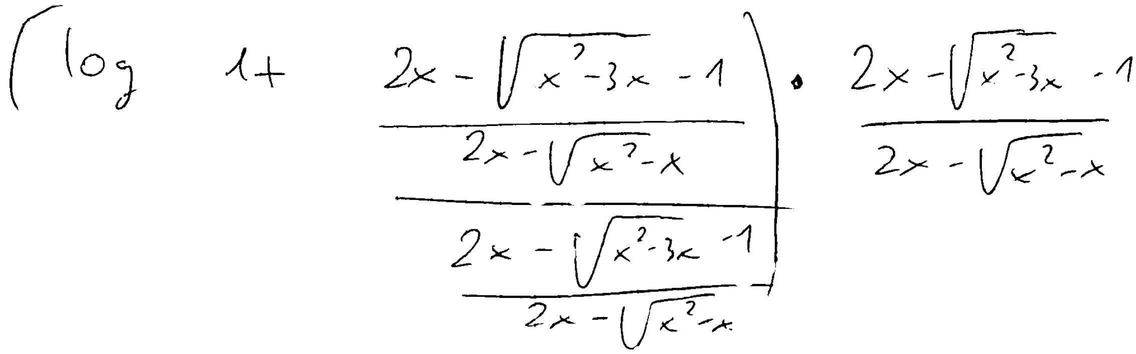
$$\frac{\frac{a}{b+1}}{a+b+3}\cdot\frac{b}{b+1} = \frac{ab}{a+b+3}, \qquad (a-b)(a+b) = a^2-b^2,$$

$$(a+b-c)(a-b+c) = a^2-b^2-c^2, \qquad (a+b-c)(a+b+c) = a^2+b^2-c^2$$

8. Discutere l'eventuale corrispondenza di queste formule scritte a mano



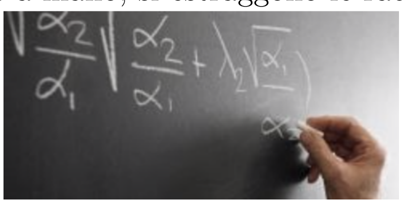




con quest'altra:

$$\frac{\log\left(1+\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}-1\right)}{\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}-1}\cdot\left(\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}-1\right).$$

9. Nelle formule seguenti scritte a mano, si estraggono le radici quadrate di cosa?



10. Di ciascuna delle seguenti espressioni dire innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso), e, se sì, quale:

$$1+1=2, \quad 4-1=3, \quad \frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{7}, \quad 3-7, \quad 5-4=4-5,$$

$$3-(2-1)=(3-2)-1,\quad \frac{51}{\frac{13}{7}}=\frac{51}{7}\cdot 13,\quad \frac{17}{\frac{9}{7}}=\frac{\frac{17}{9}}{7},\quad \frac{\frac{11}{3}}{4},$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2},\quad \frac{1/2}{3/5}=2\cdot\frac{3}{5},\quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5},\quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5},\quad 3-2\geq 1,$$

$$7\geq 4+3,\quad (-1)^5<(-1)^4,\quad -1<3-2<2,\quad 1+2+3+4,\quad \frac{7}{2>1},\quad 1>\pm\sqrt{3}$$

$$1+1=2\vee 2+2=3,\quad 1-1=2\wedge 2+2=3,\quad 3\geq\pi\vee 3<\pi,\quad 3\geq\pi\wedge 3<\pi,$$

$$1\in\mathbb{Q},\quad 1\subset\mathbb{Q},\quad \frac{2}{3}\in\{\mathbb{R}\},\quad \{-1\}\in\{\mathbb{Z}\},\quad \{1,-1/2\}\subset\mathbb{Q}.$$

11. Di ciascuna delle seguenti espressioni discutere innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso) per valori reali generici delle variabili, e, se sì, quale:

$$a+b=b+a,\qquad a-b=b-a,\qquad a-b=-b+a,$$

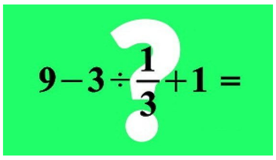
$$(a-2x)^2,\qquad \frac{1}{x-y}=\frac{-1}{y-x},\qquad (a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-c^2$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d+e},\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot c(d+e),$$

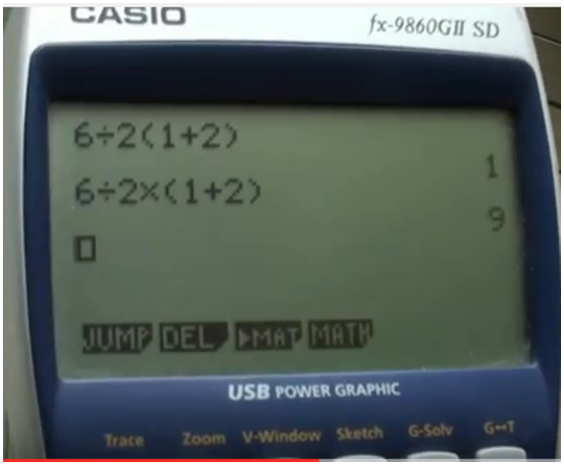
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d+e}{c},\qquad \frac{1}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}=\frac{b}{a}-\frac{d}{c},\qquad \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c},$$

$$x^4-2x+1=x\Big(x^{4-1}-2+\frac{1}{x}\Big),\qquad x-2b=\frac{x+2b}{x^2-4b^2}.$$

12. Un quiz apparso in rete:



13. Discutere la gestione dell'ordine delle operazioni in questo calcolatore:



I connettivi logici che useremo sono $\neg$ la negazione (`not`), $\vee$ la disgiunzione (`or`), $\wedge$ la congiunzione (`and`), $\Rightarrow$ l'implicazione (`if`... `then`...), $\Leftarrow$ l'implicazione inversa, $\Longleftrightarrow$ la doppia implicazione o equivalenza (`iff`). Si rammenta la tabella di verità:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \iff q$
vero	vero	falso	vero	vero	vero	vero	vero
vero	falso	falso	falso	vero	falso	vero	falso
falso	vero	vero	falso	vero	vero	falso	falso
falso	falso	vero	falso	falso	vero	vero	vero

14. Vero, falso, malformato, senza senso?

$$a = b \Rightarrow -b = -a, \quad x^2 + 2x - 3 = 2 \iff x^2 - 3 = 2 - 2x$$

$$x = 2 \vee x = 1 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x-1) = 0,$$

$$\begin{cases} a + b = c \\ a - b = c \end{cases} \Rightarrow \quad a = c, \qquad \begin{cases} a + b = c \\ a - b = c \end{cases} \Leftarrow \quad a = c,$$

$$\begin{cases} a + b = c \\ a - b = c \end{cases} \iff \quad a = c$$

15. Cerchiamo regole di trasformazione per le disuguaglianze del tipo $x \neq y$. Si può aggiungere la stessa quantità ad ambo i membri? Si può moltiplicare per la stessa quantità ambo i membri? Si possono sommare membro a membro? In altre parole, da $x \neq y \wedge z \neq t$ segue $x + z \neq y + t$? Si possono moltiplicare membro a membro?

16. Devo esprimere in formule l'idea che i quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4 sono distinti. Va bene se scrivo $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$?

17. Vero, falso, malformato?

$$\forall x \in \{0,1,2,3\} \quad x^2 > 1; \qquad \exists x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1;$$

$$\exists! x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 2n - 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x > 2; \qquad \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x > 1 \Rightarrow x > 2;$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x \geq 0; \qquad (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0).$$

18. Delle seguenti espressioni dire quali hanno senso compiuto, e in tal caso se sono vere o false o altro:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < 0,$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 < 0,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \geq 0,$$

$$\forall x < 1,$$

$$\{\forall x < 1\},$$

$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

$$\{x^2 - 1 \mid \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$\{\exists x \mid x^2\},$$

$$\{\nexists x \in \mathbb{R}\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid [0,1] \cup [3,5]\},$$

$$\forall x > 0 \vee \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{Z}.$$

19. Vogliamo formalizzare l'affermazione "tutti gli uomini hanno gli stessi diritti". Sia U l'insieme di tutti gli uomini. Quale delle formulazioni seguenti è corretta?

$$\forall U \quad U \text{ ha gli stessi diritti,}$$
$$\forall x \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti,}$$
$$\forall x \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti di } U,$$
$$\forall x, y \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti di } y.$$

20. Ho trovato su un libro la frase "c'è qualcuno che vince la lotteria ogni settimana". Come si potrebbe formalizzare con predicati e quantificatori?

21. Vogliamo formalizzare l'affermazione "gli esseri umani sono tutti diversi". Sia U l'insieme di tutti gli esseri umani. Qualcuna delle formulazioni seguenti è corretta?

$$\forall x \in U \quad x \text{ è diverso,}$$
$$\forall x \in U \quad x \text{ è diverso da } U,$$
$$\forall x, y \in U \quad x \neq y.$$

22. Dare una rappresentazione grafica degli insiemi di numeri reali x che verificano le condizioni seguenti:

$$x < 1 \vee x > 3, \quad x < 1 \wedge x > 3, \quad \neg(x < 0), \quad x < 2 \wedge x = -1,$$
$$x < 1 \Rightarrow 2x < 2, \quad x < 1 \iff x < 0, \quad x > 2 \Rightarrow x^2 > 4, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

23. Sia A l'insieme che comprende i numeri reali > 2 e quelli < -1, e nessun altro. Dire quali dei seguenti insiemi coincidono con A:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \wedge x < -1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \vee x < -1\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x+1) > 0\}, \qquad \{(x-2)(x+1) \mid x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+1) > 0\},$$
$$]-\infty, -1[\cup]2, +\infty], \qquad]-\infty, -1[\cap]2, +\infty]$$

24. Usando le regole di base delle disuguaglianze, dimostrare che se $a, b, c > 0$ allora $a/(b + c) < a/b < (a+c)/b$. Cioè se si parte da una frazione positiva, questa aumenta se si aumenta il numeratore, ma cala se si aumenta il denominatore.

25. Dimostrare che $x/(1+x^2) \leq x$ quando $x \geq 0$, usando i principi base dei numeri reali.

26. La sottrazione è commutativa? È associativa? La divisione è commutativa? È associativa? L'elevamento a potenza è commutativo? È associativo? Come vanno interpretate espressioni come $1 - 2 - 3$, $1/2/3$, 2^{3^4}, a/bc?

27. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x\,, \quad \max\{x, 2x\} > 1 - x\,, \quad \min\{x-1, 1-x\} \geq 0\,,$$
$$\min\{x, -2x\} < \max\{1+2x, -1\}\,, \quad \min\bigl\{x, 3|x-1|\bigr\} < \frac{x}{2}\,,$$
$$\bigl(|x| + |x-1| - 1\bigr)(x^2 - 2x) \geq 0\,.$$

28. Vero o falso? (Per ogni valore reale delle variabili che renda sensata l'espressione).

$$|-x+1| = x+1\,, \quad |-x+1| = |x+1|\,, \quad |-x+1| = |x-1|,$$
$$2\max\{x,y\} = \max\{2x,y\}\,, \quad 3\max\{x,y\} = \max\{3x,3y\}\,,$$
$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
$$\min\{x+y,x-y\} = x-y\,, \quad \max\{x/y,y/x\} = (x+y)/(x-y)\,,$$
$$\min\{x,y,z\} = -\max\big\{x,\max\{y,z\}\big\}\,, \quad \max\{x,-y\} = -\min\{-x,y\},$$
$$\min\{-x,-y\} = -\max\{x,y\}, \quad \max\big\{x+z^2,y+z^2\big\} = z^2+\max\{x,y\}\,,$$
$$\max\Big\{\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\Big\} = \frac{1}{\min\{x^2,y^2\}}, \quad x < \min\{x,y\}, \quad x \geq \max\{x-1,x+1\},$$
$$\max\{x,2y\} = \max\{2x,y\}, \quad \min\{x,2y\} = 2\min\{x,y\},$$
$$\max\{x,y\}+\max\{z,t\} = \max\{x+z,y+t\}\,.,$$
$$\max\{1/x,1/y\} = 1/\min\{x,y\}\,, \quad \max\{x,1/x\} \geq 1\,.$$

29. Disegnare il grafico delle funzioni seguenti:

$$f(x) := \max\{x-1,2-x\}, \quad f(x) := \min\{2x,3x+1\},$$
$$f(x) := \max\{1-x,3+x,2\}, \quad f(x) := \min\{x^2-1,2-2x^2\},$$
$$f(x) := x+\max\big\{x,\min\{2x,3x\}\big\}, \quad f(x) := |x^2-3x+1|,$$
$$f(x) := \max\{2x^2-1,5-x\}, \quad f(x) := \min\{2x^2-1,5-x\}$$

30. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1\,, \qquad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0\,, \qquad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0\,, \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0\,, \qquad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}\,.$$

31. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1\,, \qquad |2-x| \geq 4\,, \qquad |1+4x| - x < 0\,, \qquad |x-3| \geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0\,, \qquad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0\,, \qquad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0\,,$$
$$|-1-3x| - 4\cdot|x| \leq 2x\,, \qquad 5|x| > -1-2x\,, \qquad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

32. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 2-3x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+x-1<0 \\ x^2<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+6x}{2x+1} \leq \dfrac{3x+2}{6x+6} \\ \dfrac{x}{x+1} < 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x \geq |4x+4|-6 \\ x^2-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)|5x+6| < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(x-4)<0 \\ |3x+3| \geq 6+5x \\ |x^2+x-1| < 1 \end{cases}$$

33. Da $a^2 < b^2$ segue che $a < b$? Segue che $|a| < |b|$?

34. Vero o falso:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ si ha che } n^2 - 5n + 6 \geq 0\,,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ si ha che } \frac{1-3n}{4n+1} < 1\,,$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \frac{3n^2-2}{2n^2+1} \geq 1\,.$$

35. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle, non esistenti:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,, \qquad 1+|x+3|-3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,, \qquad x^4+x^2-1\,.$$

Ripasso su esponenziali e logaritmi
Per le disuguaglianze, usare il fatto che quando $a > 1$ valgono le equivalenze $x < y \iff a^x < a^y \iff \log_a x < \log_a y$.
A volte viene comoda la notazione alternativa per gli esponenziali: $\exp_a x = a^x$, che si coordina bene con la notazione usuale per i logaritmi.

36. Vero o falso? O senza senso?

$$\big((n^m)^m\big)^m = n^{3m}, \quad m^{n^3} = (m^3)^n, \quad (a^n)^m = (a^m)^n, \quad (n^n)^n = n^{(n^n)},$$
$$2^{n^3} = (2^3)^n, \quad \frac{\exp(n^2\log 3)}{\exp(n^3 \log 2)} = \exp\Big(\frac{n^2\log 3}{n^3\log 2}\Big)$$
$$\underbrace{2^n \cdot 2^n \cdots 2^n}_{n \text{ fattori}} = 2^{n^2},$$
$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 3^{\log_2 3} = 2, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_3(-3)^2 = -3, \quad 3^{\sqrt{2}} < \sqrt{27}, \quad |2^x| = 2^{|x|}$$
$$\sqrt{2^x} = 2^{x/2}, \quad \sqrt{e^{x^2}} = e^x, \quad a^{x^2} - a^{-x^2} = a^{x^2}\Big(1 - \frac{1}{a^{x^4}}\Big), \quad (\log x)\log\frac{1}{x} = \log^2\frac{x}{x},$$
$$\log 2x^3 = 3\log 2x, \quad \log^2 x = 2\log x, \quad \sqrt{2^x} = \big(\sqrt{2}\big)^x, \quad \log_2\sqrt[3]{2} = \frac{1}{3},$$
$$5^{\log_2 3} < 5^{\log_2 5}, \quad 6^{\log_2 a} = a3^{\log_2 a}, \quad 3^{1/x} = \frac{1}{3^x}, \quad 2^{-x} = \frac{2}{x}, \quad 2^n 3^m = 6^{n+m},$$
$$\log_2\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\log_2 6, \quad \log_a\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big) = \frac{1}{2}\log_a 2 + \log_a\big(1+\sqrt{3/2}\big),$$
$$\log_a(x^2) = (\log_a x)^2, \quad \log_a b^a = b^{\log_a b}, \quad \log_a(\log_b x) = \log_{ab} x,$$
$$\log_{ab} x = \frac{\log_a x}{1+\log_a b}, \quad \sqrt{\log x} = (\log x)^{1/2} = \frac{1}{2}\log x, \quad \log_{-1}(-1)^n = n,$$
$$\log_0 0 = 1, \quad \log_1 1^2 = 2, \quad \log_{-a} x = \frac{1}{\log_a x}, \quad \log_{\sqrt{a}}(x) = 2\log_a x,$$
$$\log_{(a^x)}(x) = \frac{\log_a x}{x}, \quad \log_a(x^2) = 2\log_a x, \quad \log_a(\log_a x) = (\log_a x)^2,$$

$$\frac{\log x}{\log(1+x)} = \log x - \log(1+x), \quad (1+x)^{1/x^2} = \left((1+x)^{1/x}\right)^2, \quad (-a)^x = -a^x,$$
$$\log(a+b)\log(a-b) = \log(a^2-b^2), \quad (\log(e+x))^{1/x} = \frac{1}{x}\log(e+x),$$
$$\log_a(x^2) = 2\log_a|x|, \quad \log_a x = y \iff x = \exp_a y,$$
$$\log_a x < y \iff x < \exp_a y, \quad \exp_{(a^x)} y = \exp_{(a^y)} x = \exp_a(xy),$$
$$\exp_a(\exp_b x) = \exp_{ab} x, \quad (\exp_a x)(\exp_b x) = \exp_{ab} x, \quad 4^x x^2 = (4x)^{x+2},$$
$$\exp_a(\exp_b x) = \exp_b(\exp_a x), \quad a^{b^c} = a^{c^b}, \quad \sqrt{n^n} = n^{\sqrt{n}}, \quad \sqrt{n^n} = (\sqrt{n})^n,$$
$$\sqrt{\log^2 2 + \log 4 + 1} = 1 + \log 2.$$

37. Mostrare che $\log_a x$ ha lo stesso segno di $x-1$, quando $x>0$, $a>1$. Analogamente $a^x - 1$ ha lo stesso segno di x, $\sqrt{x} - 2$ ha lo stesso segno di...

38. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$2^x \geq 4^{1-2x}, \quad \sqrt{3^{x+1}} < 9^{x-1}, \quad \log_2 x \leq 3, \quad \sqrt{\log_2 x} < 4,$$
$$\log_2 \sqrt{x} > \sqrt{2}, \quad \log_3(1-x) < \log_3(1+x)\,.$$

39. Studiare il segno delle espressioni seguenti:

$$2^{x+1}(x^2-2x), \quad 3^x - 9^x, \quad (x-2)\log_3(x+1), \quad \frac{\log_2 x - \log_2 x^2}{x-3}.$$

40. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base, fate conto che qui non abbia importanza):

$$2^{1/x}, \quad \log|x|, \quad \log\big(x+\sqrt{x-1}\big), \quad \log x - \log(1-x), \quad \log\frac{x}{1-x},$$
$$\frac{1}{2-3^x}, \quad \log(2-3^x), \quad \frac{1}{\log(2-3^x)},$$
$$\log\big((\log_2 x)^2 - 1\big), \quad \log\big(1-2x+\sqrt{1+x}\big), \quad \sqrt{x+2-\sqrt{x+1}},$$
$$\log\big(\min\{x-1, 2-x\}\big), \quad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2-1}}, \quad \frac{1}{\min\{-3,-n-1\}}.$$

41. Dire se questo conto è giusto: $2^{n^2} = (2^n)^2 = 2^{n\cdot 2} = 2^{2\cdot n} = (2^2)^n = 4^n$.

42. (Avanzato) Dimostrare che $\log_2 3$ è irrazionale.

43. (Avanzato, per chi conosce i numeri complessi) Partiamo dall'uguaglianza vera $e^{2\pi i} = 1 = e^0 = e^{4\pi i}$, eleviamo primo e ultimo membro alla i e ricaviamo $(e^{2\pi i})^i = (e^0)^i = (e^{4\pi i})^i$. Cosa succede applicando la nota regola delle potenze $(a^x)^y = a^{xy}$? Possiamo fidarci della regola $(a^x)^y = a^{xy}$ quando gli esponenti sono complessi?

44. Vero, falso o senza senso?

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1, \quad \operatorname{sen}^2 x \geq 0, \quad \operatorname{sen}(x^2) \geq 0,$$
$$\cos(x < y), \quad \cos\alpha = \frac{1}{x} \iff \alpha = \frac{1}{\cos x}, \quad \tan x + \tan y = \tan(x+y),$$
$$\cos x \tan x = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}^{-n} x = \frac{1}{\operatorname{sen}^n x}, \arctan^{-1} x = \tan x,$$
$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y \iff \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y, \quad \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y \iff x = y,$$
$$\operatorname{arc}(\operatorname{sen} x) = y \iff \operatorname{sen} x = (\operatorname{arc})^{-1} y, \qquad \operatorname{arcsen} x = \cos y \iff \operatorname{sen} x = \arccos y$$
$$\operatorname{arcsen} x = \arccos y \iff \operatorname{sen} x = \cos y,$$
$$\arctan x = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}, \quad \arctan\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y},$$
$$\operatorname{arcsen}^2 x + \arccos^2 x = 1, \quad \arctan^{-1} x = \frac{1}{\tan x},$$
$$|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen}|x|, \quad |\cos x| = \cos|x|, \quad \cos x = \cos|x|, \quad \big|\operatorname{sen}|x|\big| = |\operatorname{sen} x|.$$

45. Cosa ne pensate di questo calcolo:

$$\operatorname{arcsen}(0) = \operatorname{arc}\big(\operatorname{sen}(0)\big) = \operatorname{arc}(0) = \operatorname{arc}\big(\cos(\pi/2)\big) = \arccos(\pi/2) = \cos^{-1}(\pi/2) =$$
$$= \frac{1}{\cos(\pi/2)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

46. Dire quali delle seguenti espressioni sono predicati, nel senso che diventano vere o false a seconda del valore numerico che diamo alla variabile n:

$$(n+1)^2 \geq n+5, \quad \max\{n, n-2, n^2-4n\}, \quad |n^2-4n+1|,$$
$$(n+4 > n^2) \Rightarrow n < 3, \quad (n-1)/3 \in \mathbb{Z}, \quad \min\{1-n, 2n-4\} \geq 3, \quad n! - n^2.$$

47. Titolo di giornale: “in tre settimane i contagi si sono triplicati”. Quindi in due settimane si sono raddoppiati? In una settimana si sono...

48. Quanti sono i numeri interi da $n+2$ a $2n+1$?

49. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}&1+2\\&2+3+4\\&3+4+5+6\\&4+5+6+7+8\\&5+6+7+8+9+10\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini “...”, oppure con la notazione di sommatoria?

50. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}
&1\\
&1^2+2^2\\
&1^3+2^3+3^3\\
&1^4+2^4+3^4+4^4\\
&1^5+2^5+3^5+4^5+5^5
\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "...", oppure con la notazione di sommatoria?

51. Interpretare (quando sensate) le seguenti espressioni contenenti i puntini di sospensione, dire quanti addendi o fattori ci sono, calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$, tradurli nella notazione della sommatoria (o produttoria):

$$1+2+3+\cdots+n, \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1},$$
$$1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}, \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+2^n, \quad 2^1+2^2+2^3+\cdots+n^n,$$
$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots, \quad 1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n,$$
$$1+2+3+4+\cdots+n^2, \quad 1+2+3+4+\cdots+(n-1)^{n-1}+n^n,$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n^2>n, \quad 1+2+3+4+\cdots+4+3+2+1,$$
$$1+1+1+\cdots+3, \quad 2n+3n+4n+\cdots+n^2,$$
$$1+2+3+\cdots+n+n^2, \quad 1+2+3+\cdots+(n+n^2),$$
$$(1+2+3+\cdots+n)+n^2, \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}=1\cdot 2\cdot 3\cdots n,$$
$$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots \cancel{n}!}{\cancel{n}!}=2n(2n-1)(2n-2)\cdots$$

52. Vero o falso?

$$\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{2n}{3}\cdot\frac{2n-1}{3}\cdots\frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{3}=\frac{(2n+1)!}{(n-2)!\cdot 3^{n+3}},$$
$$(3n)^2=\overbrace{3n+3n+3n+\cdots+3n}^{2n \text{ addendi}},$$
$$3^{n^2}=\overbrace{9\cdot 9\cdot 9\cdots 9}^{n \text{ fattori}}, \qquad 2^{2^n}=\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}^{4n \text{ fattori}}, \qquad x^{n^3}=\overbrace{x^n\cdot x^n\cdot x^n\cdots x^n}^{3n \text{ fattori}}.$$

53. Poniamo $f(x) := x^{-n}+x^{-n+1}+\cdots+x^{n-1}+x^n$. Quanto vale $f(1)$?

54. Per ciascuna delle seguenti definizioni calcolare esplicitamente a_0, a_1, a_2, a_3, quando si riesce a dare un senso:

$$a_n := (2n+1)+(2n+2)+(2n+3)+\cdots+(4n-3),$$
$$a_n := \underbrace{n+n+n+\cdots+n}_{n+1 \text{ addendi}},$$

$$a_n := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}_{n \text{ radici}},$$

55. Riscrivere le seguenti espressioni (quando sensate) usando i puntini "…" invece della sommatoria, e calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2}, \quad \sum_{k=1/2}^{1/8} 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n}, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n^2} k, \quad \sum_{k=n}^{k} (n-k)^2,$$
$$\sum_{k=-n}^{n} (n-k), \quad \sum_{k=\operatorname{sen} n}^{\cos n} \operatorname{arcsen} k, \quad \sum_{k=1}^{4} n^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{n} (-k)^n.$$

Esercizi del 21 dicembre 2021

56. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione delle cifre decimali della successione $a_n := (n+1)^2/(2n^2+1)$.

57. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione (o meno) delle cifre decimali della successione $r_n := a_{n+1}/a_n$, dove a_n è definito da $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_{n+2} := 3a_{n+1} - a_n$.

58. Tradurre le espressioni seguenti nella notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$:

$$n^2 \to +\infty \text{ per } n \to +\infty,$$
$$\text{il limite di } (\operatorname{sen} x)/x \text{ per } x \text{ che tende a } 0 \text{ è } 1,$$
$$g(x) \text{ tende a } \ell \text{ quando } x \text{ si avvicina a } -\infty$$
$$\text{per } n \text{ che tende a } +\infty,\ n^2 - 2n \to +\infty.$$

59. (Teorico) Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f : x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{con } N = 1/\varepsilon,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/(2\varepsilon),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/\sqrt{2\varepsilon},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0 \quad \text{con } N = -\log_2 \varepsilon.$$

60. (Teorico) Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 2} (x-1) = 1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to-1}(2x+1)=-1 \quad \text{con } \delta=\varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2x}{x-1}=2 \quad \text{con } \delta=\varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to0}2^x=1 \quad \text{con } \delta=\begin{cases}\log_2(1+\varepsilon) & \text{se } \varepsilon\ge1,\\ \min\{\log_2(1+\varepsilon),-\log_2(1-\varepsilon)\} & \text{se } 0<\varepsilon<1.\end{cases}$$

61. (Teorico) Verificare che la definizione di $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, cioè $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0\ \forall x\in\operatorname{dom}f:\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}=+\infty \quad \text{con } \delta=\begin{cases}\text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M\le0,\\ \sqrt{2/M} & \text{se } M>0\end{cases}$$
$$\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty \quad \text{con } \delta=\begin{cases}\text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M\le0,\\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M>0\end{cases}$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{|x+1|}=+\infty \quad \text{con } \delta=\begin{cases}\text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M\le0,\\ 1/M & \text{se } M>0\end{cases}$$

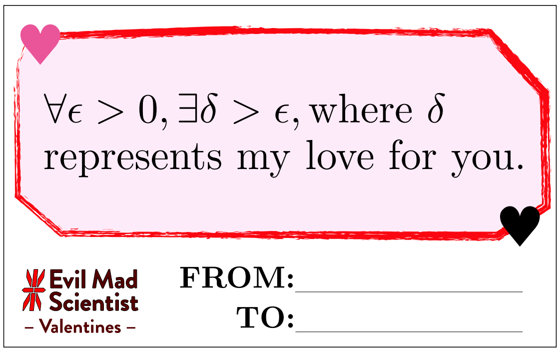
62. (Teorico) Verificare che la definizione di $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, cioè $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{R}\ \forall x\in\operatorname{dom}f:\ x>N\Rightarrow f(x)>M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \quad \text{con } N=M$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty \quad \text{con } N=\begin{cases}\text{non importa quanto,} & \text{se } M<0,\\ \sqrt{M} & \text{se } M\ge0\end{cases}$$
$$\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty \quad \text{con } N=\begin{cases}\text{non importa quanto,} & \text{se } M\le0,\\ \log_2 M & \text{se } M>0\end{cases}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x+1}=+\infty \quad \text{con } N=\begin{cases}-1/2 & \text{se } M\le0,\\ M+\sqrt{M+M^2} & \text{se } M>0\end{cases}$$

63. (Teorico) Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty,$$
$$\lim_{x\to2}|x+1|=3, \qquad \lim_{x\to0}\sqrt[3]{x}=0, \qquad \lim_{x\to-1}\max\{x,1-x\}=2.$$

64. Analizzare la seguente cartolina di San Valentino:



65. Vero, falso, ambiguo, malformato, senza senso?

$$-\sqrt{2}^{+} < -\sqrt{2}, \qquad 1^{-} < 0, \qquad ,3 \cdot (-2)^{-} = -(3 \cdot 2^{-}), \qquad (1^{-})^2 = 1^{+}$$
$$-(2^{+}) = (-2)^{+}, \qquad 1^{+} - (2^{+}) = (-1)^{-},$$
$$(0^{-})^2 = 0^{+}, \qquad ((-2)^{-})^2 = 4^{-},$$
$$((1-\sqrt{2})^{+})^2 - 2(1-\sqrt{2})^{+} - 1 = 0^{+}, \qquad ((-1)^{+})^{-} = -1^{+} = (-1)^{+}, \qquad (a^{-})^{-} = a^{+},$$
$$1^{-} - 1^{+} = 1^{-} + (-1)^{-} = 0, \qquad a^{+} - b^{-} = (a-b)^{+}.$$
$$\text{per } x \to -2^{-} \text{ si ha che } x^2 + 2x = 4^{+} - 4^{+} = 0^{+},$$
$$\text{per } x \to 0^{+} \text{ si ha che } x^2 - x = 0^{+} - 0^{+} = 0^{+},$$
$$\text{per } x \to 0^{+} \text{ si ha che } x^2 - x^3 = 0^{+} - 0^{+} = 0^{+},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big((-1)^n\Big)^2 = \Big(\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\Big)^2, \qquad \lim_{n\to+\infty}\cos\big((-1)^n\big) = \cos\Big(\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\Big),$$
$$\lim_{x\Rightarrow+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow 0, \qquad \lim_{x\to 2x}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x.$$

66. Supponiamo di sapere che $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$, e che non è vero che $f(x) \to 0^{+}$ per $x \to x_0$. Possiamo concludere che $f(x) \to 0^{-}$ per $x \to x_0$?

67. Supponiamo di sapere che non esiste né $\lim_{x\to x_0} f(x)$ né $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Che dire di $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ e di $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$?

Esercizi del 12 aprile 2024

68. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x \to x_0$), tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} 2x, \quad \lim_{x\to 1}(x-1), \quad \lim_{x\to -2}(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} -x, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3, \quad \lim_{x\to-\infty}(2x-4), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x), \quad \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{1-x},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to 0^{+}}\frac{x+1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2},\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1},$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)^2},\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

69. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^3-3x},\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$
$$\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

70. Il seguente conto è corretto?

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{8x^6+x^5-1}}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2}=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{x^6(8+x^{-1}-x^{-6})}}{(x^4+2x^3)-x^4}\big(\sqrt{x^4+2x^3}+x^2\big)=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+x^{-1}-x^{-6}}}{2x^3}\big(\sqrt{x^4(1+2x^{-1})}+x^2\big)=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+0-0}}{2x^3}\big(\sqrt{x^4(1+0)}+x^2\big)=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-2x^2}{2x^3}2x^2=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^4-3x^3+1-4x^4}{x\big(\sqrt{4x^4-3x^3+1}+2x^2\big)}=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+1}{x\big(\sqrt{x^4(4-3x^{-1}+x^{-4})}+2x^2\big)}=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(-3+x^{-3})}{x\big(x^2\sqrt{4-3x^{-1}+x^{-4}}+x^2\big)}=\\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(-3+0)}{x^2\sqrt{4-0+0}+2x^2}=\frac{-3}{2+2}=-\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

71. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x), \quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen} x-\cos x), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}}, \quad \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\big(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\big).$$

72. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x\to+\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-x), \quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2 x}{3^x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen} 2^x}{3^x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},$$

$$\lim_{x\to0^+}3^{1/x}, \quad \lim_{x\to0^-}2^{2/x}, \quad \lim_{x\to+\infty}2^x3^{-x+1}, \quad \lim_{x\to0}2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty}\log_3(3^x-2^x), \quad \lim_{x\to0^+}\frac{\log_2 x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big), \quad \lim_{x\to0^+}2^{-\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_2 x)^2}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to0^+}\frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\log_3(3^x-2^x).$$

73. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen} x)/x\to1$ e $(1-\cos x)/x^2\to1/2$ per $x\to0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to0}\frac{(\cos 2x)-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^3}, \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)}, \quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos^3 x}, \quad \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

74. (Semplificazioni nei limiti: regole e pseudoregole) È vero che se $f(x)\to\ell$ allora vale anche l'uguaglianza $\lim(f(x)+g(x))=\lim(\ell+g(x))$, nel senso che qualora uno dei due membri esista, esiste anche l'altro e sono uguali? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)g(x)=\lim \ell g(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim(f(x)g(x)+h(x))=\lim(\ell g(x)+h(x))$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim(f(x)+g(x))h(x)=\lim(\ell+g(x))h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim(f(x)+g(x))/h(x)=\lim(\ell+g(x))/h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim\exp(f(x)+g(x))=\lim\exp(\ell+g(x))$?

75. Consideriamo il $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}$. Facendo il cambio di variabile $2n = m$ otteniamo $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = \lim_{m\to+\infty}(-1)^m$. Sappiamo che il $\lim_{m\to+\infty}(-1)^m$ non esiste, perché funzione oscillante. Quindi anche il limite iniziale $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}$ non esiste. Sicuro?

76. Vogliamo calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{e^{1/n}-1} - n\Big).$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Ispirandoci al limite notevole $(e^x - 1)/x \to 1$ per $x \to 0$, procediamo così:

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{e^{1/n}-1} - n\Big) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\cdot\frac{1}{n}} - n\right) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{1\cdot\frac{1}{n}} - n\Big) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}(n-n) = 0.$$

Giusto?

Nel seguito i logaritmi in cui non viene indicata la base si devono assumere in base e, ossia $\log x = \log_e x = \ln x$.

77. Ricordando che esponenziale e logaritmo sono continui, che $(\ln(1+x))/x \to 1$, $(e^x - 1)/x \to 1$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori, limiti notevoli precedenti...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1-x^2)}{x^2+2x^3},\quad \lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\log x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x},\quad \lim_{x\to-1}\frac{\log|x|}{x^2-1},\quad \lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty} x(1-e^{1/x}),$$
$$\lim_{x\to0}\frac{(\cos 2x)-1}{x\log(x+1)},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1-\sqrt{x})}{x(x-2)},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1-e^x)(1-e^{2x})},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-\log(e+x)}{x^3-2x}.$$

78. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\big),\quad \lim_{x\to1} 2^{1/(x-1)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\big),\quad \lim_{x\to-\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}),\quad \lim_{x\to+\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to+\infty}(x^4-2^x+\cos x),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to0}\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x\to\pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x\to0$.

79. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b \ln a}$:

$$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}x)^{1/x},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n-1},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\Big)^{n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},$$
$$\lim_{x\to0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x},\quad \lim_{x\to0}\ln\big((e+x)^{1/x}\big),\quad \lim_{x\to0}\big(1+x+x^2\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0}\big(\cos x\big)^{1/x},\quad \lim_{x\to0}\big(\cos x\big)^{1/x^2},\quad \lim_{x\to0}\big(\cos x-\operatorname{sen}x\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0}\big(e^x+e^{2x}-1\big)^{1/\operatorname{sen}x},\quad \lim_{x\to0}\big(2^x+3^x-1\big)^{1/\ln(1+x)},\quad \lim_{x\to0}\big(e^x+\operatorname{sen}x\big)^{1/x}.$$

80. (Avanzato: semplificazioni nei limiti con esponenziali, regole e pseudoregole) È vero che se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)} = \lim \ell^{g(x)}$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}h(x) = \lim \ell^{g(x)}h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}/h(x) = \lim \ell^{g(x)}/h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)} = \lim \ell^{g(x)}/h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}/h(x) = \lim \ell^{g(x)}/h(x)$? Tutti vanno intesi in questo senso: quando esiste il limite al secondo membro allora esiste anche il limite al primo membro e sono uguali. Possono aiutare ipotesi supplementari su ℓ come che $0<\ell<+\infty \wedge \ell\neq1$?

81. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(x-1-\sqrt{x^2-2x}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x}\big)^{x}.$$

82. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big)^{x}.$$