Ottimizzazione per l'automazione

Daniele Casagrande

Dipartimento Politecnico di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Udine, Italy

Significato di “Ottimizzazione”

- In italiano (Enciclopedia Treccani); “**òttimo**: superlativo di buono, in uso accanto alla forma regolare *buonissimo*.”

Significato di “Ottimizzazione”

- In italiano (Enciclopedia Treccani); “**òttimo**: superlativo di buono, in uso accanto alla forma regolare *buonissimo*.”
- In inglese (Oxford Dictionaries); “**optimal**: best or most favourable.”

Significato di “Ottimizzazione”

- In italiano (Enciclopedia Treccani); “**òttimo**: superlativo di buono, in uso accanto alla forma regolare *buonissimo*.”
- In inglese (Oxford Dictionaries); “**optimal**: best or most favourable.”
- Nel linguaggio tecnico italiano il significato è quello mutuato dall’inglese.
  ottimizzare: non (solo) ottenere un risultato buono (o buonissimo) ma “portare a una condizione o a un risultato che siano considerati i migliori possibili.”

Significato di “Ottimizzazione”

- In italiano (Enciclopedia Treccani); “**òttimo**: superlativo di buono, in uso accanto alla forma regolare *buonissimo*.”
- In inglese (Oxford Dictionaries); “**optimal**: best or most favourable.”
- Nel linguaggio tecnico italiano il significato è quello mutuato dall’inglese.
  ottimizzare: non (solo) ottenere un risultato buono (o buonissimo) ma “portare a una condizione o a un risultato che siano considerati i migliori possibili.”
- Osservazione: non si considera il livello *assoluto* di bontà del risultato ma il suo livello *relativo*.

Esempi

Euclide (300 A.C. circa): qual è il rettangolo che, a parità di perimetro, ha area massima?

Esempi

Euclide (300 A.C. circa): qual è il rettangolo che, a parità di perimetro, ha area massima?

Problema di Didone (una generalizzazione del precedente): qual è la curva chiusa che, a parità di lunghezza, massimizza l'area interna?

Esempi

Euclide (300 A.C. circa): qual è il rettangolo che, a parità di perimetro, ha area massima?

Problema di Didone (una generalizzazione del precedente): qual è la curva chiusa che, a parità di lunghezza, massimizza l'area interna?

Problema del produttore di lattine (una versione in $\mathbb{R}^3$): tra tutti i cilindri di volume assegnato, qual è quello che ha superficie minima (ovvero minimizza la quantità di metallo usata)?





Esempi

Euclide (300 A.C. circa): qual è il rettangolo che, a parità di perimetro, ha area massima?

Problema di Didone (una generalizzazione del precedente): qual è la curva chiusa che, a parità di lunghezza, massimizza l'area interna?

Problema del produttore di lattine (una versione in $\mathbb{R}^3$): tra tutti i cilindri di volume assegnato, qual è quello che ha superficie minima (ovvero minimizza la quantità di metallo usata)?





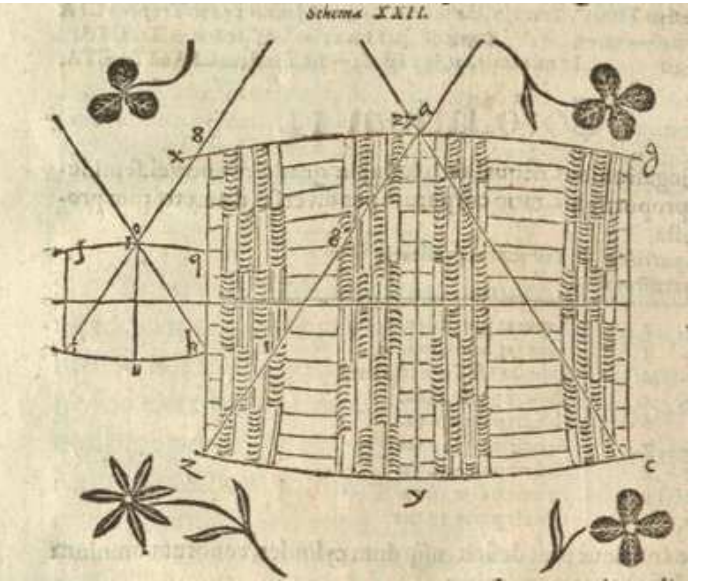
Soluzioni: il quadrato, la circonferenza, $h = 2r$.

Idee per il progetto

- Quale forma deve avere una scatola per minimizzare, a parità di numero di pezzi contenuti, la superficie esterna?
- Se i pezzi hanno una dimensione prevalente (o trascurabile) rispetto alle altre due, conviene che anche le scatole abbiano una dimensione prevalente (trascurabile) rispetto alle altre due?
- Esiste (e se esiste qual è) un modo ottimo di disporre i diversi stadi di lavorazione (rulli, bracci, videocamere, sponde, ...) in modo da minimizzare l'ingombro (il volume) del macchinario? (Attenzione ai vincoli di sequenza e di gravità!!!)

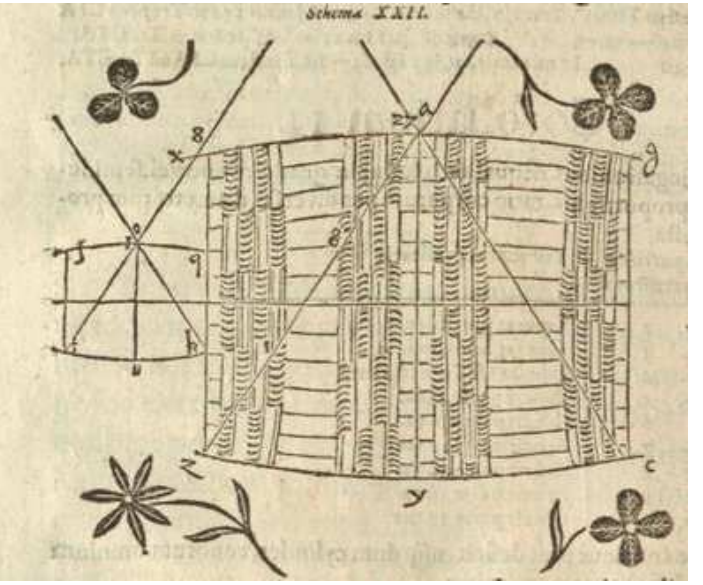
Esempi

Le botti di Keplero (1615, *Nova stereometria doliorum vinariorum*)



Esempi

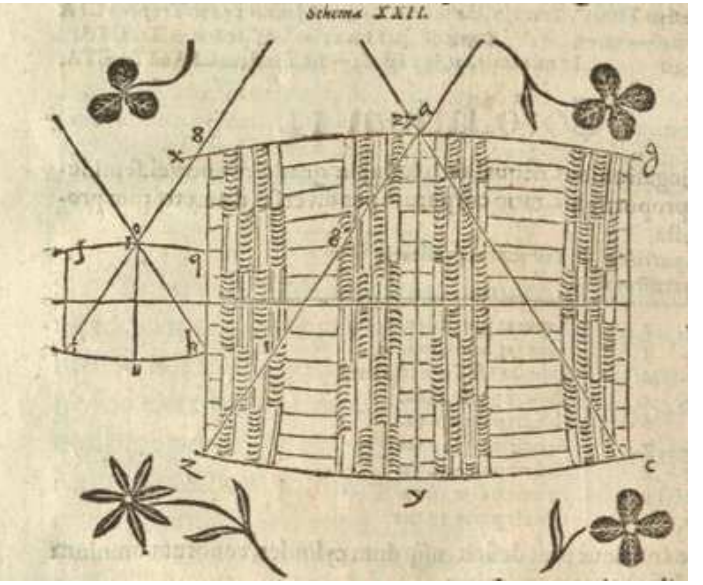
Le botti di Keplero (1615, *Nova stereometria doliorum vinariorum*)



Problema: tra tutti i cilindri di diagonale assegnata, qual è quello di volume massimo? **Soluzione:** $h = \sqrt{2}\, r$.

Esempi

Le botti di Keplero (1615, *Nova stereometria doliorum vinariorum*)



Problema: tra tutti i cilindri di diagonale assegnata, qual è quello di volume massimo? **Soluzione:** $h = \sqrt{2}\, r$.

Problema della selezione della moglie ideale.

Esempi

Problema della moglie ideale:

- vi sono n pretendenti, valutate in ordine casuale;
- al passo k si può *accettare* o *rifiutare definitivamente* (non è ammessa la risposta “Le faremo sapere”);
- al passo n si deve necessariamente accettare.

Si vuole trovare una regola di arresto che massimizzi la probabilità di trovare la miglior pretendente.

Esempi

Problema della moglie ideale:

- vi sono n pretendenti, valutate in ordine casuale;
- al passo k si può *accettare* o *rifiutare definitivamente* (non è ammessa la risposta “Le faremo sapere”);
- al passo n si deve necessariamente accettare.

Si vuole trovare una regola di arresto che massimizzi la probabilità di trovare la miglior pretendente.

Strategia:

- si scartano le prime r pretendenti prendendo nota del valore M della migliore di esse;
- delle restanti $r+1, \ldots$ si accetta la prima il cui valore supera M.

Esempi

Problema della moglie ideale:

- vi sono n pretendenti, valutate in ordine casuale;
- al passo k si può *accettare* o *rifiutare definitivamente* (non è ammessa la risposta “Le faremo sapere”);
- al passo n si deve necessariamente accettare.

Si vuole trovare una regola di arresto che massimizzi la probabilità di trovare la miglior pretendente.

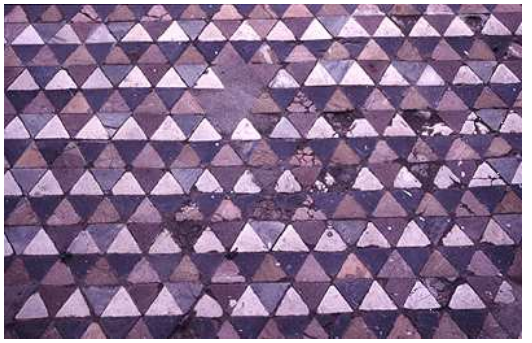
Strategia:

- si scartano le prime r pretendenti prendendo nota del valore M della migliore di esse;
- delle restanti $r+1, \ldots$ si accetta la prima il cui valore supera M.

Valore ottimo di r: $r \simeq \lfloor n/e \rfloor$.

Esempi

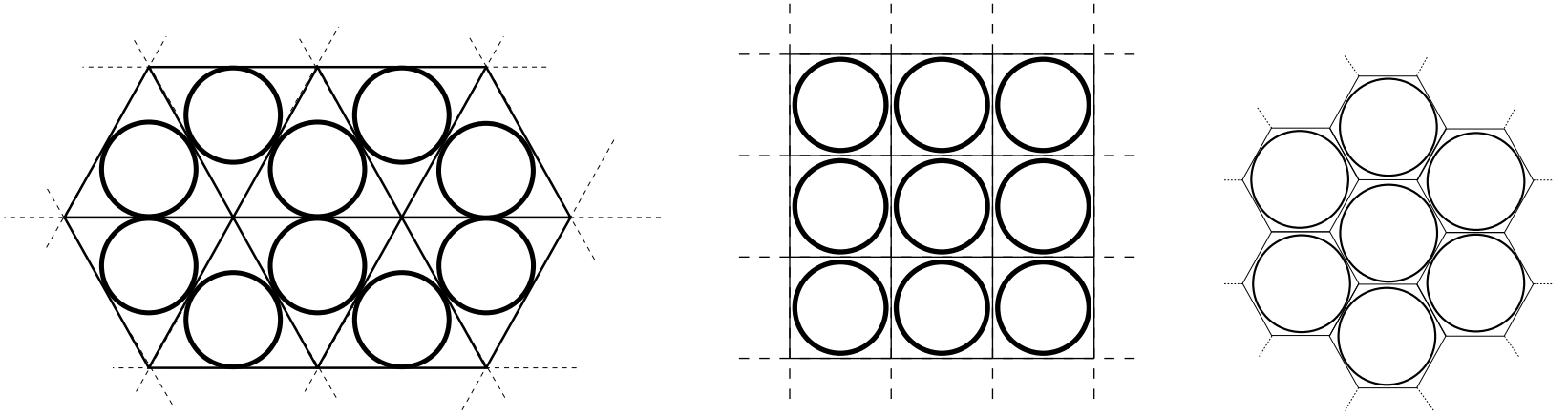
Problema: tra tutte le pavimentazioni (tassellature) periodiche del piano, qual è quella che massimizza il rapporto area/perimetro?







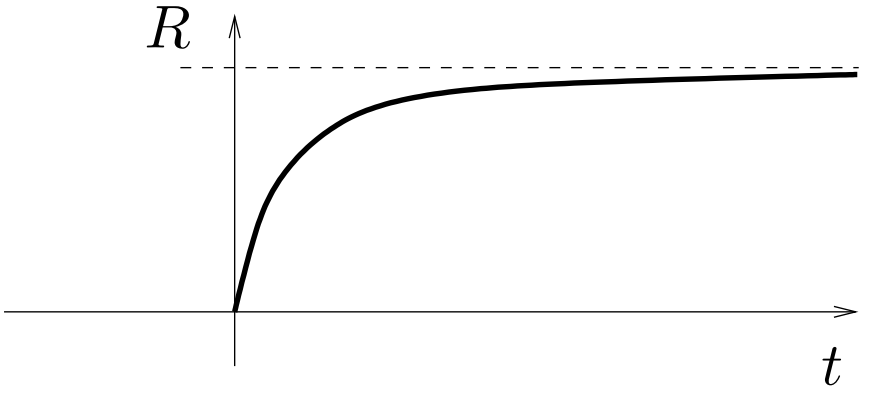
Esempi



- **Triangoli:** Area cerchio/area triangolo $\simeq 0,60$.
- **Quadrati:** Area cerchio/area quadrato $\simeq 0,78$.
- **Esagoni:** Area cerchio/area esagono $\simeq 0,91$.

Esempi

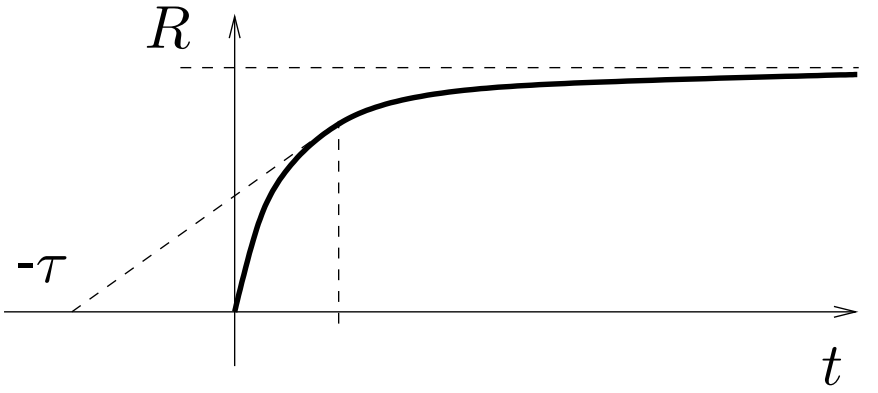
Raccolta del nettare in tempo minimo. Se il nettare raccolto da una singola ape da un singolo fiore è una funzione di tipo esponenziale



e se il tempo medio per andare da un fiore ad un altro è τ, qual è la strategia ottima (nel senso del tempo minimo)?

Esempi

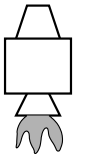
Raccolta del nettare in tempo minimo. Se il nettare raccolto da una singola ape da un singolo fiore è una funzione di tipo esponenziale



e se il tempo medio per andare da un fiore ad un altro è τ, qual è la strategia ottima (nel senso del tempo minimo)?

Esempi

Si consideri una navicella spaziale che $x(0) = x_0$ dal suolo lunare e con una velocità $v(0) = v_0$ (diretta verso la Luna).



$x(t_0), v(t_0)$

Che spinta bisogna fornire in modo da farla arrivare al suolo usando la minima quantità di carburante?

Esempi

Strategia aziendale di investimento/vendita. Un'azienda produce un bene x. Nel k-esimo anno una porzione $u(k) \in [0, 1]$ del valore totale della produzione $x(k)$ viene reinvestita mentre la restante porzione viene venduta.

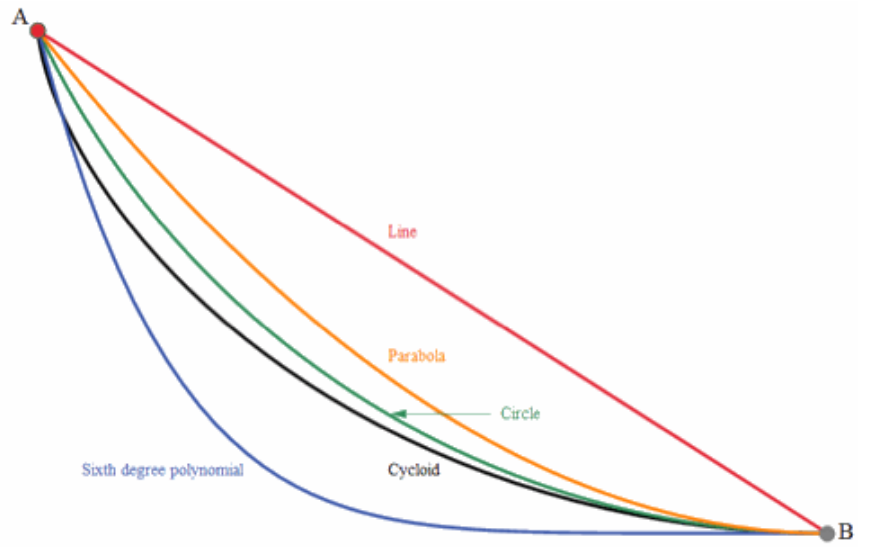
- Incremento della produzione: $x(k+1) = x(k) + Qu(k)x(k)$;
- Guadagno: $g(k) = (1 - u(k))x(k)$.

Si vuole massimizzare il guadagno su un certo numero di anni, ovvero trovare

$$\max_{u(0),\ldots,u(N)} \left\{ P \sum_{k=0}^{N} (1 - u(k))x(k) \right\} .$$

Esempi

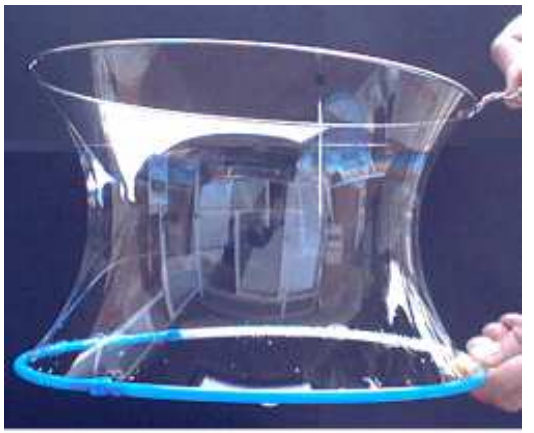
Brachistocrona (Johann Bernoulli, 1697):

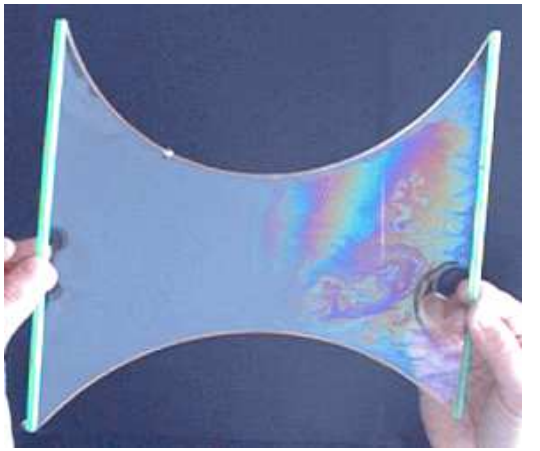


Qual è la curva che porta una palla da A a B, sfruttando solo la gravità e in assenza di attrito, in tempo minimo?

Esempi

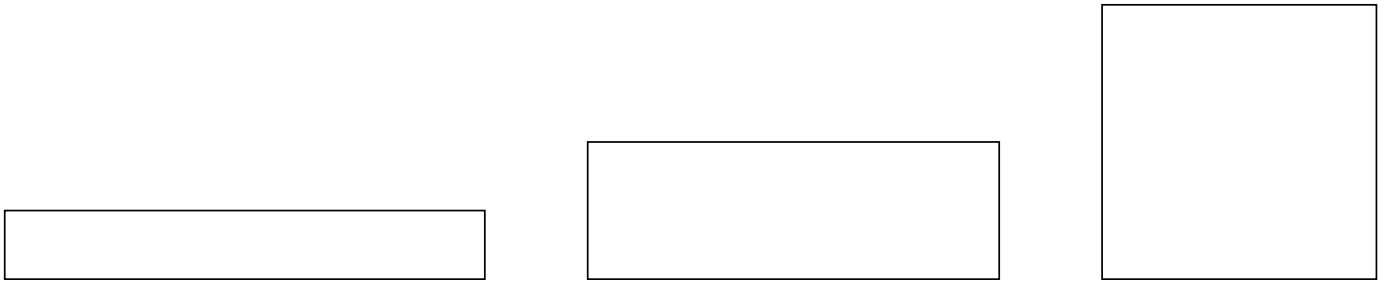
Problema di Plateau (o delle bolle di sapone) (Lagrangia 1760).
Risolto da Douglas nel 1930 (medaglia Fields nel 1936).





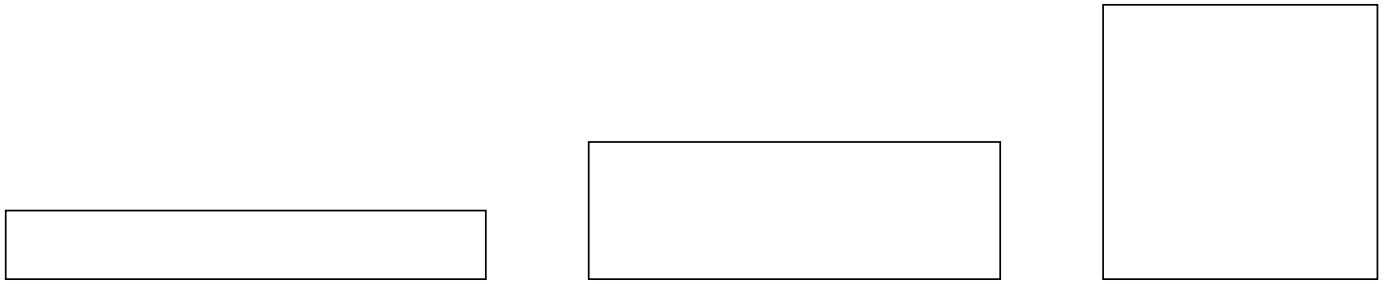
Struttura di un problema di ottimizzazione

Torniamo al problema di Euclide: qual è il rettangolo che, a parità di perimetro, ha area massima?



Struttura di un problema di ottimizzazione

Torniamo al problema di Euclide: qual è il rettangolo che, a parità di perimetro, ha area massima?



Detto P il perimetro e detti x e y i due lati, il problema si può scrivere come

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ y\in\mathbb{R}}} xy\,, \qquad \text{tali che } \; 2x+2y=P\,, x\geq 0\,, y\geq 0\,.$$

ovvero

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ y\in\mathbb{R}}} \{-xy\}\,, \qquad \text{tali che } \; 2x+2y=P\,, \quad x\geq 0\,, \quad y\geq 0\,.$$

Struttura di un problema di ottimizzazione

In generale, un problema di ottimizzazione (statica) consiste nel trovare, tra tutti gli x appartenenti a un certo insieme di definizione $\mathcal{X}$ e che verificano un insieme di *vincoli*, ovvero di uguaglianze del tipo

$$h(x) = 0$$

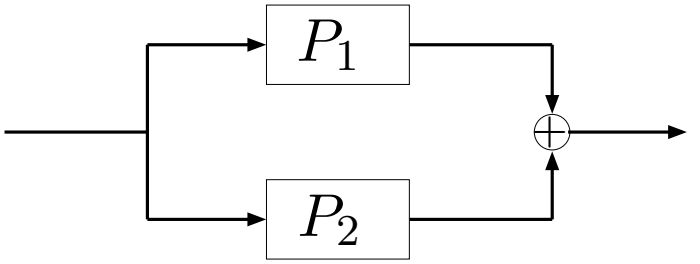
e disuguaglianze del tipo

$$g(x) \leq 0\,,$$

quello che minimizza la funzione costo f (soluzione *ottima*). In simboli

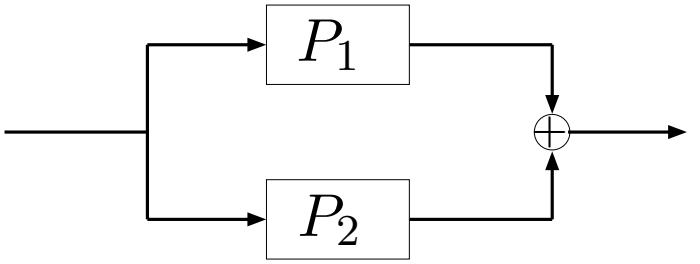
$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)\,, \qquad \text{tale che } h(x) = 0\,, g(x) \leq 0\,.$$

Pianificazione della produzione



Costi: fabbricazione dell'impianto (C_i), funzionamento (per unità prodotta, $C_{f,i}$), materia prima (per unità, C_m).
Velocità massima di produzione: u_i.
Problema: Produrre (almeno) R oggetti in T unità di tempo minimizzando i costi.

Pianificazione della produzione

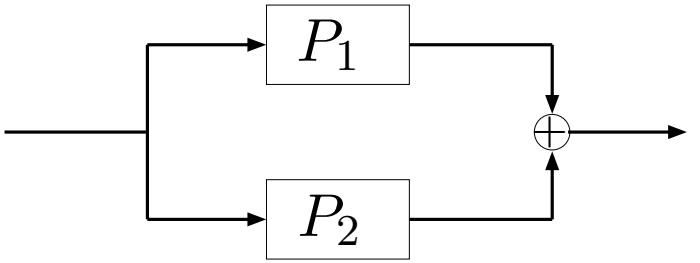


Costi: fabbricazione dell'impianto (C_i), funzionamento (per unità prodotta, $C_{f,i}$), materia prima (per unità, C_m).
Velocità massima di produzione: u_i.
Problema: Produrre (almeno) R oggetti in T unità di tempo minimizzando i costi.

$$\min_{\substack{y_i \in \{0,1\} \\ x_i \in [0,1]}} \left\{ \sum_{i=1}^{2} C_i \, y_i + \sum_{i=1}^{2} C_{fi} \, u_i \, x_i \, y_i \, T + \alpha \, C_m \, \sum_{i=1}^{2} u_i \, x_i \, y_i \right\} ,$$

$$(u_1 \, x_1 \, y_1 + u_2 \, x_2 \, y_2) T \geq R \, .$$

Pianificazione della produzione

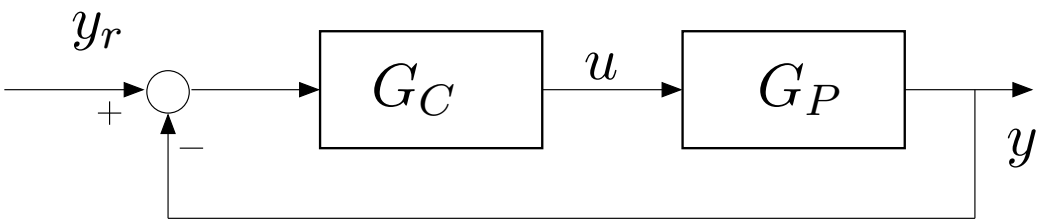


Costi: fabbricazione dell'impianto (C_i), funzionamento (per unità prodotta, $C_{f,i}$), materia prima (per unità, C_m).
Velocità massima di produzione: u_i.
Problema: Produrre (almeno) R oggetti in T unità di tempo minimizzando i costi.

$$\min_{\substack{y_i \in \{0,1\} \\ x_i \in [0,1]}} \left\{ \sum_{i=1}^{2} C_i \, y_i + \sum_{i=1}^{2} C_{fi} \, u_i \, x_i \, y_i \, T + \alpha \, C_m \sum_{i=1}^{2} u_i \, x_i \, y_i \right\} ,$$

$$(u_1 \, x_1 \, y_1 + u_2 \, x_2 \, y_2) T \geq R \, .$$

Ottimizzazione (non convessa) di un controllore PI



Dato il sistema LTI descritto dalla F.d.T. G_P, si vuole progettare un controllore proporzionale-integrativo, cioè una legge di controllo

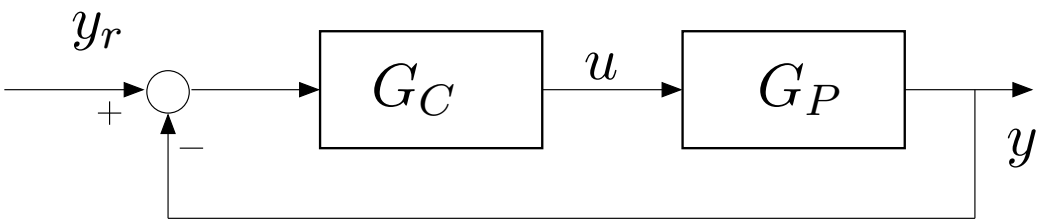
$$u(k_i, k_p, t) = k_p(y_r(t) - y(k_i, k_p, t)) + k_i \int_0^t (y_r(\tau) - y(k_i, k_p, \tau))d\tau \,,$$

che minimizza l'errore

$$IE(k_p, k_i) = \int_0^\infty e(k_i, k_p, t)dt \,,$$

garantendo un certo margine di robustezza [1].

Ottimizzazione (non convessa) di un controllore PI



Formulazione del problema. Si può dimostrare che $IE(k_i, k_p) = 1/k_i$. Inoltre, detti $L(k_i, k_p) = G_P G_C(k_i, k_p)$, $S(k_i, k_p) = 1/(1 + L(k_i, k_p))$, $M_s(k_i, k_p) = \max_\omega |S(k_i, k_p, j\omega)|$, il vincolo sulla robustezza diventa $M_s(k_i, k_p) \leq \overline{M}$. Allora il problema può essere formulato come segue:

$$\min_{k_i, k_p} \frac{1}{k_i}\,, \qquad\qquad M_s(k_i, k_p) \leq \overline{M}\,.$$

[1] K.J. Astrom, H. Panagopoulos, T. Hagglund, “Design of PI Controllers based on Non-Convex Optimization”, *Automatica*, 1998.

Flessibilità di processo

Si abbia un processo industriale caratterizzato da

- incertezza sui parametri di modello $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_L)$ e sulle variabili esogene di ingresso $v = (v_1, \ldots, v_M)$;
- le variabili di controllo $u = (u_1, \ldots, u_P)$;
- le condizioni di funzionamento $f_n(\theta, v, u) \leq 0$, $n = 1, \ldots, N$.

Si vuole capire se il processo è fattibile.

Flessibilità di processo

Si abbia un processo industriale caratterizzato da

- incertezza sui parametri di modello $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_L)$ e sulle variabili esogene di ingresso $v = (v_1, \ldots, v_M)$;
- le variabili di controllo $u = (u_1, \ldots, u_P)$;
- le condizioni di funzionamento $f_n(\theta, v, u) \leq 0$, $n = 1, \ldots, N$.

Si vuole capire se il processo è fattibile.

Verifica di fattibilità. Per ogni possibile valore di θ e v si considera il valore massimo delle f_n e si cerca un valore u che renda questo valore minore di zero. Ovvero, il processo è **fattibile** se

$$\min_{u_i \in [u_{i1}, u_{i2}]} \left\{ \max_{n \in \{1,\ldots,N\}} \left[\max_{\substack{\theta_j \in [\theta_{j1}, \theta_{j2}] \\ v_k \in [v_{k1}, v_{k2}]}} f_n(\theta, v, u) \right] \right\} \leq 0 \,.$$

Flessibilità di processo

Se il processo è fattibile, si vuole capire qual è la sua **flessibilità**. Piú precisamente:

- il valore nominale di θ_j sia $\theta_{j,nom}$;
- l'intervallo di variabilità sia dipendente da una variabile δ e sia $\Theta_j(\delta) = [\theta_{j,nom} - \delta\Delta_{j1}, \theta_{j,nom} + \delta\Delta_{j2}]$;
- si vuole calcolare il valore massimo di δ.

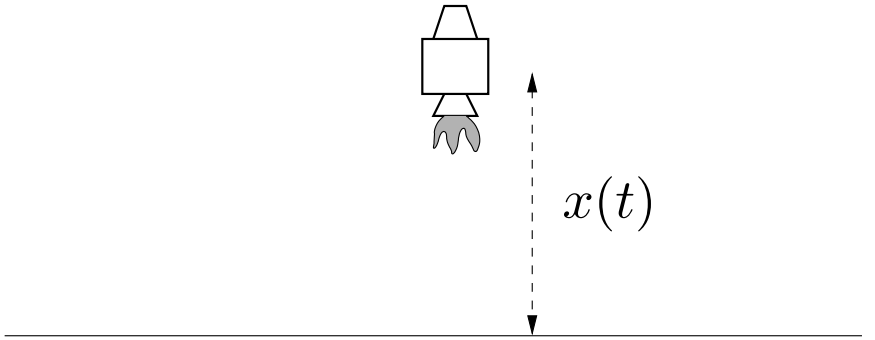
Il problema è dunque

$$\min_{\delta} \{-\delta\}$$

$$\min_{u_i \in [u_{i1}, u_{i2}]} \left\{ \max_{n \in \{1,\ldots,N\}} \left[\max_{\substack{\theta_j \in \Theta_j(\delta) \\ v_k \in [v_{k1}, v_{k2}]}} f_n(\theta, v, u) \right] \right\} \leq 0 \,.$$

Struttura di un problema di controllo ottimo

Torniamo al problema dell'allunaggio



Siano $x(t)$, $v(t)$ e $m(t)$ la distanza dal suolo, la velocità e la massa all'istante t. Sia g_L l'accelerazione di gravità lunare e sia u la forza propulsiva. I vincoli dinamici sono

$$\dot{x}(t) = v(t)\,, \quad \dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} - g_L\,, \quad \dot{m}(t) = -ku(t)\,.$$

Struttura di un problema di controllo ottimo

Altri vincoli sono dati dalle condizioni iniziali e finali

$$x(0) = x_0\,, \quad x(t_1) = 0\,, \quad v(0) = v_0\,, \quad v(t_1) = 0\,, \quad m(0) = m_0$$

e dai vincoli operativi

$$u(t) \in [0, U]\,, \quad m(t) \geq M_0\,, \quad x(t) \geq 0\,.$$

Il funzionale di costo è $F(x, v, m, u) = -m(t_1)$. Dunque il problema si può scrivere come

$$\min_{u \in \mathcal{C}(\mathcal{R}_+, [0,U])} \{-m(x_0, v_0, m_0, u(\cdot), t_1)\}\,,$$

tale che $x(t_1) = 0\,, v(t_1) = 0\,, x(t) \geq 0\,.$

Struttura di un problema di controllo ottimo

In generale, in un problema di controllo ottimo (ottimizzazione dinamica)

- il sistema dinamico è descritto da un'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0$$

  (o da un'equazione alle differenze $x(t+1) = f(x(t), u(t))$);

- i segnali di controllo $u : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{U}$ (o $u : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$) sono *ammissibili* se generano traiettorie ammissibili ($x(t) \in \mathcal{X}$ per ogni t);

- il *controllo ottimo* è, tra tutti i controlli ammissibili, quello che minimizza un funzionale

$$F(x, u) .$$

Il problema d-LQR

Il problema d-LQR (*discrete-time Linear Quadratic Regulator*) è caratterizzato da

- un'equazione dinamica lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)\,;$$

- un funzionale di costo quadratico ($Q \succeq 0$, $R \succ 0$)

$$J(x,u) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^\top Q x(k) + u(k)^\top R u(k)\,.$$

Il controllo ottimo è $u^*(k) = -(R + B^\top P B)^{-1} B^\top P A x(k)$, con

$$P = Q + A^\top P A - A^\top P B (R + B^\top P B)^{-1} B^\top P A$$

Model Predictive Control

L'idea del "controllo a predizione di modello" (MPC) (o "controllo *receding horizon*" o "programmazione lineare dinamica") è semplice: dato il sistema dinamico

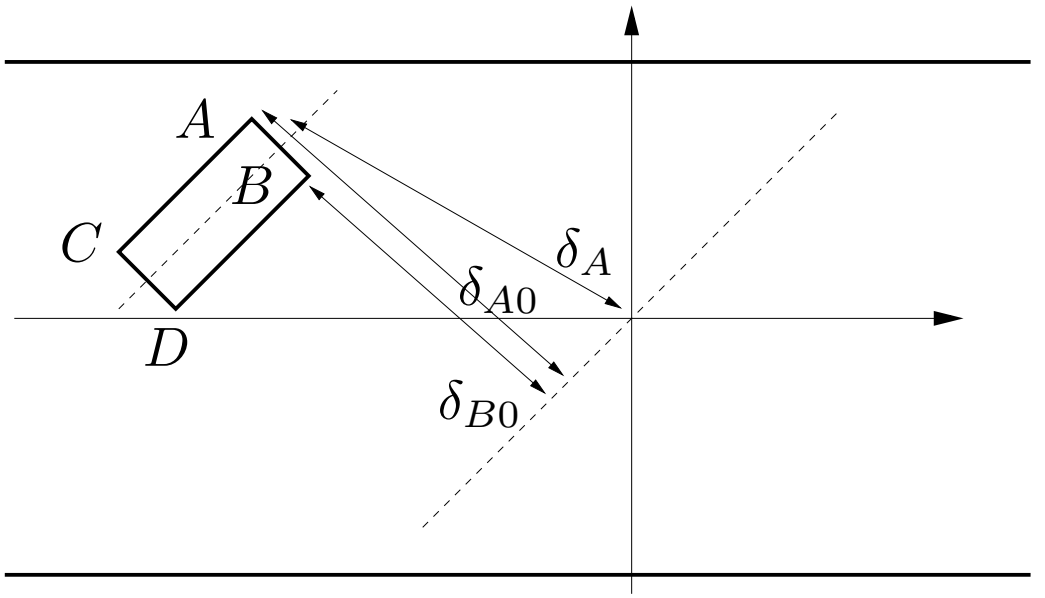
$$x(t+1) = f(x(t), u(t)) \,,$$

all'istante t si risolve il problema

$$\min_{u(t),\dots u(t+T)} \left\{ \sum_{\tau=t}^{t+T} J(x(\tau), u(\tau)) \right\} \,,$$

ma si applica solo il controllo $u(t) = u^*(t)$ (e si passa all'istante $t+1$).
Nota bene: Si deve risolvere un problema di ottimizzazione ad ogni istante!!!

Problemi di ottimizzazione nell'allineamento dei pezzi



L'istante di contatto è quello che minimizza

$$\phi(t) = \max\{\delta_A(t)^2, \delta_B(t)^2, \delta_C(t)^2, \delta_D(t)^2, \mu(\delta_{A0}(t)^2 + \delta_{B0}(t)^2)\}\,.$$

Il paramtero μ può essere selezionato per privilegiare il contatto bilatero.

Idee per sviluppi futuri

- Minimizzare il tempo tra due pezzi consecutivi,
- minimizzare la dimensione delle sponde,
- minimizzare le dimensioni del nastro.