



ELIO CABIB

Lezioni di Analisi 2

ELIO CABIB

cabib@uniud.it

professore di Analisi Matematica

Università di Udine

Lezioni di Analisi 2

Indice

1	Lo spazio e le funzioni	3
1.1	Richiami di Algebra Lineare	3
1.2	Funzioni di una variabile a valori vettoriali	14
1.3	Funzioni di più variabili	18
2	Curve e integrali curvilinei	19
2.1	Considerazioni generali, definizioni ed esempi	19
2.2	Lunghezza di una curva e integrali curvilinei	25
2.3	Elementi di geometria differenziale delle curve in \mathbf{R}^3	31
2.4	Integrazione dei campi vettoriali	37
3	Equazioni differenziali	43
3.1	Questioni introduttive	43
3.2	Equazioni risolubili per integrazione diretta	44
3.3	Equazioni lineari del I ordine	50
3.4	Equazioni a variabili separabili	53
3.5	Equazioni lineari	58
3.6	Unicità per il Problema di Cauchy	72
3.7	Sistemi lineari a coefficienti costanti	75
3.8	Equazioni speciali	79
4	Calcolo differenziale	81
4.1	Derivate direzionali e derivate parziali	81
4.2	Funzioni differenziabili	83
4.3	Derivate successive e formula di Taylor	91
4.4	Espressione delle derivate in vari sistemi di coordinate	94
4.5	Massimi e minimi	94
4.6	Funzioni convesse	98
4.7	Funzioni omogenee	103
5	Funzioni implicite ed estremi vincolati	105
5.1	Funzioni implicite	105
5.2	Diffeomorfismi e varietà differenziabili	110
5.3	Punti stazionari vincolati, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange	113
5.4	Studio globale dei luoghi di zeri	115
6	Calcolo integrale	117
6.1	L'integrale Riemann	117
6.2	Formula di riduzione	120
6.3	Funzione densità e cambio di variabile	123
6.4	Integrali superficiali	126
6.5	Integrali impropri	127

6.6	Integrali dipendenti da un parametro	130
7	Forme differenziali lineari	135
7.1	Questioni introduttive e definizioni	135
7.2	Forme esatte	137
7.3	Formule di Gauss-Green	140
8	Successioni e serie di funzioni	145
8.1	Convergenza puntuale	145
8.2	Spazi metrici completi	150
8.3	Spazi di Banach e di Hilbert	151
8.4	Convergenza uniforme	154
8.5	Passaggio al limite per la derivata e l'integrale	158
8.6	Serie di funzioni	162
8.7	Gli spazi L^p	169
9	Serie di Fourier	173
9.1	Serie trigonometriche	173
9.2	Proiezione su un sottospazio	180
9.3	Completezza del sistema trigonometrico in L^2	183
9.4	Convergenza puntuale	185
	Bibliografia	189

Capitolo 1

Lo spazio e le funzioni

1.1 Richiami di Algebra Lineare

Uno spazio vettoriale V sul corpo K è un insieme munito di un'operazione di somma che soddisfa gli assiomi di gruppo commutativo (o abeliano) e di un'operazione di prodotto tra i suoi elementi e quelli di K con le proprietà

- 1 $1 \cdot u = u$,
- 2 $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,
- 3 $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,
- 4 $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

I punti di V si chiamano anche *vettori*, gli elementi di K *scalari*.

Di esempi di spazi vettoriali ve ne sono un'infinità, ma quelli più comuni, quelli che più ci interessano in questo corso, sono \mathbf{R}^n e \mathbf{C}^n che sono il prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \dots \times \mathbf{R}$, o $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \dots \times \mathbf{C}$, di n copie di \mathbf{R} o di \mathbf{C} . Gli elementi dei due spazi sono le n -uple ordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) con $x_i \in \mathbf{R}$ o (z_1, z_2, \dots, z_n) con $z_i \in \mathbf{C}$. Il primo è uno spazio vettoriale reale, cioè sul corpo \mathbf{R} , il secondo uno spazio vettoriale complesso. Ma siccome ogni numero complesso z_i è già una coppia di numeri reali, essendo $z_i = (x_i, y_i) = x_i + iy_i$, \mathbf{C}^n può essere identificato con \mathbf{R}^{2n} e considerato anche uno spazio vettoriale reale.

Gli elementi di \mathbf{R}^n possono essere visti sia come *punti* geometrici, sia come *vettori* se si vuole mettere più l'accento sul significato algebrico. Pensato come vettore, un elemento \mathbf{x} si identifica con la *freccia orientata* che va da un punto qualsiasi $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ al punto $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ purché si abbia

$$Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

in particolare anche dall'origine $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ a \mathbf{x} stesso pensato come punto. Infatti ogni vettore può essere considerato anche come una *differenza* tra due punti. I numeri reali x_i , $i = 1, \dots, n$, si chiamano *coordinate* se riferite a \mathbf{x} come punto e *componenti* se riferite a \mathbf{x} come vettore.

Definizione 1.1 - Due vettori $u, v \in V$ si dicono **paralleli** se uno di essi è nullo oppure se esiste uno scalare λ tale che $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$.

In modo equivalente, u e v sono paralleli se esistono due scalari λ e μ non entrambi nulli tali che $\lambda u + \mu v = \mathbf{0}$.

Fissato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, il vettore $t\mathbf{v}$ descrive, al variare di $t \in \mathbf{R}$, tutti i vettori paralleli a \mathbf{v} o, se visti come punti, tutti i punti allineati lungo la retta per l'origine e parallela a \mathbf{v} . Si definisce così la funzione su \mathbf{R} a valori in \mathbf{R}^n

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t) = t\mathbf{v}$$

che associa ad ogni valore del parametro t una posizione particolare del punto $\mathbf{x}(t)$ nello spazio, in questo caso sulla retta per $\mathbf{0}$ e parallela a \mathbf{v} . Nel caso invece della funzione

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$$

la retta è parallela alla precedente e passante per un certo \mathbf{x}_0 , il passaggio per un punto e la direzione la identificano univocamente. Se si interpreta t come la variabile temporale si riconosce la famosa legge del moto rettilineo uniforme che avviene a velocità \mathbf{v} . Naturalmente t può variare in un intervallo, allora si ottiene una porzione di quella retta, un segmento o una semiretta.

Una retta può essere determinata anche imponendo il passaggio per due punti \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 . Ma allora la sua direzione è quella del vettore $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, quindi, come nel caso precedente, l'equazione è

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

Si noti che per $t \in [0, 1]$ viene percorso il segmento di estremi \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 e in questo caso particolare l'espressione

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0, \quad t \in [0, 1],$$

viene detta *combinazione convessa* di \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 .

Definizione 1.2 - Un insieme $C \subset \mathbf{R}^n$ si dice **convesso** se per ogni $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ si ha

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0 \in C \quad \forall t \in [0, 1].$$

Altri esempi di spazi vettoriali sono i polinomi, le funzioni definite su un certo dominio comune a valori in uno spazio vettoriale, le matrici ecc.

Definizione 1.3 - Si chiama **combinazione lineare** degli h vettori u_1, u_2, \dots, u_h un'espressione del tipo

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h$$

dove i λ_i sono numeri reali.

Definizione 1.4 - I vettori u_1, u_2, \dots, u_h si dicono **linearmente indipendenti** se

$$(1.1) \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, h.$$

Una generalizzazione della nozione di parallelismo è quella di dipendenza lineare, cioè la negazione dell'indipendenza lineare appena vista. I vettori u_1, u_2, \dots, u_h sono *linearmente dipendenti* se esiste una loro combinazione lineare nulla con coefficienti λ_i non tutti nulli. In tal caso uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri. Viceversa, è evidente che se un vettore di una famiglia di vettori si può esprimere come combinazione lineare degli altri allora formano un sistema linearmente dipendente.

Un sottospazio vettoriale V' di V è un insieme chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per scalari.

Esempi di sottospazi sono quelli cosiddetti *banali* $\{0\}$ e V .

Esercizio 1.1 - Se V_1 e V_2 sono sottospazi, dimostrare che $V_1 \cap V_2$ e lo spazio **somma**

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

sono anch'essi sottospazi, ma in generale $V_1 \cup V_2$ non lo è. Se $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ $V_1 + V_2$ si chiama **somma diretta** e si indica con $V_1 \oplus V_2$.

Esercizio 1.2 - Dimostrare che se H è un sottospazio di V la relazione

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in H$$

è di equivalenza e l'insieme quoziente, che si indica con V/H , è uno spazio vettoriale.

Dato un sottoinsieme qualsiasi $S \in V$, l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di elementi scelti in S in tutti i modi è per costruzione un sottospazio vettoriale di V . Si chiama *spazio generato* da S e si indica con $[S]$. Gli elementi di S si chiamano *generatori* di questo sottospazio. Si può dimostrare che se un certo insieme S di generatori di V è formato da vettori linearmente indipendenti allora l'insieme $S' = S \cup \{v\}$ che si ottiene unendo a S un elemento qualsiasi $v \in V$ è linearmente dipendente.

Definizione 1.5 - Si chiama **base** dello spazio vettoriale V ogni insieme di generatori linearmente indipendenti di V .

Se V ammette una base finita è ben noto che tutte le basi devono avere lo stesso numero di elementi e che questo numero si chiama *dimensione* di V . Se invece per ogni sistema finito di vettori indipendenti esiste un vettore da essi indipendente, allora diciamo che V ha dimensione infinita. La dimensione di \mathbf{R}^n è finita e vale n . Tra le infinite possibili, una base di \mathbf{R}^n , detta *canonica* o *standard*, è quella dei vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

È stata chiamata così perché è la più comune ed ha il privilegio di essere particolarmente semplice. Che si tratta di un insieme di generatori è evidente, basta scrivere ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nella forma

$$\mathbf{x} = x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Inoltre sono linearmente indipendenti in quanto

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, 0, 0, \dots, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n(0, 0, 0, \dots, 1) \\ = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Alcuni spazi vettoriali sono muniti di *prodotto scalare*. Se V è reale si tratta di un'operazione $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ con le seguenti proprietà

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 1. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in \mathbf{R}$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 4. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$.

Se V è complesso è a valori in \mathbf{C} e la $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ va sostituita con la

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2. \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in V.$$

Conseguenze immediate delle proprietà precedenti sono

- $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ nel caso reale,
- $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$ nel caso complesso,
- $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$,
- $\langle 0, u \rangle = 0$,

sempre per ogni $u, v, w \in V$. Il prodotto scalare (reale) più comune in \mathbf{R}^n , quello che useremo noi, è definito da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=0}^n x_i y_i.$$

Simile è quello (complesso) di \mathbf{C}^n

$$z \cdot w = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n = \sum_{i=0}^n z_i \bar{w}_i.$$

A proposito dell'ultima, $\langle u, v \rangle = 0$ non implica che uno dei due vettori, u o v , sia nullo. Ad esempio in \mathbf{R}^2 il prodotto scalare tra i vettori non nulli $(2, 1)$ e $(-1, 2)$ è nullo. Il motivo sta nel fatto che sono ortogonali, cosa che possiamo assumere come definizione.

Definizione 1.6 - Diciamo che i due vettori $u, v \in V$ sono tra loro ortogonali, e si scrive $u \perp v$, se $\langle u, v \rangle = 0$.

Definiamo u^\perp l'insieme

$$u^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0\}$$

e se S è un sottoinsieme qualunque di V definiamo

$$S^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall u \in S\}.$$

Esercizio 1.3 - Dimostrare che u^\perp e S^\perp sono sottospazi vettoriali di V e che $0^\perp = V$ e $V^\perp = 0$.

La proprietà $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ garantisce che $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ ha sempre senso, non è mai negativa e si annulla solo per $u = 0$. Così questa espressione può essere usata per definire la *norma indotta dal prodotto scalare*. In generale uno spazio vettoriale V , che sia reale o complesso, può essere munito di una *norma*, cioè di un'applicazione $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$ che gode delle seguenti proprietà

- $\|1$. $\|u\| \geq 0 \forall u \in V$ e $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$,
- $\|2$. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall u \in V \forall \lambda \in \mathbf{R} \ (\forall \lambda \in \mathbf{C} \text{ se } V \text{ è complesso}),$
- $\|3$. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V,$

e allora si chiama *spazio normato*. Ma se in V è definito un prodotto scalare la nozione di norma che in modo naturale discende dal prodotto scalare è quella indotta, definita da

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad \forall u \in V.$$

Si verifichi per esercizio che questa definizione soddisfa le proprietà caratteristiche della norma.

Indicheremo con $|\mathbf{x}|$ la norma in \mathbf{R}^n e la chiameremo *modulo* per estensione del caso familiare del modulo (o valore assoluto) in \mathbf{R} . Anche in questo caso

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

mentre la norma derivante dal prodotto scalare in \mathbf{C}^n è

$$|z| = \sqrt{z \cdot z} = \left(\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i \right)^{1/2}.$$

Ovviamente i vettori della base canonica \mathcal{B} sono a due a due ortogonali e ciascuno di essi ha modulo pari a 1. Queste due proprietà si possono riassumere in un'unica relazione in termini del *simbolo di Kronecker* δ_{ij}

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Diciamo allora che \mathcal{B} è un *sistema ortonormale* di vettori, in questo caso una *base ortonormale*. I vettori di modulo 1 si chiamano *versori* e, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\text{vers } \mathbf{x}$ è un versore, è il vettore \mathbf{x} *normalizzato*, cioè diviso per il suo modulo.

Le componenti di un vettore sono i prodotti scalari del vettore con gli elementi della base, infatti per ogni $k = 1, \dots, n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k,$$

quindi $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$. Ritroviamo per questa via l'espressione del prodotto scalare in termini delle componenti

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \cdot \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j = \sum_{ij=1}^n x_i y_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{ij=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

e in particolare

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Dalla nota disuguaglianza vista in Analisi 1

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

si ricava $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$, quindi per un certo $\alpha \in \mathbf{R}$, determinabile purché $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, si ha

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$$

e così il prodotto scalare può essere scritto anche nella forma

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \alpha.$$

Qual è il significato di α ? Il Teorema di Carnot sui triangoli ci dice che

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \vartheta$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra la semiretta orientata come \mathbf{x} e quella orientata come \mathbf{y} . D'altra parte dalle proprietà del prodotto scalare segue che

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2$$

e per confronto tra le due

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \vartheta$$

quindi $\alpha = \vartheta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico perché la norma induce su V una nozione di distanza in modo naturale. La distanza della norma è

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Nel caso di \mathbf{R}^n

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

e prende il nome di *distanza euclidea*.

Lasciamo al lettore il compito di verificare che la definizione di distanza indotta dalla norma soddisfa le proprietà caratteristiche di ogni distanza.

Come ben noto, disponendo di una metrica si può subito definire la palla $B_r(u)$ di centro u e raggio $r > 0$

$$B_r(u) = \{v \in V \mid \|u - v\| < r\}$$

e quindi per ogni punto rimangono ben definiti gli intorni di un sistema fondamentale e poi tutti i suoi intorni, di conseguenza la nozione di punto aderente e di accumulazione, la famiglia dei chiusi e degli aperti di V , esattamente come abbiamo già visto nel corso di Analisi 1. Molto importanti le conseguenze sui limiti. Per la sua importanza e per l'uso che ne faremo in seguito, vale la pena ricordare qui qualche concetto legato alle successioni.

Una successione (u_h) di punti di V converge a $u \in V$ se

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|u_h - u\| = 0,$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|u_h - u\| < \varepsilon$ per ogni $h > \nu$. In questo caso scriviamo $\lim_{h \rightarrow \infty} u_h = u$ o, più brevemente, $u_h \rightarrow u$.

Una successione $(u_h) \subset V$ è detta di Cauchy in V se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|u_h - u_k\| < \varepsilon$ per ogni $h, k > \nu$.

Sappiamo che in ogni spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy, ma che in generale non vale il viceversa. Quando invece vale anche il viceversa si dice che lo spazio è *completo*. Uno spazio vettoriale normato e completo viene detto *spazio di Banach*. Uno spazio vettoriale normato e completo la cui norma discende da un prodotto scalare viene detto *spazio di Hilbert*. Ovviamente ogni spazio di Hilbert è anche di Banach.

In \mathbf{R}^n , sia $(\mathbf{x}_h) \subset \mathbf{R}^n$ di Cauchy. Allora sono di Cauchy le corrispondenti successioni delle coordinate perché

$$|x_{hi} - x_{ki}| \leq \|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_k\|$$

e siccome \mathbf{R} è completo, ogni successione (x_{hi}) converge ad un certo $x_i \in \mathbf{R}$ che equivale a dire che $\mathbf{x}_h \rightarrow \mathbf{x}$ dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Quindi \mathbf{R}^n (ma a questo punto anche \mathbf{C}^n) è un esempio di spazio di Hilbert.

Come avviene col passaggio da \mathbf{Q} a \mathbf{R} , esiste anche negli spazi metrici in generale la possibilità di passare da uno spazio qualsiasi ad uno spazio completo nel quale il primo sia denso. Questa operazione, nota come *completamento*, è enunciato nel seguente teorema che non dimostriamo.

Teorema 1.7 (di completamento) - Se (X, d) è uno spazio metrico qualunque esiste un insieme \bar{X} che contiene X ed una distanza $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $\bar{d}|_{X \times X} = d$ e (\bar{X}, \bar{d}) è uno spazio metrico completo.

Introduciamo adesso un'importante classe di applicazioni che hanno un ruolo fondamentale in molti teoremi di esistenza in Analisi.

Definizione 1.8 - Sia X uno spazio metrico. Una funzione $F : X \rightarrow X$ viene detta *contrazione* se esiste una costante $L < 1$ tale che

$$(1.2) \quad d(F(x), F(y)) \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

La (8.4) è la condizione di Lipschitz con una costante minore di 1 e, si faccia attenzione, non equivale a

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

le due condizioni equivalgono rispettivamente a

$$\sup_{x, y \in X} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)} < 1 \quad \text{e} \quad \sup_{x, y \in X} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)} \leq 1.$$

Ad esempio la funzione $\sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, soddisfa la seconda, ma non è una contrazione.

Teorema 1.9 (di Banach-Caccioppoli) - Se X è uno spazio metrico completo e $F : X \rightarrow X$ è una contrazione allora l'equazione ai punti fissi

$$(1.3) \quad F(x) = x, \quad x \in X,$$

ammette soluzione unica.

Dimostrazione. Il procedimento che seguiremo è di tipo ricorsivo e si chiama *metodo delle approssimazioni successive*. Si parte da un punto iniziale qualunque $x_0 \in X$ e si costruisce la successione

$$(1.4) \quad x_{n+1} = F(x_n) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dimostriamo che la successione così costruita è di Cauchy. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq Ld(x_k, x_{k-1}) = Ld(F(x_{k-1}), F(x_{k-2})) \\ &\leq L^2d(x_{k-1}, x_{k-2}) = L^2d(F(x_{k-2}), F(x_{k-3})) \leq \dots \leq L^k d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

quindi per ogni $n > m$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m+1}^n d(x_k, x_{k-1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=m+1}^n L^k = d(x_1, x_0) \frac{L^{m+1} - L^{n+1}}{1 - L}.$$

Essendo infinitesima, la successione $(L^n) \subset \mathbf{R}$ è anche di Cauchy e quindi lo è in X anche la nostra successione (x_n) . Per la completezza dello spazio esiste allora $x \in X$

tale che $x_n \rightarrow x$. Passando al limite nella (1.4) per $n \rightarrow \infty$ si deduce che tale limite x è soluzione della (1.3). Per l'unicità, se anche $x' \neq x$ fosse soluzione si otterrebbe

$$d(x, x') = d(F(x), F(x')) \leq Ld(x, x') < d(x, x').$$

□

Esempi

1.1 L'algoritmo di Erone

$$\begin{cases} a_0 = \alpha > 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\alpha}{a_n} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

per l'approssimazione di $\sqrt{\alpha}$ rientra proprio nella situazione contemplata nel Teorema 8.5, infatti la funzione $F(x) = (x + \alpha/x)/2$ soddisfa

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{xy} \right) |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \forall x, y \geq \sqrt{\alpha}$$

e quindi è una contrazione come applicazione da $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$ in se stesso. Il punto fisso di F è $\sqrt{\alpha}$, che in questo caso è anche il suo punto di minimo, come si vede facilmente risolvendo l'equazione

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{x} \right) = x.$$

1.2 Se della successione di Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ consideriamo la successione dei rapporti

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n/a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}},$$

possiamo affermare che, siccome la funzione $F(x) = 1 + 1/x$ è una contrazione su $[3/2, 2]$, essa converge al punto fisso di F , la soluzione soluzione positiva dell'equazione

$$(1.5) \quad 1 + \frac{1}{x} = x$$

che è il numero $(1 + \sqrt{5})/2$. Allora il raggio di convergenza della serie di potenze che ha per coefficienti i numeri di Fibonacci è il suo inverso, cioè il numero aureo $(\sqrt{5} - 1)/2$, quello che soddisfa la proporzione $1 : x = x : (1 - x)$.

Ricordiamo anche la nozione di compattezza. È compatto ogni insieme K di uno spazio metrico X tale che, presa una successione (\mathbf{x}_h) di punti di K , essa ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di K . Si sa che ogni compatto in ogni spazio metrico è limitato e chiuso, ma in \mathbf{R}^n si può dimostrare, sfruttando il risultato già pronto in \mathbf{R} , che ogni insieme chiuso e limitato è compatto. Si lascia per esercizio al lettore il compito di sistemare la dimostrazione.

Vediamo un'ultima importante operazione, il *prodotto vettoriale* in \mathbf{R}^3 .

Assumiamo la convenzione che i tre vettori della base canonica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ed $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ formino una terna *positivamente orientata*, o *levogira*, nel senso che facendo ruotare \mathbf{e}_1 verso \mathbf{e}_2 dalla parte dell'angolo convesso, che è quello retto, un osservatore orientato come \mathbf{e}_3 vede che la rotazione è antioraria (regola della vite o della mano destra). Imponiamo che il prodotto vettoriale sia distributivo rispetto alla somma e che tra questi tre versori della base sussistano le relazioni

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \end{array}$$

relazioni che si possono riassumere nell'unica

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

dove ε_{ijk} è il *simbolo di Ricci*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j, k \text{ assumono i valori di una permutazione pari di } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se } i, j, k \text{ assumono i valori di una permutazione dispari di } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti, cioè se due degli indici } i, j, k \text{ assumono lo stesso valore} \end{cases}$$

Allora il prodotto vettoriale tra due vettori qualsiasi \mathbf{x} e \mathbf{y} risulta

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \times (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

coincidente col determinante formale

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

In forma più sintetica

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \times \sum_{j=1}^3 y_j \mathbf{e}_j = \sum_{ijk=1}^3 x_i y_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

Immediato verificare che $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ e che non vale la legge di annullamento, il prodotto vettoriale è il vettore nullo se e solo se uno dei fattori è nullo oppure sono paralleli, infatti la condizione

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

equivale a

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$$

(o simili nel caso di qualche denominatore nullo), cioè al parallelismo dei due vettori. Il modulo del prodotto vettoriale è il prodotto dei moduli per il seno dell'angolo α convesso che le due semirette orientate come i vettori formano, infatti

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 \sin^2 \alpha$$

come risulta dalla (1.6), e il verso è quello ortogonale ai due fattori con la regola della vite, verificare per esercizio. Conseguenza di questa osservazione è che il prodotto vettoriale di due vettori ha per modulo l'area del parallelogramma costruito sui due vettori.

In \mathbf{R}^2 il prodotto vettoriale di $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ con $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$ ha le prime due componenti nulle

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3,$$

per cui possiamo dire che l'unica componente veramente significativa è la terza. È lecito allora, ma solo in questo caso, identificare il prodotto vettoriale con lo scalare

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

confondendolo con la sola componente scalare non nulla $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3$. Questa espressione va tenuta presente insieme a quella del loro prodotto scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2$.

Il *prodotto misto*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \sum_{ijk=1}^3 x_i y_j z_k \varepsilon_{ijk}$$

è il volume con segno del parallelepipedo costruito sui tre vettori, positivo se la terna è destra, negativo se è sinistra e nullo se sono linearmente dipendenti. Esso coincide con il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Il valore del prodotto misto non varia rispetto a permutazioni pari dei tre vettori, cambia di segno rispetto a permutazioni dispari ed è nullo se e solo se i tre vettori sono linearmente dipendenti, inoltre non dipende dall'ordine in cui compaiono le due operazioni.

Rimandiamo al corso di Algebra Lineare la teoria delle matrici, dei cambiamenti di base, dei sistemi lineari, delle applicazioni lineari e degli autovalori e autovettori. Due parole invece vanno dette sulle forme quadratiche per l'uso che ne faremo a proposito degli estremi liberi delle funzioni di più variabili.

La trasposta di una matrice $A = (a_{ij})$ è la matrice $A^T = (a_{ji})$ ottenuta scambiando le righe con le colonne, le due matrici sono simmetriche una all'altra rispetto alla diagonale principale. Se A è quadrata, con n righe e n colonne, viene detta *simmetrica* se $A = A^T$ e *antisimmetrica* se $A = -A^T$. Queste due proprietà sono utili nel caso di matrici a coefficienti reali, ma se i coefficienti sono complessi sono più significative le nozioni di matrice *hermitiana* e *antihermitiana*, rispettivamente $A = \overline{A^T}$ e $A = -\overline{A^T}$, le quali si riducono alle precedenti nel caso reale. Se una matrice è hermitiana, in particolare reale e simmetrica, gli autovalori sono reali e ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali, esiste una base di autovettori e la matrice, espressa in questa base, è diagonale. Se è antihermitiana, in particolare reale e antisimmetrica, gli autovalori sono immaginari puri (in dimensione dispari c'è anche l'autovalore nullo) e anche in questo caso si hanno autovettori ortogonali in \mathbf{C}^n .

Ci limitiamo adesso al caso reale. La *parte simmetrica* e la *parte antisimmetrica* di A sono rispettivamente le matrici (simmetrica e antisimmetrica)

$$A^S = \frac{A + A^T}{2} \quad \text{e} \quad A^W = \frac{A - A^T}{2}.$$

Ogni matrice si può decomporre in modo unico nella somma della propria parte simmetrica e antisimmetrica. Infatti banalmente $A = A^S + A^W$, viceversa se S e W sono due matrici, la prima simmetrica e la seconda antisimmetrica, tali che $A = S + W$, essendo $A^T = S - W$ per somma e differenza si ottiene $S = A^S$ e $W = A^W$.

La forma quadratica associata alla matrice $A = (a_{ij})$ è la funzione su \mathbf{R}^n

$$(1.7) \quad \mathbf{x} \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \cdot \mathbf{x} = \sum_{ij=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Poiché la forma quadratica associata ad una matrice antisimmetrica è ovviamente nulla per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, la (1.7) coincide identicamente con quella associata alla sola parte simmetrica, cioè $\mathbf{Ax} \cdot \mathbf{x} = A^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. La funzione φ è un polinomio omogeneo in n variabili di secondo grado. Viceversa, ad ogni polinomio omogeneo di secondo grado su \mathbf{R}^n corrisponde una sola matrice simmetrica A tale che $\varphi(x) = \mathbf{Ax} \cdot \mathbf{x}$. Omogeneo di secondo grado significa

$$\varphi(t\mathbf{x}) = t^2 \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Indichiamo con S^{n-1} la sfera unitaria di \mathbf{R}^n , cioè

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\mathbf{x}| = 1\}.$$

La conoscenza di φ solo su S^{n-1} ci permette di ricostruire tale funzione su tutto \mathbf{R}^n . Infatti $\varphi(\mathbf{0}) = 0$ e se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ basta porre $\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 \varphi(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$.

Essendo φ continua, ammette massimo M e minimo m su S^{n-1} . Dalle relazioni

$$m \leq \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

si ottengono le stime inferiore e superiore

$$m|\mathbf{x}|^2 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq M|\mathbf{x}|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Interessante osservare che m e M sono rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore della matrice A associata a φ e che i punti della sfera unitaria dove φ assume il valore minimo m e quelli in cui raggiunge il massimo M sono proprio i corrispondenti autovettori. Infatti se gli \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$, sono una base ortonormale di autovettori, ordinati in modo da rispettare l'ordine dei corrispondenti autovalori $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, esprimendo ogni vettore \mathbf{x} come loro combinazione lineare si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} \cdot \mathbf{x} &= \sum_{ij=1}^n Ax_i \mathbf{e}_i \cdot x_j \mathbf{e}_j = \sum_{ij=1}^n A\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j x_i x_j \\ &= \sum_{ij=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j x_i x_j = \sum_{ij=1}^n \lambda_i \delta_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\lambda_1 |\mathbf{x}|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n |\mathbf{x}|^2,$$

quindi $\lambda_1 |\mathbf{x}|^2 \leq \mathbf{Ax} \cdot \mathbf{x} \leq \lambda_n |\mathbf{x}|^2$ e tali stime vengono raggiunte come uguaglianze per $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ e per $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$.

Una forma quadratica φ viene detta

- *definita positiva* se $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, gli autovalori sono strettamente positivi,
- *semidefinita positiva* se $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, gli autovalori sono non negativi,
- *non definita* se $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) > 0$ e $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) < 0$, esistono autovalori negativi e autovalori positivi.

Ricordiamo che R è una matrice *ortogonale*, o *unitaria*, se $R^T R = I$, da cui $\det R = \pm 1$ e $R^{-1} = R^T$. Ovviamente se è questo il caso si ha anche $RR^T = I$. Un'applicazione lineare di questo tipo trasforma sistemi ortonormali in sistemi ortonormali e la matrice rappresentativa, in qualunque base venga scritta, ammette sia per righe che per colonne sistemi ortonormali di vettori.

Teorema 1.10 (di decomposizione polare) - *Data una matrice A invertibile, esistono due soli matrici U e V simmetriche e definite positive e un'unica matrice R ortogonale tali che $A = RU = VR$.*

Dimostrazione. La matrice $A^T A$ è ovviamente simmetrica ed è anche definita positiva perché

$$A^T A u \cdot u = Au \cdot Au = |Au|^2 \geq 0 \quad \forall u \in \mathbf{R}^n,$$

ma questa forma quadratica, essendo A non singolare, si annulla solo per $u = 0$. Siano allora $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, gli n autovalori di $A^T A$ contati con la loro molteplicità e $\{\mathbf{e}_i\}$, $1 \leq i \leq n$, una corrispondente base ortonormale di autovettori. L'applicazione lineare U che su questa base ammette come matrice rappresentativa la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

soddisfa $U^2 = UU = A^T A$. Resta da verificare che $R = AU^{-1}$ è ortogonale. Infatti

$$R^T R = (AU^{-1})^T AU^{-1} = U^{-1} A^T AU^{-1} = U^{-1} U^2 U^{-1} = I.$$

Per la V il ragionamento è simile, basta partire da AA^T .

□

1.2 Funzioni di una variabile a valori vettoriali

Nel corso di Analisi 1 abbiamo trattato le funzioni di una sola variabile a valori in \mathbf{R} , ne abbiamo studiato le proprietà fondamentali, limitatezza, monotonia, convessità, continuità e tante altre. In Analisi 2 si studiano le funzioni di una variabile a valori vettoriali e le funzioni di più variabili a valori scalari e vettoriali. Cominciamo con le funzioni vettoriali dipendenti da una sola variabile reale. È il caso più semplice perché molto di quanto già fatto si può adesso estendere senza fatica.

Una funzione vettoriale di una variabile è una funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ dove $A \subset \mathbf{R}$. Per i nostri scopi il dominio sarà principalmente, ma non sempre, un intervallo che indicheremo, come in passato, con I . Utilizzando una base, in genere quella canonica $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ di \mathbf{R}^m , la funzione assume la forma

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{e}_1 + \dots + f_m(t)\mathbf{e}_m = \sum_{i=1}^m f_i(t)\mathbf{e}_i \quad \forall t \in I$$

o, più semplicemente se la base è ovvia dal contesto, nella forma di m -upla

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)) \quad \forall t \in I.$$

Poiché \mathbf{R}^m non è un insieme ordinato, non hanno senso monotonia, convessità, massimi e minimi; le singole componenti possono essere monotone, convesse o ammettere ognuna i propri estremi, ma per l'intero vettore non ha neanche senso parlarne. Però ha senso la limitatezza. La funzione vettoriale $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ è limitata se assume i suoi valori all'interno di un insieme limitato, come una sfera per esempio. Quindi \mathbf{f} limitata significa che esiste $M \in \mathbf{R}$ tale che $|\mathbf{f}(t)| \leq M$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, proprietà che equivale alla limitatezza di ogni componente essendo $|f_i(t)| \leq |\mathbf{f}(t)|$.

Per i limiti, la continuità, la derivabilità diamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.11 - Se $t_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbf{R}^m$ diciamo che \mathbf{f} converge a \mathbf{L} per $t \rightarrow t_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in A - \{t_0\} \quad |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| < \varepsilon.$$

Si usano le scritture

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} \quad e \quad \mathbf{f}(t) \rightarrow \mathbf{L} \text{ per } t \rightarrow t_0.$$

Se t_0 è isolato rispetto ad A non ha senso parlare di limite. I casi $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$ li lasciamo scrivere al lettore come esercizio. Chiaramente alcune o tutte le componenti di \mathbf{f} potrebbero divergere, ma non avendo definito, a differenza di \mathbf{R} , un qualche punto all'infinito in \mathbf{R}^m , trattare il concetto di limite in questo caso non è molto significativo, più utile è invece riconoscerlo come un caso di non limitatezza.

In virtù delle disuguaglianze

$$(1.8) \quad |x_j| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^m |x_i|$$

si può ragionare, in modo del tutto equivalente, usando le singole componenti

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Definizione 1.12 - Se $t_0 \in A$ diciamo che \mathbf{f} è continua in t_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in A \quad |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| < \varepsilon.$$

Diciamo che \mathbf{f} è continua in A se lo è in ogni punto di A .

Ancora le (1.8) ci garantiscono che la nozione di continuità per la \mathbf{f} equivale a quella di tutte le componenti f_i . Ricordiamo che se t_0 è isolato rispetto ad A ogni funzione su A è continua in t_0 , se è di accumulazione \mathbf{f} è continua in t_0 se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0).$$

Definizione 1.13 - Diciamo che \mathbf{f} è uniformemente continua su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in A \quad |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_2)| < \varepsilon.$$

Ancora, sempre per le (1.8), questa proprietà equivale all'uniforme continuità di tutte le componenti scalari.

Non stiamo qui a ripetere daccapo tutto quello che si è detto nel corso di Analisi 1 su questi argomenti, ma invitiamo il lettore a rivedere le varie proprietà e a studiare quali si possono generalizzare a questa situazione e in che modo, compreso le condizioni di Lipschitz e di Hölder e la relazione che hanno con l'uniforme continuità. Si faccia attenzione alle proprietà che riguardano il segno, a quelle di monotonia e convessità che qui non ha senso considerare, ma soprattutto si rifletta sul caso notevole in cui il dominio è un intervallo. Il teorema degli zeri non può più valere perché non c'è un segno della funzione agli estremi, e con esso tutti i risultati che da esso dipendono, fino alla continuità della funzione inversa. Nulla di nuovo neanche per la derivata.

Definizione 1.14 - Se $t_0 \in A \cap \mathcal{D}(A)$ diciamo che \mathbf{f} è **derivabile** in t_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}.$$

Si indica con $\mathbf{f}'(t_0)$ e si chiama **derivata di \mathbf{f} in t_0** . Diciamo che \mathbf{f} è derivabile in A se lo è in ogni punto di A . In questo caso è definita la **funzione derivata** $t \rightarrow \mathbf{f}'(t)$ per ogni $t \in A$.

Ovviamente derivare la \mathbf{f} equivale a derivare ogni componente e

$$\mathbf{f}'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_m(t)) \quad \forall t \in A.$$

Definizione 1.15 - Se $t_0 \in A \cap \mathcal{D}(A)$ diciamo che \mathbf{f} è **differenziabile** in t_0 se esiste un'applicazione lineare $h \rightarrow \ell(h)$, detta **differenziale in t_0** , tale che

$$\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \ell(t - t_0) = o(t - t_0).$$

Le Definizioni 1.14 e 1.15 sono equivalenti e se valgono il vettore \mathbf{L} che rappresenta l'applicazione lineare ℓ è proprio la derivata

$$\ell(h) = \mathbf{f}'(t_0) \cdot h.$$

Continueremo ad usare le notazioni C^0 , C^k e C^∞ rispettivamente per gli insiemi delle funzioni continue, derivabili con derivata continua fino all'ordine k e con derivata di qualunque ordine.

È lecito chiedersi se per una $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ con derivata continua l'invertibilità locale possa garantire, come abbiamo visto per $m = 1$, l'invertibilità globale (che è poi la vera invertibilità), magari con una dimostrazione alternativa alla monotonia dovuta al segno costante della derivata perché qui non ha senso né monotonia, né segno, come già detto. Ricordiamo però che già in Analisi 1 abbiamo illustrato un controesempio. La funzione $t \rightarrow e^{it}$ è localmente invertibile ma non invertibile come funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R}^2 o in \mathbf{C} che è lo stesso.

È facile immaginare quali proprietà delle derivate si possano generalizzare dalle funzioni scalari di una variabile al nostro caso dei campi vettoriali funzioni di un parametro. Ad esempio i teoremi algebrici valgono ancora per le operazioni che hanno senso, la formula della derivata per il prodotto di composizione, o *cambio di parametro* in questo contesto, vale ancora, ma ne parleremo a proposito delle curve. Il Teorema di Rolle e successivi (Cauchy, Lagrange ecc.) valgono solo per ogni componente, ma non per la funzione come vettore perché il punto che realizza la condizione richiesta può essere diverso da componente a componente. I casi nuovi del prodotto scalare e del prodotto vettoriale sono facilmente riconducibili al caso noto del prodotto.

Esercizio 1.4 - Dimostrare che se $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$, con $t \in A$, sono derivabili allora anche il loro prodotto scalare $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$ è derivabile e

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t).$$

In particolare

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} |\mathbf{f}(t)|^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t)) = 2\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t).$$

Ne segue che se un vettore ha modulo costante allora $\mathbf{f}(t) \perp \mathbf{f}'(t)$ identicamente in t . Questo spiega perché nei moti uniformi, in cui la velocità ha modulo costante, questa, che è tangente, rimane sempre ortogonale all'accelerazione che infatti è centripeta. Viceversa, si verifica subito che un campo vettoriale $\mathbf{f}(t)$ che rimane ortogonale alla sua derivata su un intervallo I non ridotto ad un punto deve avere modulo costante, infatti

$$0 = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{f}(t)|^2 \Rightarrow |\mathbf{f}(t)|^2 = \text{costante}.$$

Dalla (1.9) discende la formula di derivazione del modulo: per quei valori di t tali che $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$, poiché

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{f}(t)|^2 = 2|\mathbf{f}(t)| \frac{d}{dt} |\mathbf{f}(t)|,$$

per confronto con la (1.9) si ottiene

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{f}(t)| = \frac{\mathbf{f}(t)}{|\mathbf{f}(t)|} \cdot \mathbf{f}'(t) = \text{vers } \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t).$$

Esercizio 1.5 - Sotto le stesse ipotesi dell'Esercizio 1.4, ma con $n = 3$, dimostrare che

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}'(t) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}'(t).$$

Neanche per l'integrale ci sono sorprese rispetto a quanto detto per le funzioni a valori reali, basta che le singole componenti siano tutte integrabili sullo stesso intervallo I e ci si può ridurre all'integrazione componente per componente definendo l'integrale

$$\int_I \mathbf{f}(t) dt = \left(\int_I f_1(t) dt, \int_I f_2(t) dt, \dots, \int_I f_m(t) dt \right)$$

e la funzione integrale

$$\mathbf{F}(t) = \left(\int_a^t f_1(\tau) d\tau, \int_a^t f_2(\tau) d\tau, \dots, \int_a^t f_m(\tau) d\tau \right).$$

Valgono anche qui le proprietà algebriche, con ovvi adattamenti, in particolare quella del modulo

$$(1.10) \quad \left| \int_I \mathbf{f}(t) dt \right| \leq \int_I |\mathbf{f}(t)| dt.$$

Infatti, definito il vettore

$$\mathbf{a} = \int_I \mathbf{f}(t) dt,$$

se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ la (1.10) è banalmente vera e non c'è niente da dimostrare, altrimenti si ha

$$|\mathbf{a}| \left| \int_I \mathbf{f}(t) dt \right| = \mathbf{a} \cdot \int_I \mathbf{f}(t) dt = \int_I \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(t) dt \leq \int_I |\mathbf{a}| |\mathbf{f}(t)| dt = |\mathbf{a}| \int_I |\mathbf{f}(t)| dt,$$

da cui segue la (1.10) dividendo per $|\mathbf{a}|$.

Non vale il teorema della media, altro che componente per componente, ma valgono i risultati di regolarità della funzione integrale.

Teorema 1.16 - Se $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ è integrabile allora \mathbf{F} è lipschitziana.

Il seguente è più in generale.

Teorema 1.17 - Se $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ è integrabile in senso improprio allora \mathbf{F} è uniformemente continua.

Ne segue che se $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ è integrabile in senso improprio e t_0 è di accumulazione per I esiste finito il limite di $\mathbf{F}(t)$ per $t \rightarrow t_0$. Useremo questo risultato a proposito della possibilità di prolungare le soluzioni di un'equazione differenziale al di fuori dell'intervallo aperto su cui vengono trovate inizialmente, caso in cui $t_0 \notin I$, ma ne è un'estremità.

Citiamo infine il Teorema Fondamentale del Calcolo.

Teorema 1.18 - Se $\mathbf{f}(t)$ è integrabile su I e continua in un punto $t \in I$ allora la sua funzione integrale è derivabile nello stesso punto e vale la relazione

$$(1.11) \quad \frac{d}{dt} \int_a^t \mathbf{f}(\tau) d\tau = \mathbf{f}(t)$$

essendo a un punto qualsiasi di I .

Se poi $\mathbf{G}(t) = (G_1(t), \dots, G_m(t))$ è il vettore che ha per componenti m primitive qualsiasi delle m funzioni $f_i(t)$ allora

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{G}(b) - \mathbf{G}(a).$$

È bene sottolineare, qualora servisse in queste dimostrazioni, che il teorema della media integrale nella versione delle funzioni continue non può essere applicato alla funzione vettoriale ma solo alle sue componenti prese singolarmente.

1.3 Funzioni di più variabili

Nel passaggio dalle funzioni di una variabile alle funzioni di più variabili, scalari $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ e vettoriali $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ con $A \subset \mathbf{R}^n$, molte proprietà, idee e definizioni si conservano trovando, nel nuovo contesto, una naturale generalizzazione, altre invece non hanno più senso o devono essere modificate radicalmente. Essere una funzione limitata ha senso in ogni caso e significa $|f(\mathbf{x})| \leq M$ o $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, ma le nozioni di estremo superiore e inferiore, massimo e minimo hanno senso ovviamente solo per le funzioni a valori scalari. Essere monotona non ha mai senso perché manca l'ordinamento nel dominio. La convessità ha senso solo per le funzioni scalari e a condizione che il dominio A sia un insieme convesso. Ricordiamo infatti che anche in una variabile il dominio doveva essere un intervallo e gli intervalli sono gli unici convessi di \mathbf{R} . Non stiamo qui a ripetere le definizioni di massimo e minimo, relativo o assoluto, e di estremo superiore e inferiore, sono esattamente le stesse che abbiamo visto in Analisi 1. La convessità merita invece uno studio specifico.

Definizione 1.19 - Dato un insieme convesso $C \subset \mathbf{R}^n$, una funzione $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ si dice **convessa** se per ogni $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ si ha

$$f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_0) \leq tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_0) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Teorema 1.20 (Teorema degli zeri) - Siano $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme connesso e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che in due punti $x, y \in A$ si abbia $f(x) < 0$ e $f(y) > 0$. Allora esiste $\xi \in A$ tale che $f(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Sebbene il teorema sia vero nel caso più generale di A connesso, a noi basta dimostrarlo con l'ipotesi più restrittiva di A connesso per archi. Si considera una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. La funzione $t \rightarrow f(\gamma(t))$, che si può vedere come la restrizione di f a γ , è continua su $[0, 1]$ in quanto composizione di due funzioni continue, $f(\gamma(0)) = f(x) < 0$ e $f(\gamma(1)) = f(y) > 0$. Allora esiste un certo $\bar{t} \in [0, 1]$ tale che $f(\gamma(\bar{t})) = 0$. Il punto $\xi = \gamma(\bar{t}) \in A$ è il punto cercato. \square

Corollario 1.21 (Teorema dei valori intermedi) - Se $f \in C^0(A)$ e A è connesso allora anche $f(A)$ è connesso (in particolare è un intervallo se f è a valori in \mathbf{R}).

Capitolo 2

Curve e integrali curvilinei

2.1 Considerazioni generali, definizioni ed esempi

Immaginiamo di seguire una particella P durante il suo movimento nello spazio. Le varie posizioni che P assume al passare tempo formano una figura geometrica che l'esperienza quotidiana ci induce a chiamare *curva*. Noi chiameremo invece *traiettoria* questo insieme, intendendo per *curva*, nel caso specifico *legge del moto* o *legge oraria*, l'applicazione stessa, che sempre sarà definita su un intervallo, che associa ad ogni istante t la corrispondente posizione $P(t)$. Essa verrà indicata anche con la notazione $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, oppure, facendo riferimento al *vettore posizione* $\mathbf{r} = OP$ rispetto ad un'origine O , con la notazione $\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + \dots + x_n(t)\mathbf{e}_n$ in termini di una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}$ di \mathbf{R}^n possibilmente ortonormale.

Attribuire però al parametro t esclusivamente il significato di tempo è un po' riduttivo. Il punto potrebbe essere vincolato ad una guida che lo costringe a seguire una traiettoria prestabilita; in questo caso conviene partire da una descrizione parametrica della guida, $P(q)$, che fornisce, al variare di q in un intervallo, le varie posizioni permesse, dette anche *posizioni ammissibili*. Gli infiniti modi in cui la guida può essere percorsa nel tempo corrispondono ad altrettante funzioni $q(t)$, per cui la legge oraria $P(t)$ viene ad essere in realtà la funzione composta $P(q(t))$. Per fare un esempio, se $P = (x, y)$ si muove secondo la legge

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \omega t \\ y(t) = r \sin \omega t \end{cases}$$

al variare del tempo $t \in \mathbf{R}$, potrebbe trattarsi di un punto libero nello spazio che determinate cause costringono ad effettuare un moto circolare ed uniforme, come nel caso, ad esempio, del moto gravitazionale o di una carica elettrica soggetta alla forza di Lorentz, v. Esercizio 2.1. Altrimenti P potrebbe essere a priori vincolato ad una guida circolare di raggio r , immagine della curva $\vartheta \rightarrow (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$, con $\vartheta \in \mathbf{R}$. In questo caso il moto precedente è dovuto alla dipendenza di ϑ dal tempo secondo la legge $\vartheta(t) = \omega t$, come avviene nel moto per inerzia. Un altro moto famoso, sempre di punto materiale vincolato ad una guida circolare, è quello del pendolo semplice, comunque i moti possibili sono infiniti, sono tanti quante le funzioni $\vartheta(t)$ almeno continue che si possono definire. Così tante curve tra loro differenti possono avere come immagine la stessa circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ o un suo arco, ma differire per la sola legge oraria $\vartheta(t)$ con cui l'angolo dipende dal tempo.

Se nel caso speciale del tempo abbiamo usato il termine traiettoria, in ogni caso, qualunque sia il significato del parametro t , l'immagine $\{\mathbf{x}(t) \mid t \in I\}$, cioè l'insieme delle posizioni assunte, verrà chiamato *sostegno* della curva $\mathbf{x}(t)$. In seguito ad un cambiamento di parametro $t = \varphi(\tau)$, con $\tau \in J$, la nuova curva $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau))$, pur

distinta da quella iniziale, avrà comunque lo stesso sostegno. Spesso nel seguito ci lasceremo comunque prendere dalla tentazione di usare la parola *curva* per intenderne il *sostegno*, è più naturale essendo quello l'ente geometrico visibile e riconoscibile comunemente come linea curva.

Parametri diversi dal tempo intervengono anche in tutti quei casi in cui la curva non ha a che fare col moto di un punto. Le funi di un ponte sospeso, la catenaria secondo cui si dispone all'equilibrio un cavo pesante sospeso agli estremi, le configurazioni di una corda vibrante o di una trave, il cammino luminoso di un raggio di luce che può essere rettilineo, all'interno di un mezzo trasparente omogeneo, o curvilineo se il mezzo, non essendo omogeneo, lo devia per rifrazione, sono tutti casi in cui il parametro tempo non interviene, ma si presentano comunque come figure che nella nostra esperienza quotidiana riconosciamo come curve e che vale la pena descrivere col linguaggio matematico appropriato, al pari del movimento di un punto.

Ci chiediamo adesso: quali proprietà deve possedere una funzione $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ affinché si possa identificare con l'idea che ci siamo fatti di curva? Se si pensa ad essa come ad una trasformazione topologica che deforma l'intervallo I nel sostegno, senza rimuovere o aggiungere parti, senza praticare dei tagli, come quando si piega un tratto di fil di ferro, evidentemente deve essere per lo meno iniettiva, dato che punti distinti nella configurazione iniziale devono rimanere distinti fino a quella finale. Ma la sola iniettività non basta. Esiste un esempio dovuto a Cantor, interessato a dimostrare come linee e regioni piane siano equipotenti, di funzione bigettiva che trasforma un segmento in un intero quadrato. Questa certamente non può essere accettata come curva. Grosso modo (ma attenti ai numeri con periodo 9) si fa così: ad ogni numero reale t dell'intervallo $]0, 1[$, $t = 0.t_1t_2 \dots t_h \dots$ in forma decimale, si fa corrispondere la coppia $(x, y) = (0.t_1t_3 \dots t_{2h+1} \dots, 0.t_2t_4 \dots t_{2h} \dots)$ e, viceversa, da ogni coppia di numeri espressi in forma decimale si forma un numero mettendo di seguito le cifre di una e dell'altra delle coordinate alternandole.

Se la sola iniettività è insufficiente proviamo a imporre un minimo di regolarità cominciando dalla continuità. Ma anche questa ipotesi non basta, esistono funzioni, note come *curve di Peano*, che sono bigettive e continue dall'intervallo $[0, 1]$ nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, ma neanche queste ci soddisfano come curve.

Per evitare sorprese di questo genere dobbiamo richiedere almeno la derivabilità, condizione che, ci aspettiamo, dovrebbe garantire l'esistenza della retta tangente.

Della derivata di una funzione vettoriale abbiamo parlato nel Cap. 1, Definizione 1.14. A partire da un punto fissato $\mathbf{x}(t_0)$ del sostegno, si considera il vettore spostamento $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$ e, se esiste finito, il limite

$$\mathbf{x}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0}.$$

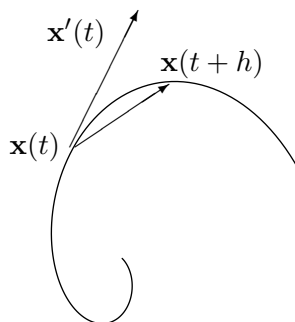


Figura 2.1: vettore tangente

Se $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ si chiama *vettore tangente* e la retta sostegno della curva $\tau \rightarrow \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}'(t)\tau$, $\tau \in \mathbf{R}$, viene detta *retta tangente* alla curva nel punto $\mathbf{x}(t)$. Se t è il tempo e $\mathbf{x}(t)$ la legge del moto il vettore tangente è proprio la velocità all'istante t e si indica con $\dot{\mathbf{x}}(t)$.

Diciamo che $\mathbf{x}(t)$, con $t \in I$, è di classe $C^1(I)$ se \mathbf{x}' esiste su I ed è continua. In condizioni di sufficiente regolarità possiamo considerare le derivate successive, ad esempio la derivata seconda

$$\mathbf{x}''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}'(t+h) - \mathbf{x}'(t)}{h},$$

o l'accelerazione $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, sempre che questo limite esista finito, e poi, in modo analogo, la derivata terza e le derivate successive.

Esercizio 2.1 - *Quali sono i possibili moti di una particella carica e libera nello spazio, sede di un campo magnetico costante?*

Indicati con m e q la massa e la carica del punto e con \mathbf{B} il campo magnetico, usiamo la legge fondamentale della dinamica

$$(2.1) \quad m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

dove compare a secondo membro la forza di Lorentz. Rispetto ad una base col terzo versore concorde con \mathbf{B} , per cui $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ con $B > 0$, si ha $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = B(v_2\mathbf{e}_1 - v_1\mathbf{e}_2)$ e, posto $\omega = qB/m$, l'equazione del moto si traduce nel sistema

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \omega v_2 \\ \dot{v}_2 = -\omega v_1 \\ \dot{v}_3 = 0. \end{cases}$$

Dalla terza si ricava la componente del moto lungo il terzo asse

$$x_3(t) = at + b.$$

Per integrazione delle prime due si ottiene

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 \end{cases}$$

dove abbiamo supposto nulle le costanti d'integrazione per un'opportuna scelta degli assi. Moltiplicando la prima per x_1 , la seconda per x_2 e sommando si ottiene

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$$

da cui

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = R^2$$

per un'opportuna costante R . Siamo di fronte alla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo x_3 con un moto circolare in cui la distanza del punto dall'asse x_3 rimane costante. In particolare il moto è piano se e solo se $a = 0$. Si vede subito che la proiezione del moto lungo il piano ortogonale a x_3 è circolare ed uniforme. Infatti, in quanto circolare, per un'opportuna funzione $\vartheta(t)$ si ha

$$\begin{cases} x_1(t) = R \cos \vartheta(t) \\ x_2(t) = R \sin \vartheta(t) \end{cases}$$

dove, per sostituzione nella (2.2), $\dot{\vartheta}(t) = \omega$ e quindi $\vartheta(t) = \omega t + \alpha$. Dunque le traiettorie sono eliche cilindriche di passo costante pari a $2\pi b/\omega$ e con asse parallelo a \mathbf{B} (v. Figura 2.2) tra le quali figurano anche le circonferenze di centro 0, giacenti su piani ortogonali a \mathbf{B} . I moti circolari si ottengono se $a = 0$, cioè se la velocità iniziale lungo \mathbf{e}_3 è nulla.

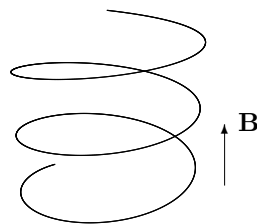


Figura 2.2: Elica cilindrica

Esercizio 2.2 - Risolvere il problema del moto come nell'esercizio precedente supponendo che sia presente anche un campo elettrico costante \mathbf{E} , per cui l'equazione del moto diventa

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Riprendiamo adesso, dopo aver osservato che continuità e iniettività sono insufficienti, la questione riguardante la regolarità che deve possedere un'applicazione $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ perché possa ritenersi una curva. Se vediamo in che cosa differisce una linea curva da una retta, è evidente che la prima rivela in generale una spiccata tendenza a discostarsi dalla sua tangente, ma è proprio questa che viene a mancare se non si assume anche la derivabilità. È ragionevole quindi ritenere che questa proprietà sia essenziale. D'altra parte, ci chiediamo, l'appartenenza a C^1 garantisce veramente l'esistenza della retta tangente? La curva

$$(2.3) \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3, \quad t \in [-1, 1], \end{cases}$$

è di classe C^∞ , ma presenta una cuspidine in $(0, 0)$. Il motivo sta nel fatto che nella (2.3) si annulla il vettore tangente, cioè si annullano insieme, per lo stesso valore $t = 0$, entrambe le derivate $x'(0)$ e $y'(0)$.

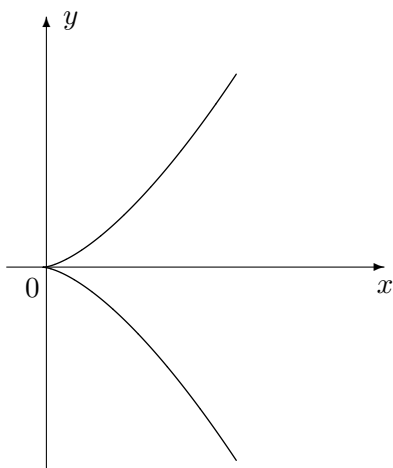


Figura 2.3: Curva C^∞ con cuspidine

Questa situazione non si verifica per quelle curve la cui regolarità rientra nella seguente definizione.

Definizione 2.1 - Una curva $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ viene detta **regolare** se $\mathbf{x} \in C^1(I)$ e $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$ escluso al più gli estremi.

Osservazione 2.2 - È bene sottolineare che la condizione contemplata nella Definizione 2.1 è solo sufficiente per l'esistenza della retta tangente, le curve $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$ e $\mathbf{y}(t) = (t^3, t^6)$, con $t \in [-1, 1]$, hanno lo stesso sostegno con le stesse rette tangenti, ma mentre \mathbf{x} è regolare, la \mathbf{y} non lo è perché $\mathbf{y}'(0) = \mathbf{0}$. In altre parole, può annullarsi, o meglio, non esistere il vettore tangente senza pregiudicare l'esistenza della retta tangente.

Un po' più generale è la seguente, nella quale si riconoscono quelle curve che possiedono una quantità finita di punti angolosi e cuspidi, ma tra uno e l'altro è regolare. Un caso particolare è quello della *poligonale* che consiste di una unione finita di segmenti consecutivi.

Definizione 2.3 - Una curva $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ viene detta **regolare a tratti** se $\mathbf{x} \in C^0[a, b]$ ed esiste una partizione finita di $[a, b]$ con i punti $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ tale che \mathbf{x} è regolare su ogni intervallo $[t_{i-1}, t_i]$.

La curva (2.3) non è regolare, ma regolare a tratti. Se adesso al posto $[a, b]$ si considera un intervallo qualunque, eventualmente illimitato, sarebbe troppo restrittivo imporre che i punti irregolari rimangano una quantità finita, ciò che invece ci interessa escludere è che si "addensino" eccessivamente in modo che non abbiano punti di accumulazione. Basta per questo che in ogni intervallo limitato contenuto ve ne sia un numero finito, come detto nella seguente definizione.

Definizione 2.4 - Una curva $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ viene detta **regolare a tratti** se $\mathbf{x} \in C^0(I)$ ed è regolare a tratti su ogni intervallo $[a, b] \subset I$.

Definizione 2.5 - Una curva regolare a tratti $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ viene detta **semplice** se

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b], \text{ di cui almeno uno in }]a, b[, \text{ si ha } \mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2).$$

In particolare è **semplice e chiusa** se è semplice e $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$.

Esercizio 2.3 - Disegnare la curva

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

e stabilirne il carattere scegliendo come dominio per il parametro t i diversi intervalli $[-2, 2]$, $[-2, 1]$ e $[-1, 1]$.

A partire da una curva $\mathbf{x}(t)$, con $t \in [a, b]$, mediante un *cambio di parametro* $t(\tau)$, con $\tau \in [\alpha, \beta]$, se ne ottiene un'altra $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau))$. Si deve richiedere alla funzione $t(\tau)$ di essere bigettiva in modo che \mathbf{x} e \mathbf{y} non solo abbiano lo stesso sostegno, ma lo percorrano nello stesso modo: se ad esempio una lo percorre una sola volta, lo stesso deve accadere per l'altra, se una si ferma in una certa posizione e poi torna indietro, allo stesso modo si deve comportare l'altra. Inoltre dobbiamo richiedere che $t(\tau)$ sia di classe C^1 perché sia conservata anche la regolarità nel passaggio da una curva all'altra. Ma allora la bigettività è assicurata se si suppone che $t(\tau)$ abbia derivata $t'(\tau) \neq 0$ ovunque. Chiaramente, poiché $t'(\tau)$ è continua, per il teorema degli zeri non potrà assumere su $[\alpha, \beta]$ valori di segno opposto e $t(\tau)$ sarà quindi strettamente monotona. Per ben noti risultati l'inversa $\tau(t)$ esiste in $C^1[a, b]$, è monotona nello stesso senso e $\tau'(t) = 1/t'(\tau(t))$. Con queste proprietà $t(\tau)$ prende il nome di *diffeomorfismo*.

Essendo $\mathbf{y}'(\tau) = \mathbf{x}'(t(\tau))t'(\tau)$, se $t'(\tau) > 0$ $t(\tau)$ è crescente e le due curve percorrono il loro comune sostegno nello stesso senso, in particolare $\mathbf{x}(a) = \mathbf{y}(\alpha)$ e $\mathbf{x}(b) = \mathbf{y}(\beta)$, altrimenti nel senso opposto, con $\mathbf{x}(a) = \mathbf{y}(\beta)$ e $\mathbf{x}(b) = \mathbf{y}(\alpha)$, nel caso decrescente $t'(\tau) < 0$. A seconda dei casi i corrispondenti vettori tangenti hanno lo stesso verso o versi opposti.

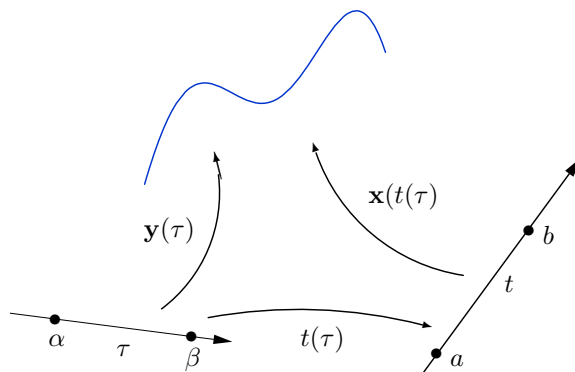


Figura 2.4: Cambio di parametro

Un cambio di parametro che conserva l'orientamento è ad esempio

$$t(\tau) = a + \tau(b - a), \quad \tau \in [0, 1],$$

se $a < b$. Invece $t(\tau) = b + \tau(a - b)$ con $\tau \in [0, 1]$, oppure $t(\tau) = a + b - \tau$ con $\tau \in [a, b]$, invertono l'orientamento. Vi sono ovviamente infiniti possibili cambiamenti di parametro, in un senso e nell'altro.

Definizione 2.6 - Diciamo che due curve $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{y} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$ sono **equivalenti**, e si scrive $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, se esiste un cambio di variabile $t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 , con derivata $t'(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$, tale che $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau))$.

Se ci interessa che venga conservato il verso di percorrenza, dobbiamo dare la seguente definizione più restrittiva.

Definizione 2.7 - Due curve $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{y} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$ sono **equivalenti come curve orientate**, e si scrive $\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{y}$, se esiste un cambio di variabile $t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 , con derivata $t'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$, tale che $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau))$.

Esercizio 2.4 - Dimostrare che le precedenti sono effettivamente relazioni di equivalenza tra curve.

Definizione 2.8 - Ogni classe di equivalenza di curve nel senso della prima definizione si chiama **cammino**, nel senso della seconda **cammino orientato**.

Esercizio 2.5 - Due curve, una semplice e l'altra no, anche se hanno lo stesso sostegno non possono essere equivalenti.

Definire l'equivalenza tra curve e quindi la nozione di cammino è un rimedio per conciliare due esigenze diverse: da un lato siamo interessati alla curva in sé nel senso concreto del termine, alla linea geometrica che si vede, che si vuole descrivere o disegnare, dall'altro, per fare i conti che servono, bisogna usare la curva nel senso della funzione di un parametro di cui la linea è il sostegno. Ora, se già disponiamo della curva come funzione possiamo disegnarne il sostegno e non si pone alcun problema.

Ma se, viceversa, partiamo dal sostegno, di curve ne troviamo infinite. Quale di queste è la più adatta? Quale curva con quel sostegno è migliore delle altre? Le due curve dell'Osservazione 2.2, entrambe semplici, hanno come sostegno lo stesso arco di parabola, ma non sono equivalenti per l'annullarsi in 0 della derivata del cambio di parametro, $t(\tau) = \tau^3$, e infatti una è regolare e l'altra no. L'usuale parametrizzazione della circonferenza dà luogo a curve diverse a seconda che si definiscano su $[0, 2\pi]$ o su $[0, 4\pi]$, ma non sono equivalenti, una è semplice e l'altra no, entrambe però sono regolari. Se non viene specificato come il sostegno deve essere percorso, certamente sarà preferibile una curva semplice e regolare, o almeno regolare a tratti, ammesso che esista, una o un'altra purché equivalenti. Ma per stabilire quali sono equivalenti non c'è bisogno, nell'ambito di quelle regolari e semplici, di cercare il cambio di variabile che trasforma una nell'altra, basta che abbiano lo stesso sostegno come stabilito nel seguente teorema che citiamo senza dimostrazione.

Teorema 2.9 - *Due curve regolari e semplici che hanno lo stesso sostegno sono tra loro equivalenti.*

Ne segue che in quest'ambito i due concetti, cammino (ma anche curva), come classe di equivalenza di curve regolari e semplici, e sostegno, possono essere identificati e i due termini considerati sinonimi.

2.2 Lunghezza di una curva e integrali curvilinei

Per misurare la lunghezza di una curva limitata, condizione senz'altro verificata se il parametro varia in un intervallo compatto, il metodo più intuitivo è quello di misurare una spezzata ottenuta riportando, uno di seguito all'altro, segmenti di lunghezza nota con gli estremi sulla curva. Ciò che si ottiene è un'approssimazione grossolana della lunghezza, ma sarà tanto di più precisa quanto maggiore è il numero dei segmenti, e quindi quanto minore è la loro lunghezza. Potrebbe accadere che migliorando l'approssimazione in questo modo le lunghezze delle spezzate tendano verso un limite finito, in questo caso diciamo che la curva è rettificabile ed è ragionevole assumere questo numero come lunghezza della curva. Altrimenti, se dovessero superare valori arbitrariamente grandi, la curva non può che avere lunghezza infinita. Noi diremo in questo caso che non è rettificabile, ma ci sarebbe da indagare più a fondo, cosa che ci porta nel regno dei frattali e esula dai nostri scopi, se non esistesse una nozione di misura di dimensione compresa tra 1 e 2, rispetto alla quale questo oggetto avrebbe misura finita.

Consideriamo un'applicazione $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e una partizione finita \mathcal{P} di $[a, b]$ corrispondente ai numeri $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$.

La spezzata S che viene a formarsi lungo il sostegno di \mathbf{x} mediante i punti $\mathbf{x}(t_i)$ ha come lunghezza

$$(2.4) \quad L(S) = \sum_{i=1}^k |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})|.$$

Ovviamente la partizione con il minor numero di punti è quella definita da $t_0 = a$ e $t_1 = b$, alla quale corrisponde l'approssimazione più grossolana $|\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a)|$ che è la lunghezza del segmento con gli stessi estremi della curva, dunque, qualunque sia \mathcal{P} , si ha

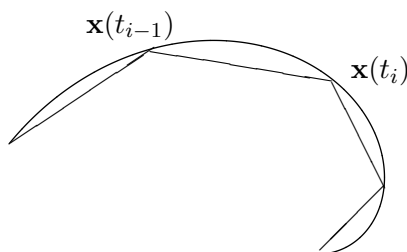


Figura 2.5: Approssimazione con spezzata

$$(2.5) \quad L(S) \geq |\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a)|.$$

Definizione 2.10 - Diciamo che \mathbf{x} è **rettificabile** se

$$(2.6) \quad L(\mathbf{x}) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^k |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| < +\infty.$$

In tal caso $L(\mathbf{x})$ è la **lunghezza** di \mathbf{x} .

Esercizio 2.6 - Verificare che se la definizione è soddisfatta su $[a, b]$ lo sarà a maggior ragione su ogni intervallo contenuto.

Per quanto non del tutto banale da dimostrare, vale anche la seguente proprietà di additività.

Esercizio 2.7 - Per ogni $c \in [a, b]$ si ha

$$L(\mathbf{x}_{|[a,c]}) + L(\mathbf{x}_{|[c,b]}) = L(\mathbf{x}).$$

Per meglio chiarire il senso della Definizione 2.10 vediamo il caso più semplice di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ e poi della curva cartesiana $(t, f(t))$, $t \in [a, b]$, che ha come sostegno il suo grafico.

Definizione 2.11 - Diciamo che f è a **variazione limitata** su $[a, b]$ se la seguente quantità, detta **variazione totale**, soddisfa

$$V_a^b(f) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty.$$

L'insieme delle funzioni che soddisfano questa condizione, cioè a variazione totale finita, si indica con $BV[a, b]$ (dall'inglese **bounded variation**).

La **variazione totale** è esattamente la misura complessiva di quanto f varia sommando con segno positivo sia le salite che le discese. Se f è costante ha variazione totale nulla, se $f(t) = \sin t$ ha variazione totale pari a 4 su $[0, 2\pi]$, ma pari a 6 su $[0, 3\pi]$. Ed ha senso per qualunque funzione, la variazione totale della funzione discontinua

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 3 - t & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

ha variazione totale pari a 3, si misurano anche i salti. Nel caso di una funzione limitata e monotona, mettiamo crescente, si vede molto bene perché qualunque sia la partizione \mathcal{P} risulta

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k [f(t_i) - f(t_{i-1})] = f(b) - f(a).$$

Se poi non è monotona, ma presenta un numero finito tratti in cui cresce e decresce, l'osservazione si applica ad ogni tratto e la proprietà continua a valere.

Vediamo un controesempio. La funzione

$$f(t) = t \operatorname{sen} \frac{1}{t}, \quad t \in [0, 2/\pi],$$

dove si può supporre $f(0) = 0$, non è a variazione limitata. Consideriamo la partizione finita di $[0, 2/\pi]$ mediante i punti

$$t_{k+1} = 0 \quad \text{e} \quad t_h = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + h\pi} \quad \text{se } 0 \leq h \leq k.$$

Allora per $1 \leq h \leq k$ si ha

$$|f(t_h) - f(t_{h-1})| = \left| \frac{(-1)^h}{\frac{\pi}{2} + h\pi} - \frac{(-1)^{h-1}}{\frac{\pi}{2} + (h-1)\pi} \right| = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2h+1} + \frac{1}{2h-1} \right) > \frac{2}{\pi h},$$

da cui

$$\sum_{h=1}^k |f(t_h) - f(t_{h-1})| > \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^k \frac{1}{h}.$$

Passando a sinistra all'estremo superiore su tutte le partizioni si ottiene

$$V_0^{2/\pi}(f) > \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^k \frac{1}{h} \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

e passando ora al limite per $k \rightarrow \infty$ a destra si ottiene $V_0^{2/\pi}(f) = +\infty$. Se accanto a questa funzione consideriamo adesso la curva cartesiana $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))$ sullo stesso intervallo, che ha come sostegno il grafico di f , nella sua variazione totale compaiono anche le variazioni di t e vale la stima inferiore

$$\begin{aligned} V_0^{2/\pi}(\mathbf{x}) &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{h=1}^k \sqrt{(t_h - t_{h-1})^2 + (f(t_h) - f(t_{h-1}))^2} \\ &\geq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{h=1}^k |f(t_h) - f(t_{h-1})| = V_0^{2/\pi}(f). \end{aligned}$$

Dunque per il fatto che f non è a variazione limitata il suo grafico non è rettificabile.

Alla luce di queste considerazioni, se andiamo a rivedere la Definizione 2.10 riconosciamo che una curva $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ è rettificabile se e solo se ogni funzione componente $x_i(t)$ è a variazione limitata e la lunghezza (2.6) non è altro che la variazione totale della $\mathbf{x}(t)$.

Nel seguente teorema si dimostra che ogni curva regolare a tratti è rettificabile e si dà la formula per calcolarne la lunghezza.

Teorema 2.12 - *Ogni curva $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ regolare a tratti è rettificabile e*

$$L(\mathbf{x}) = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

Dimostrazione. La prima affermazione è immediata. Scelta infatti una partizione \mathcal{P} qualsiasi con le notazioni usate nella (2.4), si ha

$$\sum_{i=1}^k |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{x}'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{x}'(t)| dt = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

Per le ipotesi fatte su \mathbf{x} l'integrale a destra è finito e non dipende dalla partizione scelta a sinistra. Dunque la curva è rettificabile e passando all'estremo superiore al primo membro si ottiene

$$L(\mathbf{x}) \leq \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

Dimostriamo adesso la disuguaglianza opposta e non solo su $[a, b]$, ma direttamente su ogni intervallo $[a, t]$, con $t \in [a, b]$, sfruttando gli Esercizi 2.6 e 2.7. Ci fa comodo qui supporre \mathbf{x} regolare anziché regolare a tratti, ma questa ipotesi non è più restrittiva perché ci possiamo ricondurre facilmente ad essa ragionando su ogni sottointervallo dove è regolare, grazie ancora all'additività dell'Esercizio 2.7. Indichiamo con $s(t)$ la

lunghezza della curva ristretta all'intervallo $[a, t]$, cioè $s(t) = V_a^t(\mathbf{x})$. Per $t_0 < t$ (il caso opposto è analogo), dalla (2.5) e dall'Esercizio 2.7 si ottiene

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)| \leq s(t) - s(t_0) \leq \int_{t_0}^t |\mathbf{x}'(\tau)| d\tau$$

e quindi

$$\left| \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0} \right| \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t |\mathbf{x}'(\tau)| d\tau.$$

Ora, il primo membro converge a $|\mathbf{x}'(t_0)|$ perché \mathbf{x} è derivabile e il terzo tende allo stesso limite perché \mathbf{x}' è continua. Per confronto, per ogni $t \in [a, b]$ esiste la derivata di $s(t)$ e

$$(2.7) \quad s'(t) = |\mathbf{x}'(t)|.$$

Coincidendo s' con una funzione continua, $t \rightarrow s(t)$ è di classe $C^1[a, b]$ e

$$(2.8) \quad s(t) = \int_a^t |\mathbf{x}'(\tau)| d\tau.$$

In particolare

$$s(b) = L(\mathbf{x}) = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

□

Che si tratti di funzioni scalari o vettoriali, definite su un intervallo I , il Teorema 2.12 può essere interpretato anche così:

$$C^1[a, b] \subset BV[a, b] \quad \text{e} \quad V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx \quad \forall f \in C^1[a, b].$$

La 2.8 può essere interpretata come un cambio di parametro crescente, ma sarebbe stato decrescente se avessimo calcolato la lunghezza a partire dall'estremo b , infatti

$$s(t) = \int_t^b |\mathbf{x}'(\tau)| d\tau \quad \Rightarrow \quad s'(t) = -|\mathbf{x}'(t)| < 0.$$

Comunque non è necessario scegliere $s = 0$ in corrispondenza di uno degli estremi, del resto ciò è inevitabile se l'intervallo è tutto \mathbf{R} . Se nella 2.8 si sceglie a interno all'intervallo, $s(t)$ assume valori di segno opposto, da una parte e dall'altra di a , pur rimanendo strettamente monotona e con derivata di segno costante. Il parametro s introdotto nel Teorema 2.12 si chiama *ascissa curvilinea* o *arco*.

Esercizio 2.8 - Dimostrare che se $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{y} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$ sono equivalenti, se una di esse è rettificabile allora lo è anche l'altra e

$$\int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\mathbf{y}'(\tau)| d\tau.$$

È dunque lecito prescindere dalla particolare curva di una classe di equivalenza e fare riferimento al cammino γ , o alla curva $\gamma(t)$ intesa come rappresentante, avente γ come sostegno, ponendo

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_I |\gamma'(t)| dt,$$

dove I è un l'intervallo su cui è definita la curva $\gamma(t)$ scelta per rappresentare γ .

Per meglio chiarire il significato geometrico e l'uso di s , scriviamo la relazione (2.7) nella forma

$$(2.9) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}.$$

Risulta allora che la metrica sulla curva viene generata dall'elemento infinitesimo di lunghezza

$$(2.10) \quad ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2},$$

in accordo con la metrica euclidea di \mathbf{R}^n . È naturale dunque che per gli integrali curvilinei si usi, come vedremo tra poco, una notazione che contenga ds come elemento di integrazione.

Per una curva cartesiana avente come sostegno il grafico di una $f \in C^1[a, b]$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in [a, b], \end{cases}$$

l'ascissa curvilinea ha derivata

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + f'(t)^2},$$

da cui segue la formula della lunghezza

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Ovviamente ci si può arrivare anche con la (2.10)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Per una curva data, invece, in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \rho(\vartheta) \sin \vartheta, \quad \vartheta \in I, \end{cases}$$

si ottiene

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}$$

e quindi

$$(2.11) \quad L = \int_I \sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2} d\vartheta.$$

La *spirale di Archimede* è la traiettoria, nel riferimento assoluto, di un punto che si muove, con velocità relativa costante, lungo un raggio dal centro verso il bordo, di un disco rotante attorno al suo centro con velocità angolare costante. Se infatti la legge del moto relativo è $\rho(t) = vt$ lungo un raggio, il versore di questo rispetto ad un sistema di riferimento fisso (x, y) con l'origine nel centro del disco ha componenti $(\cos \omega t, \sin \omega t)$. Quindi nel riferimento assoluto la legge del moto è

$$\begin{cases} x(t) = vt \cos \omega t \\ y(t) = vt \sin \omega t. \end{cases}$$

Le coordinate polari in funzione di t sono $\rho(t) = vt$ e $\vartheta(t) = \omega t$, ma eliminando t si ottiene $\rho(\vartheta) = v\vartheta/\omega$. Se si vuole calcolare la lunghezza di un arco qualsiasi della curva, da ϑ_1 a ϑ_2 , basta applicare la (2.11)

$$L = \frac{v}{\omega} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta.$$

Siano Ω un aperto contenuto in \mathbf{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e γ un cammino regolare a tratti e rettificabile, contenuto in Ω , su cui f è limitata. La funzione $t \rightarrow f(\gamma(t))$, che è una rappresentazione parametrica della restrizione $f|_{\gamma}$, è continua e quindi integrabile su I .

Definizione 2.13 - Si chiama integrale di f lungo il cammino γ il numero

$$\int_{\gamma} f ds = \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

In particolare riconosciamo la lunghezza di γ se f è la funzione costante pari a 1. Questa definizione ha senso perché dipende solo dal cammino, come si è visto per la lunghezza, ma non dalla particolare curva che lo rappresenta. Inoltre, per le ipotesi fatte, si ha

$$\left| \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \right| \leq L(\gamma) \sup_{t \in I} |f(t)| < +\infty.$$

Esercizio 2.9 - Trovare il tensore d'inerzia nel riferimento dei tre assi x, y e z della spirale logaritmica di equazione $\rho(\vartheta) = ke^{-\vartheta}$, dove $\vartheta \geq 0$ e $k > 0$ è una costante assegnata, contenuta nel piano (x, y) .

I momenti richiesti sono i seguenti integrali curvilinei

$$I_x = \int_{\gamma} y^2 ds, \quad I_y = \int_{\gamma} x^2 ds, \quad I_z = I_x + I_y, \quad I_{xy} = - \int_{\gamma} xy ds \quad \text{e} \quad I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Usiamo adesso la relazione (2.11) tra l'elemento d'arco e la variazione d'angolo e applichiamo la Definizione 2.13

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{+\infty} k^2 e^{-2\vartheta} \sin^2 \vartheta \sqrt{k^2 e^{-2\vartheta} + k^2 e^{-2\vartheta}} d\vartheta \\ &= k^3 \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-3\vartheta} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{k^3}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-3\vartheta} (1 - \cos 2\vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Allo stesso modo si ricava

$$I_y = \frac{k^3}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-3\vartheta} (1 + \cos 2\vartheta) d\vartheta \quad \text{e} \quad I_{xy} = - \frac{k^3}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-3\vartheta} \sin 2\vartheta d\vartheta.$$

Con facili calcoli

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-3\vartheta} d\vartheta &= \frac{1}{3}, \\ \int_0^{+\infty} e^{-3\vartheta} (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) d\vartheta &= \int_0^{+\infty} e^{(-3+2i)\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{-3+2i} \left[e^{(-3+2i)\vartheta} \right]_0^{+\infty} = \frac{3+2i}{13} \end{aligned}$$

e quindi si ottengono i momenti d'inerzia

$$I_x = \frac{2k^3\sqrt{2}}{39}, \quad I_y = \frac{11k^3\sqrt{2}}{39}, \quad I_{xy} = -\frac{k^3\sqrt{2}}{13}, \quad I_z = I_x + I_y = \frac{k^3\sqrt{2}}{3}.$$

Il tensore richiesto è dunque rappresentato dalla matrice

$$\frac{k^3\sqrt{2}}{39} \begin{pmatrix} 11 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

e con questa rappresentazione possiamo poi calcolare i momenti principali d'inerzia e i relativi assi principali.

2.3 Elementi di geometria differenziale delle curve in \mathbf{R}^3

A partire da un cammino $\gamma(t)$, col cambio di variabile $t(s)$ in cui t viene espresso in funzione dell'arco s , si ottiene la curva $\mathbf{x}(s) = \gamma(t(s))$. Per la (2.7), il vettore tangente è un versore, infatti

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{x}'(s) = \gamma'(t(s))t'(s) = \frac{\gamma'(t)}{s'(t)} \Big|_{t=t(s)} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \Big|_{t=t(s)}.$$

Naturalmente si poteva considerare l'orientamento opposto per l'arco e in tal caso avremmo ottenuto il verso opposto anche per \mathbf{T} , vettore orientato nello stesso senso di s .

Supponiamo adesso che la curva sia almeno di classe C^3 . Il vettore $\mathbf{x}''(s) = \mathbf{T}'(s)$ è, ricordiamo, ortogonale a $\mathbf{T}(s)$ stesso in quanto avente modulo costante. Ne segue che esiste una funzione $\chi(s) \geq 0$ e un versore $\mathbf{N}(s)$ ortogonale a \mathbf{T} tale che $\mathbf{T}'(s) = \chi(s)\mathbf{N}(s)$. Tra tutti i vettori ortogonali a \mathbf{T} , formanti il *piano normale*, \mathbf{N} è uno di questi e si chiama *normale principale*. Dobbiamo però osservare che in corrispondenza di quei valori di s per cui $\chi(s) = 0$ la normale principale non è definita, comunque si può sempre scegliere un opportuno versore del piano normale. Al piano normale appartiene anche il versore $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ che prende il nome di *binormale*.

Vediamo adesso il significato geometrico delle funzioni χ e \mathbf{N} . Fissato un particolare punto della curva, per esempio $P_0 = \mathbf{x}(0)$, poniamo $\mathbf{T} = \mathbf{x}'(0)$ e supponiamo $\chi(0) > 0$. Consideriamo la totalità dei versori \mathbf{n} normali a \mathbf{T} , tra cui figura anche \mathbf{N} , e il fascio di piani (\mathbf{T}, \mathbf{n}) al variare di \mathbf{n} . Ogni cerchio tangente alla curva in P_0 deve giacere in uno di questi piani e noi vogliamo determinare, tra tutti questi cerchi, quello che ha un contatto con la curva in P_0 di ordine superiore agli altri. Il generico di essi è, nel riferimento (\mathbf{T}, \mathbf{n}) , il sostegno della curva

$$\mathbf{y}(\sigma) = r \left[\operatorname{sen} \frac{\sigma}{r} \mathbf{T} + \left(1 - \cos \frac{\sigma}{r} \right) \mathbf{n} \right]$$

dove σ indica l'ascissa curvilinea e r il raggio. Derivando rispetto a σ

$$\mathbf{y}'(\sigma) = \cos \frac{\sigma}{r} \mathbf{T} + \operatorname{sen} \frac{\sigma}{r} \mathbf{n}$$

otteniamo ciò che ci si deve aspettare $\mathbf{y}'(0) = \mathbf{T}$, la quale è vera per tutti i cerchi tangenti, ma derivando ancora

$$\mathbf{y}''(\sigma) = \frac{1}{r} \left(-\operatorname{sen} \frac{\sigma}{r} \mathbf{T} + \cos \frac{\sigma}{r} \mathbf{n} \right)$$

si ottiene $\mathbf{y}''(0) = \mathbf{n}/r$. Il contatto di ordine superiore con la curva data, $x(s)$, si ottiene eguagliando le derivate seconde

$$\mathbf{y}''(0) = \mathbf{x}''(0) \Leftrightarrow \frac{1}{r} \mathbf{n} = \chi(0)\mathbf{N}.$$

Abbiamo così dimostrato che in ogni punto $\mathbf{x}(s)$ il cerchio ottimale, detto *cerchio osculatore*, è quello che giace nel piano (\mathbf{T}, \mathbf{N}) , il *piano osculatore*, ed ha raggio $r = 1/\chi(s)$. La funzione χ si chiama *curvatura*, il centro e il raggio del cerchio osculatore si chiamano rispettivamente *centro di curvatura*, verso cui è diretta la normale principale \mathbf{N} , e *raggio di curvatura*. Il centro di curvatura è allora il punto $C(s) = \mathbf{x}(s) + \mathbf{N}/\chi$.

Una *curva piana* è una curva $\mathbf{x}(s)$ tutta contenuta in un piano fisso, in tal caso esistono $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^3$ e $c \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}(s) = c$ per ogni $s \in I$. Derivando rispetto ad s una volta, e poi una seconda volta, si deduce che \mathbf{h} è ortogonale sia a \mathbf{T} che a \mathbf{N} , dunque è parallelo a \mathbf{B} . Ne segue che una curva è piana se e solo se la sua binormale è costante. Vediamo allora che cosa succede quando \mathbf{B} varia con s . Al solito $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} = 0$, quindi \mathbf{B}' è combinazione lineare di \mathbf{T} e \mathbf{N}

$$\mathbf{B}'(s) = \alpha(s)\mathbf{T}(s) - \tau(s)\mathbf{N}(s)$$

per qualche funzione scalare $\alpha(s)$ e $\tau(s)$. Ma $\alpha(s) = 0$ come si vede moltiplicando scalarmente per \mathbf{T}

$$\alpha(s) = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = -\mathbf{B} \cdot \chi\mathbf{N} = 0.$$

La funzione $\tau(s)$, detta *torsione*, è strettamente legata alla variazione del versore binormale, più precisamente $|\mathbf{B}'| = |\tau|$, e va interpretata come una misura della tendenza della curva ad allontanarsi dal suo piano osculatore, in particolare $\tau = 0$ se e solo se la curva è piana.

Rimane da calcolare \mathbf{N}' . Posto

$$\mathbf{N}'(s) = \alpha(s)\mathbf{T}(s) + \beta(s)\mathbf{B}(s),$$

ragionando come sopra si ottiene

$$\alpha(s) = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -\chi \quad \text{e} \quad \beta(s) = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = \tau.$$

Riassumendo abbiamo ottenuto il sistema di *Frénet-Sérret*

$$(2.12) \quad \begin{cases} \mathbf{T}' = \chi\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' = -\chi\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N} \end{cases}$$

La terna destra $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ costituisce una base locale che segue il punto lungo la curva al variare di s e prende il nome di *terna intrinseca*. Le equazioni (2.12) tornano utili se vogliamo ricostruire una curva, in funzione dell'ascissa curvilinea come suo parametro naturale, assegnando curvatura e torsione. Consideriamo ad esempio una curva piana, quindi con $\tau = 0$, per la quale il sistema (2.12) si riduce a

$$(2.13) \quad \begin{cases} \mathbf{T}' = \chi\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' = -\chi\mathbf{T} \end{cases}$$

Qui basta assegnare la curvatura, ma questa coincide, a meno del segno, con la derivata dell'angolo che la tangente forma con una direzione fissa del piano. Infatti, se $\mathbf{T} = \cos \varphi(s)\mathbf{e}_1 + \sin \varphi(s)\mathbf{e}_2$, si ha

$$\chi\mathbf{N} = \mathbf{T}' = \varphi'(-\sin \varphi\mathbf{e}_1 + \cos \varphi\mathbf{e}_2)$$

dove il versore in parentesi coincide con \mathbf{N} se $\varphi' > 0$, cioè se φ è crescente, altrimenti è ad esso opposto. In ogni caso $|\varphi'| = \chi$, da cui, per integrazione, si ricava $\varphi(s)$ a meno di una costante e quindi anche $\mathbf{T}(s)$ e poi $\mathbf{x}(s)$ con altre due integrazioni. Complessivamente le costanti arbitrarie sono 3, in accordo col grado di libertà di un corpo rigido nel piano.

Esercizio 2.10 - Trovare la curva piana la cui tangente forma con \mathbf{e}_1 l'angolo $\varphi(s) = \arctg s$.

Anche nel caso generale, date due funzioni $\chi(s) > 0$ in C^1 e $\tau(s)$ in C^0 , si può dimostrare che esiste un'unica curva $\mathbf{x}(s)$, determinata a meno di uno spostamento rigido, che ammette χ come curvatura e τ come torsione.

Cerchiamo adesso le espressioni per la curvatura e la torsione usando alcuni tipi di parametrizzazione di uso comune. Per la prima equazione del sistema (2.12) si ha $\chi(s) = |\mathbf{x}''(s)|$. Ora, se $\mathbf{x} = \gamma(t)$, si ha

$$\mathbf{x}''(s) = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) \frac{1}{|\gamma'(t)|} = \frac{\gamma'' |\gamma'|^2 - \gamma' \cdot \gamma' \gamma''}{|\gamma'|^4} = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{|\gamma'|^4},$$

da cui, passando al modulo e tenendo presente che $\gamma' \times \gamma''$ è ortogonale a γ' , si ottiene

$$(2.14) \quad \chi(t) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

In particolare per una curva cartesiana $\gamma(t) = (t, f(t))$ si ottiene

$$(2.15) \quad \chi(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Sono molto frequenti in teoria delle travi, dove si indica di solito con u la componente trasversale dello spostamento, situazioni in cui il grafico di u , la trave deformata, è quasi rettilineo, per cui $|u'| \ll 1$ ed è lecito trascurare $|u'|$ al denominatore della (2.15) e assumere $|u''|$ come curvatura.

Se la curva è piana ed espressa in coordinate polari $\mathbf{x}(\vartheta) = \rho(\vartheta)(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ si ottiene dalla (2.14)

$$(2.16) \quad \chi(\vartheta) = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Riguardo alla torsione, osserviamo che

$$\mathbf{x}'(s) \times \mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{x}'''(s) = \mathbf{T} \times \chi \mathbf{N} \cdot [\chi' \mathbf{N} + \chi(-\chi \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})] = \chi^2 \tau$$

e se $\chi \neq 0$ si ha

$$(2.17) \quad \tau(s) = \frac{\mathbf{x}'(s) \times \mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{x}'''(s)}{\chi^2}.$$

Esercizio 2.11 - Dimostrare che con un po' di calcoli e di pazienza si perviene all'espressione della torsione per una curva generica $\mathbf{x}(t)$

$$(2.18) \quad \tau(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}.$$

Esempi

2.1 Calcoliamo curvatura e torsione dell'elica cilindrica di passo costante pari a $k/2\pi$

$$\begin{cases} x_1(\vartheta) = R \cos \vartheta \\ x_2(\vartheta) = R \sin \vartheta \\ x_3(\vartheta) = k\vartheta, \end{cases} \quad \vartheta \in \mathbf{R}.$$

Dalla (2.14) segue che $\chi(\vartheta)$ è costante e vale

$$\chi = \frac{R}{R^2 + k^2},$$

mentre dalla (2.17) si ottiene per la torsione

$$\tau = \frac{k}{R^2 + k^2}.$$

2.2 Vediamo il caso dell'elica conica

$$\begin{cases} x_1(\vartheta) = R\vartheta \cos \vartheta \\ x_2(\vartheta) = R\vartheta \sin \vartheta \\ x_3(\vartheta) = kR\vartheta, \end{cases} \quad \vartheta \in \mathbf{R}.$$

Questa curva è contenuta nel cono di equazione $x_3^2 = k^2(x_1^2 + x_2^2)$ (k è la tangente dell'angolo che le generatrici formano col piano $x_3 = 0$) passa dal vertice per $\vartheta = 0$ e sta nella falda superiore se $\vartheta > 0$ e in quella inferiore se $\vartheta < 0$. Sempre ricorrendo alla (2.14) si ottiene

$$\chi(\vartheta) = \frac{\sqrt{\vartheta^4 + (k^2 + 4)\vartheta^2 + 4(k^2 + 1)}}{R(\vartheta^2 + k^2 + 1)^{3/2}}$$

e dalla (2.18) discende

$$\tau(\vartheta) = \frac{k(\vartheta^2 + 6)}{R[\vartheta^4 + (k^2 + 4)\vartheta^2 + 4(k^2 + 1)]}.$$

Esercizio 2.12 - Calcolare curvatura e torsione per l'elica

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t \cos t \\ x_2(t) = e^t \sin t \\ x_3(t) = ke^{2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Questa è contenuta nel paraboloide $z = k(x^2 + y^2)$ e compie infiniti giri intorno al vertice. Curvatura e torsione dovrebbero valere

$$\chi(t) = \frac{\sqrt{1 + 4k^2 e^{2t}}}{\sqrt{2}e^t(1 + 2k^2 e^{2t})^{3/2}} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{2k}{1 + 4k^2 e^{2t}}.$$

Il sistema (2.12) ha notevole importanza nella dinamica del punto vincolato ad una guida curvilinea. Esprimendo l'arco s in funzione del tempo è possibile ricavare le espressioni intrinseche per la velocità e l'accelerazione

$$\mathbf{v} = x'(s)\dot{s} = \dot{s}\mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{N}$$

dove ρ è il raggio di curvatura, $a_T = \ddot{s}$ è l'accelerazione tangenziale e $a_N = \dot{s}^2/\rho$ è l'accelerazione normale o *centripeta*. L'equazione fondamentale della dinamica scritta in componenti intrinseche è il sistema

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_T(s, \dot{s}, t) + \Phi_T \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_N(s, \dot{s}, t) + \Phi_N \\ 0 = F_B(s, \dot{s}, t) + \Phi_B \end{cases}$$

dove $\mathbf{F} = (F_T, F_N, F_B)$ è la risultante delle forze attive, cioè quelle note e assegnate in funzione della posizione, velocità e del tempo, e $\Phi = (\Phi_T, \Phi_N, \Phi_B)$ la reazione vincolare che è sempre incognita insieme alla $s(t)$. Assegnando posizione e velocità all'istante iniziale e con ipotesi sulla natura del vincolo, come l'assenza di attrito che comporta $\Phi_T = 0$, si può risolvere completamente il problema del moto ricavandone la legge $\mathbf{x}(s(t))$, la posizione in funzione del tempo.

Nel moto dell'Esercizio 2.1 si conserva l'energia, in questo caso ridotta alla sola energia cinetica dal momento che la forza di Lorenz non compie lavoro

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \text{costante},$$

quindi si tratta di un moto uniforme. Ma anche l'accelerazione, necessariamente solo centripeta, deve avere modulo costante in quanto prodotto vettoriale di due vettori ortogonali e di modulo costante, quindi, essendo \dot{s} costante, è costante anche il raggio di curvatura ρ . Nel piano l'unica curva con raggio di curvatura costante è la circonferenza.

Definizione 2.14 - *L'evoluta di una curva data è il luogo dei suoi centri di curvatura, essa coincide con l'inviluppo delle rette normali.*

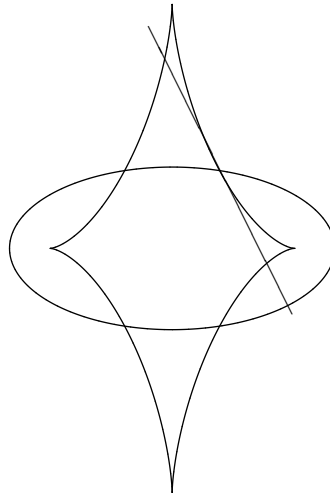


Figura 2.6: L'evoluta dell'ellisse

Le equazioni parametriche, $x = k(t)$, dell'evoluta si ricavano subito sommando al punto $\gamma(t)$ il vettore concorde con \mathbf{N} e di modulo pari al raggio di curvatura: $k(t) = \gamma(t) + \mathbf{N}(t)/\chi(t)$. Nelle Figura 2.6 si mostra un'ellisse con la sua evoluta. Si osservi che si formano delle cuspidi nell'evoluta in corrispondenza dei punti di massima e minima curvatura.

Definizione 2.15 - *L'evolvente di una data curva γ è una curva che ammette γ come evoluta.*

L'evolvente non è unica. Per ottenerla sperimentalmente si prenda una curva materiale, rigida e piana in un piano verticale e si appenda in un punto di essa, dalla parte opposta al centro di curvatura, un'estremità di un filo inestensibile e perfettamente flessibile con un grave appeso nell'altra estremità lasciata libera. Durante i movimenti in cui il filo è teso e parzialmente a contatto con l'evoluta, l'estremità libera descrive l'evolvente. Il cerchio ed una sua evolvente sono illustrati nella Figura 2.7.

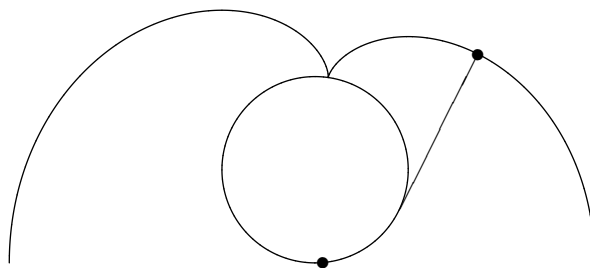


Figura 2.7: Il cerchio ed una sua evolvente

Esercizio 2.13 - Sulla base di questa descrizione si provi a ricavare una formula per l'evolvente.

Si chiama *cicloide* la traiettoria generata dal movimento di un punto del bordo di un disco rotola senza strisciare. Detto R il raggio del disco e scelto l'asse x nel piano d'appoggio coincidente con la retta di contatto, può essere riconosciuta come il sostegno della curva

$$\begin{cases} x = R(\vartheta - \operatorname{sen} \vartheta) \\ y = R(1 - \cos \vartheta) \end{cases}$$

dove $\vartheta \in \mathbf{R}$ è l'angolo tra un fissato raggio e la direzione verticale discendente.

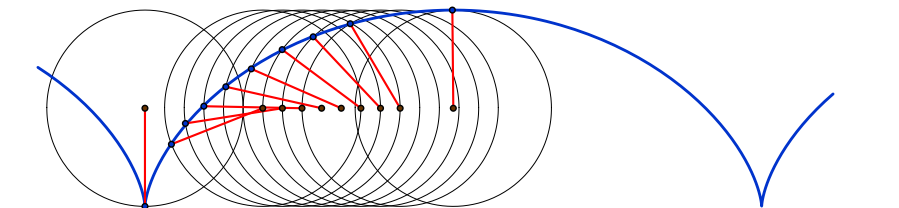


Figura 2.8: Come si genera la cicloide

Esercizio 2.14 - Verificare che l'evolvente di una cicloide è una cicloide identica, ma spostata, in modo che sia rispettata la corrispondenza di cui sopra tra i punti di massima e minima curvatura e le cuspidi.

Sull'Esercizio 2.14 si basa la costruzione dell'orologio a pendolo di forma cicloidale di **Huygens** (*Horologium oscillatorium*, Paris 1673). Facendo oscillare una fune tra due ali cicloidalì, il grave percorre una cicloide e le sue oscillazioni sono isocrone. La cicloide è detta infatti *tautochròna* perché un grave che percorre una guida liscia con quella forma in un piano verticale compie oscillazioni isocrone qualunque sia la loro ampiezza, a differenza del pendolo semplice in cui l'isocronismo è proprio soltanto delle piccole oscillazioni. La cicloide è anche la *brachistocròna*, cioè la curva di minimo tempo nella caduta di un grave tra due punti dati. Il problema fu posto da **Johann Bernoulli** nel 1696 e risolto da suo fratello **Jacob**, ma non solo da lui, ed è uno dei problemi storici più famosi tra quelli che hanno gettato le basi del Calcolo delle Variazioni.

2.4 Integrazione dei campi vettoriali

Talvolta viene chiamato *campo vettoriale* una funzione $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ dove Ω è un aperto contenuto in \mathbf{R}^n . In componenti

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Un esempio di campo vettoriale è la legge della forza agente su una particella dipendente in generale dalla sua posizione, dalla sua velocità e dal tempo. Si tratta in questo caso di una funzione $\mathbf{F} : \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$. Un altro esempio è il campo vettoriale delle velocità dei vari punti di un corpo in movimento, solido o fluido. Se in un fiume misuriamo in un dato punto \mathbf{x} , all'istante t , la velocità \mathbf{v} della particella d'acqua che in quell'istante passa da quel punto, si definisce il campo vettoriale delle velocità $\mathbf{v}(x, t)$. Se esso non dipende da t significa che l'aspetto complessivo del fiume non varia col tempo e allora diciamo che \mathbf{v} è un campo *stazionario*. Ma se il fiume ingrossa per la pioggia, o perchè a monte è stata aperta una diga, almeno in una fase transitoria viene a dipendere da t .

In questo paragrafo supponiamo $m = n$ da ora in poi.

Definizione 2.16 - Se \mathbf{F} dipende solo da (\mathbf{x}, t) , si chiama *linea vettoriale* o *linea di corrente* del campo \mathbf{F} una curva γ che in ogni suo punto ammette \mathbf{F} come vettore tangente.

Le linee vettoriali sono dunque tutte e sole le soluzioni $\mathbf{x}(t)$ del sistema di equazioni differenziali, espresso in forma vettoriale da

$$(2.19) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t).$$

Nel caso di un campo piano $\mathbf{F}(x_1, x_2, t)$, ad esempio, ogni linea vettoriale risolve il sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

Ovviamente si ottengono curve equivalenti se il secondo membro della (2.19) viene moltiplicato per uno scalare, d'altra parte è la condizione di parallelismo tra il vettore tangente \mathbf{x}' e il campo \mathbf{F} quella che dà luogo all'equazione differenziale. In dimensione 3 per esempio la (2.19) può essere sostituita dall'annullarsi del prodotto vettoriale $\mathbf{x}' \times \mathbf{F}(x, t)$, da cui, eliminando il parametro t , si ricava un'altra forma equivalente per lo stesso problema

$$(2.20) \quad F_1 x_2' - F_2 x_1' = F_2 x_3' - F_3 x_2' = F_3 x_1' - F_1 x_3' = 0.$$

Senza poter ricorrere al prodotto vettoriale, la condizione (2.20) può invece scriversi in dimensione n qualsiasi ed esprime il fatto che la matrice $2 \times n$ che ha come righe le componenti di \mathbf{F} e quelle di \mathbf{x}' deve avere caratteristica pari a 1 se vogliamo che esse siano parallele.

Supponiamo che \mathbf{F} sia continua su Ω

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$$

e, almeno per ora, che dipenda soltanto da \mathbf{x} . Dato un cammino orientato $\gamma : I \rightarrow \Omega$, regolare a tratti e rettificabile, la funzione composta $t \rightarrow \mathbf{F}(\gamma(t))$, che rappresenta la restrizione $\mathbf{F}|_{\gamma}$, è continua e, se limitata, anche integrabile su I , ne segue in questo caso che $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ è integrabile.

Definizione 2.17 - Si chiama *integrale di \mathbf{F} su γ* il numero

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_I \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

dove \mathbf{T} è il versore tangente a γ .

Questa definizione ha senso per gli stessi motivi con cui abbiamo giustificato la correttezza della Definizione 2.13, con la sola eccezione che la relazione di equivalenza da ritenere significativa è quella che tiene conto dell'orientamento. Su due curve equivalenti ma con orientamenti opposti l'integrale cambia segno. Nel caso di un cammino piano, scelta una terna ortonormale destra $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ con \mathbf{e}_3 ortogonale al piano, diciamo che un cammino chiuso γ è positivamente orientato, lo indichiamo allora con γ^+ , se, preso un punto O della regione interna, si ha $(\gamma(t) - O) \times \gamma'(t) \cdot \mathbf{e}_3 \geq 0$. In altre parole la curva deve essere percorsa lasciando a sinistra la regione interna, a sinistra per un osservatore orientato, dai piedi alla testa, nello stesso senso di \mathbf{e}_3 .

La notazione usata a primo membro nella Definizione 2.17 è particolarmente efficace perché è esattamente quello che si ottiene usando l'ascissa curvilinea. Tenendo presente la (2.9), possiamo ricorrere all'"elemento infinitesimo" vettoriale

$$d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \dots, \frac{dx_n}{ds} \right) ds = \mathbf{T} ds$$

e usare quindi per l'integrale anche la notazione

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n.$$

Nella Definizione 2.17 si riconosce il concetto di *lavoro* di un campo vettoriale lungo una curva come somma nel continuo, cioè come integrale, dei lavori elementari relativi a tratti infinitesimi di curva. Nel caso più generale in cui \mathbf{F} dipende anche da $\dot{\mathbf{x}}$ e da t il lavoro si definisce come l'integrale sull'intervallo di tempo $I = [t_1, t_2]$ della *potenza* $W(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$

$$\mathcal{L}_{\gamma}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt$$

e dipende, oltreché dal cammino γ rappresentato dalla curva $\mathbf{x}(t)$ tra le due posizioni iniziale e finale $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$, anche dall'intervallo I di integrazione temporale. Ma solo nel caso *posizionale*, di \mathbf{F} dipendente esclusivamente da \mathbf{x} , il lavoro viene a dipendere solo da γ e non dal tempo, infatti per la Definizione 2.17

$$\mathcal{L}_{\gamma}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Vedremo più avanti il caso dei campi conservativi, per i quali il lavoro non dipende da γ , ma solo dalle posizioni iniziale e finale, per cui si potrà scrivere $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Esercizio 2.15 - Dimostrare il teorema del lavoro: la variazione di energia cinetica $T(t_2) - T(t_1)$ durante un moto dinamicamente possibile tra due istanti t_1 e t_2 è pari al lavoro della forza compiuto durante il moto tra gli stessi istanti.

Scegliendo per $\mathbf{x}(t)$ una soluzione dell'equazione fondamentale della dinamica, cioè un qualsiasi moto dinamicamente possibile, si ottiene immediatamente la versione differenziale dell'enunciato

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = m\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = W(t),$$

nota come *teorema delle forze vive*, da cui segue

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt = \mathcal{L}_\gamma(t_1, t_2).$$

Esercizio 2.16 - Verificare che l'integrale di un campo costante \mathbf{F} su una curva chiusa è nullo.

Infatti, se $\gamma(a) = \gamma(b)$ si ha

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot \gamma'(t) dt = \mathbf{F} \cdot \int_a^b \gamma'(t) dt = \mathbf{F} \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) = 0.$$

Esercizio 2.17 - Verificare che la forza di Lorentz è a potenza nulla, quindi non compie lavoro, (al pari della forza di Coriolis nel riferimento relativo durante il moto di un punto).

Infatti in questo caso

$$W(t) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Un teorema dovuto a **Jordan**, che nonostante l'apparenza non è affatto banale, afferma che il sostegno di una curva piana, semplice e chiusa divide il piano che la contiene in due parti, una limitata, la regione interna, e una non limitata, quella esterna. Con un ragionamento euristico, che renderemo rigoroso più avanti nel corso, scopriamo adesso una formula per il calcolo dell'area della regione interna. Consideriamo il triangolino formato dal vettore posizione iniziale $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2)$ e la posizione finale $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. La sua area (scalare con segno) vale

$$\frac{1}{2} \mathbf{x} \times d\mathbf{x} = \frac{1}{2} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

quindi l'area spazzata dal vettore $\mathbf{x}(t) = P(t) - O$ in corrispondenza di un cammino γ di estremi $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ è l'integrale su γ del campo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)$ e vale

$$(2.21) \quad A = \frac{1}{2} \int_\gamma (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)) dt.$$

Se ad esempio la curva è espressa in coordinate polari $\gamma(\vartheta) = \rho(\vartheta)(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$, con $\vartheta \in [a, b]$, si ha

$$(2.22) \quad A = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(\vartheta)^2 d\vartheta.$$

Come interpretazione geometrica di questa espressione alternativa per l'area possiamo dire che in corrispondenza di un elemento d'angolo $d\vartheta$ si forma un sottile triangolo col vertice in O , di base $\rho d\vartheta$ e di altezza ρ .

Ovviamente spostando il punto O l'area varia. Per vedere in che modo definiamo la nuova posizione $\mathbf{y}(t) = O'$ degli stessi punti rispetto ad un altro punto O' . Posto $\mathbf{u} = O' - O$, si vede subito che la nuova area A' e la precedente A stanno nella relazione $A' = A - \mathbf{u} \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$. Le due aree sono uguali se i vettori \mathbf{u} e $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ sono paralleli (si pensi a due triangoli con la stessa base e la stessa altezza) oppure se la curva è chiusa, cioè $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Esercizio 2.18 - Ricordiamo che l'area dell'ellisse di semiassi a e b vale πab . Vedere se si ottiene lo stesso risultato esprimendo l'ellisse in forma polare

$$\rho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

dove p e l'eccentricità ε sono legati ai semiassi dalle relazioni

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad e \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Utilizzando la (2.22), si ottiene

$$A = \frac{p^2}{2} \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{(1 + \varepsilon \cos \vartheta)^2} = p^2 \int_0^{+\infty} \frac{1 + t^2}{((1 - \varepsilon)t^2 + \varepsilon + 1)^2} dt$$

col cambio di variabile $t = \tan \vartheta/2$. Il lettore può facilmente portare a termine il calcolo dell'integrale. Si provi infine a calcolare la stessa area usando la forma parametrica $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$.

Esercizio 2.19 - Calcolare l'area delimitata dalla curva di equazione

$$x^2(1 - x^2) - y^2 = 0.$$

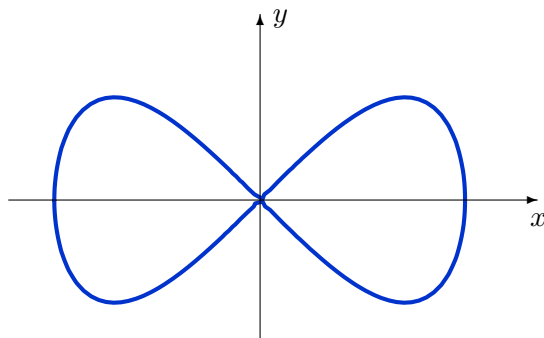


Figura 2.9: La quartica $x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$

Una condizione necessaria per l'appartenenza di un punto $P = (x, y)$ alla curva è $|x| \leq 1$ perché $x^2(1 - x^2) = y^2 \geq 0$. Allora è lecito porre $x = \cos t$ e di conseguenza $y^2 = \sin^2 t \cos^2 t$, da cui $y = \pm \sin t \cos t$. Il segno determina solo il verso di percorrenza e scegliendone uno tutta la curva, a forma di ∞ , viene percorsa interamente con $t \in [0, 2\pi]$. Assumiamo quindi come parametrizzazione la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$. Per motivi di simmetria l'area è

$$A = 4 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \gamma(t) \times \gamma'(t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt = \frac{4}{3}.$$

Esercizio 2.20 - Un filo rettilineo percorso da corrente elettrica di intensità i induce nello spazio circostante il campo magnetico in funzione della posizione \mathbf{r} (rispetto ad un punto O del filo)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}|^2}$$

dove μ è la permeabilità magnetica del mezzo ed \mathbf{e}_3 è il versore della corrente. Calcolare l'integrale del campo \mathbf{B} su una circonferenza γ contenuta in un piano ortogonale al filo e col centro sul filo.

Se γ viene percorsa in senso antiorario rispetto ad \mathbf{e}_3 , allora bisogna considerare la curva regolare

$$\gamma(t) = R \cos t \mathbf{e}_1 + R \sin t \mathbf{e}_2 + h \mathbf{e}_3.$$

Si ottiene dunque

$$(2.23) \quad \int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\mu i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\mu i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t}{R^2} dt = \mu i.$$

Ovviamente se il verso di percorrenza della curva si inverte il risultato cambia segno, più in generale si ottiene $\mu i n$, $n \in \mathbf{Z}$, se γ viene percorsa n volte, in senso antiorario se $n > 0$ o in senso orario se $n < 0$. Si ritrova così il *Teorema di Maxwell: la circuitazione del campo magnetico su una spira (su una curva chiusa) è proporzionale all'intensità del flusso di corrente elettrica che la attraversa.*

Vediamo adesso qual è il senso dell'integrale nella (2.23). Dividendo il doppio dell'area infinitesima di prima $x_1 dx_2 - x_2 dx_1$ per $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2$, si ottiene l'elemento d'angolo $d\vartheta$ corrispondente all'arco elementare

$$(2.24) \quad d\vartheta = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

È naturale quindi che il suo integrale lungo un cammino γ coincida con la variazione dell'angolo da un estremo all'altro

$$\int_{\gamma} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} = \int_{\gamma} d\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

da quello iniziale, ϑ_1 , relativo al primo estremo, a quello finale, ϑ_2 , relativo al secondo. Ecco come si spiega che quell'integrale valga 2π . Questo ragionamento non solo spiega perché il valore ottenuto nella (2.23) non dipende dal raggio della circonferenza, ma mostra anche che non varia se la circonferenza viene sostituita da un cammino chiuso qualsiasi che giri attorno allo stesso fascio di corrente. Per n giri il valore è $2\pi n$, compreso il caso $n = 0$ in cui attraverso la spira non passa corrente. Il numero intero n , che è il numero di giri in un senso o nell'altro, si chiama *indice* del cammino rispetto a O ed è dato da

$$(2.25) \quad I_{\gamma}(O) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Spesso è conveniente identificare un campo piano $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$, con $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, di componenti $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$, con una funzione di variabile complessa $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ ponendo

$$(2.26) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

dove (u, v) è una coppia di funzioni reali definite su Ω , rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di f .

Definiamo l'integrale di f lungo un cammino $\gamma \subset \Omega$

$$(2.27) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Ad esempio, sulla circonferenza $\gamma(t) = Re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = 2\pi i.$$

Usando la (2.26) l'integrale (2.27) assume la forma

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} u(x, y) dy + v(x, y) dx. \end{aligned}$$

Rivediamo da questo punto di vista l'Esercizio 2.20 e la (2.23) scegliendo per u e v le funzioni

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Si riconosce subito $f(z) = 1/z$ con $z \neq 0$ e su un cammino γ ha per integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi i,$$

dove un semplice calcolo mostra che il primo integrale, quello della parte reale, è nullo, mentre il secondo, quello della parte immaginaria, non è altro che l'indice di γ rispetto al punto O moltiplicato per 2π . La variazione angolare, che sia di 2π nel caso di un solo giro, di $2n\pi$ per n giri o, più in generale, di $\vartheta_2 - \vartheta_1$ per un arco, non è altro che la variazione della funzione multivoca \arg , già nota da Analisi 1, il cui differenziale è, come vedremo, la parte immaginaria di $1/z$ che compare sotto il segno di integrale.

Più avanti, trattando le forme differenziali lineari, riprenderemo questo argomento in modo più approfondito.

Capitolo 3

Equazioni differenziali

3.1 Questioni introduttive

Una grande varietà di problemi geometrici, di fenomeni della natura, di invenzioni e di scoperte, di leggi e di principi delle Scienze Naturali, dalla Fisica e la Chimica all'Ingegneria, dall'Economia all'Ecologia, dalla Biologia alla Medicina, si possono descrivere, formulare e interpretare in termini di equazioni differenziali. Poter descrivere la natura in cui viviamo attraverso strumenti matematici come questo ci dà la piacevole sensazione che anche noi esseri umani, con la nostra mente limitata ma razionale, siamo in qualche misura capaci di comprenderla, di dominarla, di migliorarla e di contribuire a modo nostro all'Opera della Creazione.

L'inquadramento di una classe di fenomeni in uno schema razionale, che è poi il *modello matematico*, ci costringe però ad operare delle semplificazioni che possono non rendere ragione della loro reale complessità. Ne deriva ogni volta una descrizione imperfetta e parziale che però può essere migliorata e resa sempre più fedele alla realtà, ma a danno della semplicità. Nel costruire un modello matematico bisogna trovare un compromesso tra il suo grado di precisione, necessaria perché sia il più possibile affidabile, e l'effettiva possibilità di risolvere i problemi che esso pone, in modo che le soluzioni si possano calcolare, descrivere e interpretare agevolmente. Per questo servono delle linee guida, dei criteri, che ci possano assicurare sulla ragionevolezza del modello scelto. Nel 1898 **Hadamard** introdusse il concetto di *problema ben posto* relativamente ai problemi ai dati iniziali e al bordo. Essenzialmente tre sono i requisiti da soddisfare: l'esistenza della soluzione, l'unicità e la stabilità, cioè la dipendenza continua dai dati. Il primo garantisce che il modello sia consistente; come nella natura il sistema evolve in qualche modo, così anche la soluzione deve esistere. Per il secondo, nessun sistema può evolvere in due modi diversi e simultanei. Con il terzo, più sottile, si richiede che, se il modello non è perfetto e le misurazioni dei dati incerte, a "piccoli" errori sui dati devono corrispondere "piccoli" errori sulla soluzione. In altre parole, la distanza, da precisare, tra la soluzione realistica e quella matematica deve potersi controllare con la distanza tra i dati effettivi e le loro misure. Affinché il modello sia stabile, almeno un po', e quindi attendibile, le soluzioni devono dipendere in modo continuo dai dati una volta stabilite delle metriche ragionevoli su quelle e su questi.

L'esempio più importante della Meccanica Classica, la Legge Fondamentale della Dinamica, è la *legge deterministica* che governa il moto di un punto materiale P soggetto a determinate forze e di cui è noto lo stato iniziale. Essa si esprime mediante l'equazione differenziale

$$(3.1) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

associata ai dati iniziali

$$P(0) = P_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Nella (3.1) compare a secondo membro la risultante \mathbf{F} delle forze agenti sul punto P in ogni istante. In assenza di vincoli il punto è *libero* nello spazio e la \mathbf{F} , detta *forza attiva*, è una funzione vettoriale nota del vettore posizione $\mathbf{r} = OP$ di P rispetto ad un'origine O , della sua velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e del tempo $t \in \mathbf{R}$ (il puntino denota la derivazione rispetto al tempo). Se il moto è vincolato, ad una curva prestabilita o ad una superficie, dobbiamo considerare anche le *forze reattive*, o *reazioni vincolari*, che sono incognite al pari della legge del moto. A I membro c'è il prodotto della massa m del punto per l'accelerazione $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. Il moto $\mathbf{r}(t)$ evolve nel tempo, dall'istante iniziale $t = t_0$ o $t = 0$, in poi, in modo che in ogni istante t successivo la (3.1) sia identicamente soddisfatta, cioè

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad \forall t \in [0, T].^*$$

Sfuggono a questo schema grandi classi di fenomeni, estremamente sensibili a piccole variazioni dei dati, la cui evoluzione non è prevedibile altro che a breve termine. Si tratta dei cosiddetti *sistemi caotici* la cui complessità, per il numero di variabili in gioco e per interazioni non lineari, è causa di una forte instabilità che non ci permette l'uso di modelli previsionali. Citiamo tra i tanti i fenomeni meteorologici, l'andamento di mercati finanziari, l'interazione tra certe popolazioni nei modelli dell'ecologia dinamica e, in Meccanica, il problema dei 3 corpi, il pendolo doppio e tanti altri casi.

3.2 Equazioni risolubili per integrazione diretta

Sia assegnato in ogni punto di un intervallo il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione. È possibile stabilire di che funzione si tratta?

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, dobbiamo trovare $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$(3.2) \quad u' = f(x) \quad \forall x \in I.$$

La (3.2) è un primo esempio di *equazione differenziale*.

Dalla teoria dell'integrazione sappiamo che se f è continua sono soluzioni tutte e sole le *primitive* di f , cioè gli elementi $u \in C^1(I)$ della famiglia a un parametro

$$\int f(x) dx, \quad x \in I,$$

che ben conosciamo come l'integrale indefinito di f . Individuata una di esse, ogni altra soluzione è ottenibile da questa sommando un'opportuna costante, cosicché i grafici delle soluzioni sono curve sovrapponibili per traslazione nella direzione verticale. Se però viene imposto anche il passaggio per un dato punto $(x_0, u_0) \in I \times \mathbf{R}$ si trova come unica soluzione la funzione

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in I.$$

Nel caso sia assegnata la derivata seconda, invece della (3.2) viene posta l'equazione

$$(3.3) \quad u'' = f(x) \quad \forall x \in I,$$

da cui

$$u'(y) = c_1 + \int_{x_0}^y f(t) dt, \quad y \in I,$$

*Da ora in poi non useremo più la notazione in grassetto per vettori e campi vettoriali, il loro carattere vettoriale o scalare sarà chiaro dal contesto.

e quindi

$$\begin{aligned} u(x) &= c_2 + \int_{x_0}^x \left(c_1 + \int_{x_0}^y f(t) dt \right) dy = c_1(x - x_0) + c_2 + \left[y \int_{x_0}^y f(t) dt \right]_{x_0}^x \\ &\quad - \int_{x_0}^x t f(t) dt = c_1(x - x_0) + c_2 + \int_{x_0}^x (x - t) f(t) dt \\ &= u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t) f(t) dt \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Andando avanti in questo modo, assegnata la derivata n -esima

$$u^{(n)} = f(x) \quad \forall x \in I,$$

si ottengono le soluzioni

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f(t) dt \quad \forall x \in I.$$

Chiaramente basterà assegnare n condizioni del tipo $u^{(k)}(x_0) = u_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, per avere un'unica soluzione. Si confronti questa rappresentazione della soluzione con la formula di Taylor col resto in forma integrale, ottenuta nel Cap. 10 delle Lezioni di Analisi 1.

Esempi

3.1 Moto di un grave nel vuoto - Un punto materiale P di massa m , libero nello spazio, è soggetto alla sola forza peso $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, dove il vettore costante \mathbf{g} , di modulo $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, è l'accelerazione di gravità, diretta secondo la verticale discendente. Quali sono i moti possibili?

Decomponendo l'equazione vettoriale (3.1) rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, essendo il versore \mathbf{e}_3 diretto secondo la verticale ascendente, si ottiene un sistema di tre equazioni scalari che rientrano come casi particolari della (3.3)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = -g \end{cases}$$

le cui soluzioni rappresentano i moti dinamicamente possibili, rettilinei e uniformi nelle direzioni orizzontali, rettilineo e uniformemente accelerato in quella verticale

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 t + b_1 \\ x_2(t) = a_2 t + b_2 \\ x_3(t) = -\frac{gt^2}{2} + a_3 t + b_3, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Le costanti arbitrarie a_i e b_i che derivano dalle varie integrazioni si possono determinare univocamente imponendo opportune condizioni iniziali a seconda della particolare situazione fisica, allora il moto è univocamente determinato coerentemente col principio di determinismo. Ad esempio, nel caso della caduta libera, supponiamo che all'istante $t = 0$ il punto, inizialmente in quiete, venga lasciato cadere dalla quota $h > 0$. Scegliendo l'origine O del sistema di riferimento in modo che l'asse x_3 passi per la posizione iniziale, si ottiene

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \\ x_3(t) = -\frac{gt^2}{2} + h, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Oppure, in *balistica*, si vuole descrivere il moto di un proiettile che viene lanciato con una certa velocità iniziale \mathbf{v} . In questo caso conviene scegliere il sistema di riferimento con l'origine O nella posizione iniziale ed \mathbf{e}_2 complanare a \mathbf{v} e ad \mathbf{e}_3 , per cui, detto α l'angolo che \mathbf{v} forma col piano orizzontale, si ottiene il moto piano (posto $x = x_2$ e $y = x_3$)

$$\begin{cases} x(t) = vt \cos \alpha \\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + vt \sin \alpha, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

dove abbiamo tralasciato la componente x_1 che rimane nulla durante il moto. Evidentemente si tratta di un moto parabolico come si vede eliminando t

$$(3.4) \quad y(x) = x \left(\tan \alpha - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

Si possono richiedere la *gittata* $\gamma(\alpha)$, cioè la distanza tra la posizione iniziale e la successiva posizione "a terra", e l'inclinazione cui corrisponde la gittata massima

$$\gamma(\alpha) = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad \gamma_{max} = \gamma(\pi/4) = v^2/g.$$

Il luogo dei vertici della parabola al variare di α , le cui ordinate sono le quote massime raggiunte dal proiettile, è l'ellisse di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_{max}(\alpha) = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ y_{max}(\alpha) = \frac{v^2}{4g} (1 - \cos 2\alpha) \end{cases}$$

avente centro in $(0, v^2/4g)$ e semiassi $v^2/2g$ e $v^2/4g$. In balistica è importante sapere quali punti del piano possono essere raggiunti dal proiettile. La risposta ci viene dalla (3.4); scritta nella forma

$$ax^2 \tan^2 \alpha - 2x \tan \alpha + ax^2 + 2y = 0, \quad a = g/v^2,$$

se è risolubile rispetto a $\tan \alpha$ vuol dire che esiste una direzione della velocità di lancio per cui (x, y) viene raggiunto dal proiettile. La curva che separa i punti raggiungibili da tutti gli altri viene dunque dalla condizione

$$\frac{\Delta}{4} = x^2(1 - a^2x^2 - 2ay) = 0,$$

equivalente a

$$y = \frac{1 - a^2x^2}{2a},$$

che è l'equazione della *parabola di sicurezza*. Tale curva è l'involuppo delle traiettorie paraboliche dinamicamente possibili al variare della direzione della velocità iniziale.

3.2 Rimbalzo - *Avviene nel gioco del ping-pong o in quello del biliardo. Si tratta di un moto in cui interviene una forza impulsiva che provoca una discontinuità della velocità.*

Supponiamo che la forza agente sulla pallina, di massa $m = 1$, sia nulla per $t < 0$ e per $t > 0$. Nella prima fase il moto è dunque rettilineo e uniforme, mettiamo $x(t) = -t$ con velocità $v = -1$, ma improvvisamente, per $t = 0$, la pallina inverte il suo moto che per $t > 0$ avviene con la legge $x(t) = t$ e con velocità $v = 1$. il moto è continuo ma non derivabile con legge $x(t) = |t|$. Che cosa è successo nell'istante $t = 0$? Evidentemente è intervenuta una forza che ha causato una brusca variazione della velocità. Visto che

la (3.1) non sembra applicabile per la scarsa regolarità, vediamo il problema come limite di una successione di problemi, in cui la forza, al crescere di n , agisce con intensità crescente, ma con durata decrescente, secondo la legge

$$F_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } |t| < 1/n \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

come in un rimbalzo “molleggiato”, o meglio *regolarizzato*, essendo adesso la velocità derivabile. L'unica soluzione dell'equazione $v' = F_n$ che soddisfa la condizione $v = -1$ nel “passato”, per $t < -1/n$, è la funzione

$$v_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < -1/n \\ nt & \text{se } |t| < 1/n \\ 1 & \text{se } t > 1/n, \end{cases}$$

ottenuta mediante la continuità del raccordo attraverso i vari intervalli temporali (cosa possibile in quanto primitiva della funzione integrabile F_n). Basta tracciare il grafico della v_n , la cui variazione pari a 2 non cambia, e ci si rende subito conto che, per $n \rightarrow \infty$, tende a diventare la funzione v con salto $\llbracket v \rrbracket = 2$ che vale -1 prima e 1 dopo l'istante $t = 0$. La F_n tende a diventare la forza impulsiva che vale $+\infty$ in 0 ed è nulla altrove, ma mantiene sempre costante pari a 2 il suo integrale, che è poi la forza complessiva agente nel tempo, come 2 è, abbiamo visto, la variazione complessiva della velocità v_n , il salto nel caso limite v . Si conferma $x(t) = |t|$ come la legge del moto soluzione del problema $\ddot{x} = F$ con le condizioni $\dot{x}(-\infty) = -1$ e, ad esempio, $x(0) = 0$.

Alla luce di questo esempio ci sembra del tutto naturale poter risolvere, in un opportuno senso generalizzato, problemi in cui il dato a II membro dell'equazione presenta dei punti singolari. Situazioni del genere possono presentarsi anche quando il dominio si sconnette in più intervalli a causa dell'annullarsi del coefficiente del termine con la derivata più alta, come si può vedere nel seguente esempio.

3.3 Le equazioni

$$2\sqrt{|x|}u' = 1 \quad e \quad xu' = 1$$

sono inizialmente poste su tutto \mathbf{R} , nel senso che x può variare in \mathbf{R} , ma il procedimento risolutivo richiede di dividere membro a membro per una funzione che si annulla in 0 , $\sqrt{|x|}$ o x , con l'effetto di sconnettere il dominio.

Nei due casi le soluzioni sono rispettivamente

$$u(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad e \quad u(x) = \begin{cases} \log(-x) + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \log x + c_2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

ma presentano un diverso comportamento. Mentre nel primo è possibile mettere in relazione c_1 e c_2 in modo da raccordare con continuità espressioni definite a destra e a sinistra dello 0 , e ottenere così una soluzione definita su tutto \mathbf{R} , nel secondo non si può fare perché tutte le soluzioni hanno 0 come punto singolare. Quindi possiamo affermare che la famiglia di funzioni

$$u(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sign} x + c$$

è, al variare di $c \in \mathbf{R}$, l'insieme di tutte le soluzioni della prima equazione, pur con derivata non limitata in 0 per la singolarità del dato a secondo membro. Le soluzioni dell'altra formano invece due famiglie indipendenti di funzioni, definite a sinistra o a destra di 0 a seconda dei dati iniziali.

Vediamo altri tipi di equazioni risolubili per integrazione diretta. Nella statica dei fili e delle travi le equazioni differenziali esprimono condizioni di equilibrio, la funzione incognita è lo spostamento in ogni punto e invece delle condizioni iniziali, visto che in questi problemi il tempo non interviene, si impongono opportune condizioni, generalmente agli estremi, di natura cinematica (vincoli geometrici) e/o meccanica (condizioni di equilibrio) sullo spostamento.

3.4 Trave elastica soggetta a trazione - Una trave elastica, di cui si trascura lo spessore, occupa l'intervallo $[0, \ell]$ e parallelamente all'asse è applicato un carico $p(x)$ definito come forza per unità di lunghezza. Conoscendo le proprietà elastiche della trave in ogni punto x , quindi il modulo di Young E e l'area A della sezione, i vincoli e/o le forze agli estremi, si vuole determinare lo spostamento assiale $u(x)$ in ogni punto x della trave.

Lo stato di tensione interna è espresso dallo sforzo normale (alla sezione) $N(x)$ agente lungo l'asse, di trazione se $N > 0$ e di compressione se $N < 0$, soddisfa la condizione di equilibrio

$$N' + p(x) = 0,$$

d'altra parte N è legata all'allungamento relativo $\varepsilon = u'$, preso come misura di deformazione, dalla relazione costitutiva

$$N = EA\varepsilon.$$

Gli spostamenti possibili sono dunque le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(EA(x)u')' + p(x) = 0,$$

anch'essa risolubile per integrazione diretta in modo simile all'Esempio 3.1, anche se il coefficiente EA può non essere costante. Si ottiene con una prima integrazione

$$EA(x)u' = c_1 - \int_0^x p(t) dt$$

e dividendo per EA e integrando ancora una volta, si ottiene

$$u(x) = c_2 + c_1 \int_0^x \frac{1}{EA(y)} dy - \int_0^x \frac{1}{EA(y)} \int_0^y p(t) dt dy.$$

Per l'unicità è necessario specificare due condizioni agli estremi da scegliere tra le quattro possibili

$$\begin{array}{lll} u(0) = u_0 & u(\ell) = u_1 & \text{condizioni cinematiche,} \\ EAu'(0) = -P_1 & EAu'(\ell) = P_2 & \text{condizioni meccaniche.} \end{array}$$

Se ad esempio la sezione $x = 0$ della trave è bloccata e nell'estremità $x = \ell$ è applicata la forza P_2 , la soluzione sarà

$$u(x) = \int_0^x \frac{P_2 + \int_y^\ell p(t) dt}{EA(y)} dy.$$

Non c'è differenza se al posto della trave si considera un filo elastico, se non per il fatto che il filo reagisce alla sola trazione, caso in cui $N(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, altrimenti $N(x) = 0$. Una volta risolto il problema precedente per il filo, si può formulare un secondo problema che è quello del filo soggetto a trazione (assegnata o calcolata dal problema precedente) e caricato trasversalmente con una densità di carico $q(x)$ che può essere il peso proprio o altro. In questo caso lo spostamento $u(x)$ di ogni punto è lo spostamento trasversale e soddisfa un problema simile a quello di prima.

3.5 Filo elastico o inestensibile con carico trasversale - *Lo spostamento trasversale $u(x)$ del filo elastico soddisfa l'equazione*

$$(N(x)u')' + q(x) = 0$$

alla quale vanno associate le stesse condizioni agli estremi dell'esempio precedente, spostamenti assegnati delle sezioni terminali, quelle cinematiche, proiezioni nella direzione tangente al filo del "tiro" agli estremi.

Nel problema precedente nulla cambia se il filo è inestensibile invece che elastico. Il modello è lo stesso del problema della conduzione termica o elettrica in una barra conduttrice in regime stazionario, del problema della trave elastica soggetta a torsione e di tanti altri. Per brevità vediamo solo il primo.

3.6 Conduzione termica - *Si vuole determinare la temperatura $\vartheta(x)$ nel punto x di una barra (unidimensionale) di materiale conduttore di calore di conduttività k , conoscendo la sorgente esterna di calore $q(x)$ che si suppone indipendente dal tempo.*

La legge di Fourier stabilisce che il flusso di calore $c(x)$ attraverso x , in equilibrio con la sorgente q tramite l'equazione

$$c' = q,$$

deve essere proporzionale al gradiente di temperatura

$$c = -k\vartheta'(x).$$

Ne segue l'equazione differenziale per ϑ

$$-(k\vartheta')' = q$$

cui vanno associate le solite condizioni agli estremi, temperatura e/o flusso di calore assegnati.

3.7 Trave elastica soggetta a flessione - *Alla trave è applicato un carico $q(x)$ trasversale e se ne vuole determinare lo spostamento trasversale $u(x)$ in ogni punto.*

La rigidezza in ogni punto è data dal prodotto $EJ(x)$ dove J è il momento d'inerzia della sezione nel punto x rispetto alla retta baricentrica contenuta nel piano della sezione e ortogonale alla direzione del carico. Il momento flettente $M(x)$ soddisfa la condizione di equilibrio

$$M'' = q(x)$$

e l'equazione costitutiva mette in relazione M con la curvatura, che in prima approssimazione possiamo identificare con u'' . Si perviene così all'equazione differenziale del IV ordine

$$(EJ(x)u'')'' = q$$

alla quale si addicono quattro condizioni da scegliere tra le otto possibili

$$\begin{array}{l} \text{condizioni cinematiche} \left\{ \begin{array}{ll} u(0) = u_0, & u(\ell) = u_1 & \text{spostamento assegnato} \\ u'(0) = \omega_0, & u'(\ell) = \omega_1 & \text{rotazione assegnata} \end{array} \right. \\ \text{condizioni meccaniche} \left\{ \begin{array}{ll} EJ u''(0) = M_0, & EJ u''(\ell) = M_1 & \text{coppia assegnata} \\ (EJ u'(0))' = Q_0, & (EJ u'(\ell))' = Q_1 & \text{carico assegnato} \end{array} \right. \end{array}$$

L'integrazione richiede più passaggi di prima, ma la procedura è la stessa: si integra due volte, poi si divide per EJ e infine si integra altre due volte.

3.3 Equazioni lineari del I ordine

Consideriamo di nuovo il moto di un grave in caduta libera assumendo che, oltre alla forza peso, agisca anche una forza che si oppone al moto, la resistenza dell'aria, che supponiamo della forma $\mathbf{R} = -k\mathbf{v}$ con $k > 0$. Il movimento, che avviene nella direzione verticale per gli stessi motivi del caso senza resistenza, soddisfa il problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg - k\dot{y} \\ y(0) = h \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione è del II ordine, essendo questo l'ordine più alto di derivazione della funzione incognita, ma può essere ridotta al primo se scritta in termini della velocità $v = \dot{y}$

$$(3.5) \quad \dot{v} + \varepsilon v = -g, \quad \varepsilon = k/m.$$

Risolto questo problema tenendo conto del dato iniziale $v(0) = 0$, con una semplice integrazione si ottiene $y(t)$. Dall'equazione stessa si vede che $\ddot{y}(0) = \dot{v}(0) = -g/\varepsilon < 0$, quindi dal valore iniziale nullo la velocità diventa subito negativa, $y(t)$ decresce (il corpo cade), ma tra poco vediamo che $v(t)$ tende ad assumere il valore costante $v_\infty = -g/\varepsilon$, detta *velocità limite*.

Molti altri fenomeni sono governati da equazioni simili alla (3.5). Se un corpo a temperatura ϑ_0 viene introdotto in un ambiente a temperatura T , si osserva che la temperatura $\vartheta(t)$ del corpo comincia a variare. Un'ipotesi ragionevole è che il tasso di variazione $\dot{\vartheta}$ all'istante t sia proporzionale alla differenza $T - \vartheta(t)$. Si perviene così all'equazione

$$\dot{\vartheta} = k(T - \vartheta)$$

a cui va aggiunta la condizione iniziale $\vartheta(0) = \vartheta_0$. Si vede chiaramente dall'equazione che ϑ cresce in ogni istante in cui si mantiene minore di T e decresce altrimenti. Non varia se la temperatura iniziale è pari a T .

L'equazione che governa il passaggio della carica elettrica $q(t)$ in un circuito elettrico RC , cioè con resistenza R e condensatore a capacità C , azionato da un generatore con voltaggio $\mathcal{E}(t)$ assegnato, è la seguente

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t).$$

In assenza di generatore di corrente, $\mathcal{E} = 0$, q decresce finché il circuito non tende a scaricarsi, al limite non vi è passaggio di corrente.

Di una popolazione di esseri viventi, la cui numerosità nel tempo è espressa dalla funzione $x(t) \geq 0$, possiamo supporre che il tasso di crescita sia proporzionale all'entità stessa $x(t)$. Si perviene allora al modello di **Malthus**

$$\dot{x} = kx$$

dove $k = n - m$ è la differenza tra il coefficiente di natalità e quello di mortalità. Se $n = m$ la popolazione rimane numericamente costante, altrimenti cresce o decresce a seconda che prevalga la natalità sulla mortalità o viceversa. Rientra nel caso $k < 0$ anche il fenomeno del decadimento radiattivo.

Tutti questi casi, e se ne potrebbero citare tanti altri, rientrano nel tipo di equazione

$$(3.6) \quad u' + a(t)u = f(t), \quad t \in I,$$

a cui è naturale associare il dato iniziale $u(t_0) = u_0$. Per risolverla supponiamo che a e f siano continue e consideriamo una primitiva qualsiasi $A(t)$ di $a(t)$. Moltiplicando l'equazione per la funzione $e^{A(t)}$, detta *fattore integrante*, si ottiene l'equazione equivalente

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt}(e^{A(t)}u) = e^{A(t)}f(t),$$

da cui si ricava la famiglia di soluzioni in termini di un integrale indefinito

$$u(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} f(t) dt.$$

Se dobbiamo imporre anche la condizione $u(t_0) = u_0$ è necessario fare una scelta della primitiva $A(t)$, cosa che equivale a fissare il valore di A in t_0 . Scegliendo per $A(t)$ proprio la funzione integrale

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$$

si ottiene la soluzione

$$u(t) = e^{-A(t)} \left[u_0 + \int_{t_0}^t e^{A(\tau)} f(\tau) d\tau \right].$$

Ci chiediamo se ne esistono altre. Supponiamo che $v(t)$ sia un'altra soluzione della stessa equazione con lo stesso dato iniziale. Allora la differenza $w = u - v$ soddisfa il problema

$$\begin{cases} w' + a(t)w = 0 \\ w(t_0) = 0. \end{cases}$$

Moltiplichiamo per $e^{A(t)}$ e deriviamo ottenendo

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}w(t)) = e^{A(t)}(w'(t) + a(t)w(t)) = 0,$$

allora $e^{A(t)}w(t) = c$ per ogni t e $w(t) = ce^{-A(t)}$, ma $w(0) = 0$ implica $c = 0$ e $w \equiv 0$. L'importanza dell'unicità verrà messa in evidenza nel seguito.

Si ottiene così la velocità di caduta del grave con resistenza dell'aria

$$v(t) = -\frac{g}{\varepsilon}(1 - e^{-\varepsilon t}), \quad t \geq 0,$$

che dopo un certo tempo in cui decresce può essere considerata costante, pari al suo valore asintotico $v_\infty = -g/\varepsilon$, detta *velocità limite*.

Allo stesso modo si ottiene l'andamento della temperatura

$$\vartheta(t) = (\vartheta_0 - T)e^{-kt} + T$$

da cui si vede che il corpo a temperatura ϑ_0 , una volta introdotto nell'ambiente a temperatura T , cede o acquista calore, a seconda del segno di $\vartheta_0 - T$, e tende verso la condizione di equilibrio termico in cui la sua temperatura vale T .

Posto $f(t) = \mathcal{E}(t)/R$ nel circuito RC , la carica nel tempo è la funzione

$$q(t) = e^{-t/RC} \left[q_0 + \int_0^t f(\tau)e^{\tau/RC} d\tau \right]$$

in cui si riconosce lo scarico completo in un piccolo intervallo di tempo se $\mathcal{E} = 0$, come abbiamo già detto. Nel caso di corrente continua, $\mathcal{E} = \text{costante}$, valgono le

stesse considerazioni degli esempi precedenti, lasciamo al lettore di rappresentare la soluzione nel caso della corrente alternata $\mathcal{E}(t) = E \sin \omega t$.

Il modello di Malthus per la dinamica di una popolazione non è realistico, la soluzione

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

rappresenta una popolazione in crescita nel tempo completamente fuori controllo se $k > 0$ (o che al contrario tende a sparire se $k < 0$) che con legge esponenziale raggiunge quantità esagerate. Un modello un po' più realistico si basa sull'idea che k non sia costante, ma dipenda da x in modo che il tasso di crescita risenta della conseguente diminuzione delle risorse che il territorio, limitato, offre. Un modello più accettabile è quello dell'equazione *logistica* di **Verhulst**

$$x' = kx(a - x), \quad k, a > 0, ,$$

dove a rappresenta una barriera alla crescita. Vedremo nel prossimo paragrafo questo tipo di equazioni.

Saremmo potuti partire da equazioni lineari del I ordine nella forma

$$a(t)u' + b(t)u = f(t)$$

che sembra avere un aspetto più generale della (3.6). Ma solo apparentemente perché, a meno che non sia $a(t)$ identicamente nulla, l'equazione va considerata in un intervallo, determinato dalla condizione iniziale, in cui $a(t) \neq 0$, dove avrà quindi segno costante in quanto continua. Dividendo l'equazione per a in quell'intervallo ritroviamo la forma (3.6). Lo studio va però completato, non basta risolvere l'equazione in tutti gli intervalli dove $a(t) \neq 0$, bisogna vedere come si comportano le soluzioni nel passaggio da un intervallo al successivo attraverso il punto in cui $a = 0$, osservazione che abbiamo già fatto in uno dei primi esempi. In quel punto si possono rilevare le situazioni più disparate, dalle soluzioni che si connettono con continuità, con le loro derivate o meno, a soluzioni che divergono da una parte o dall'altra o che non hanno limite. Nel caso il raccordo continuo sia possibile la funzione che assume in ognuno di questi intervalli i valori delle soluzioni parziali può essere considerata soluzione del problema iniziale. Quando l'equazione si presenta come nella (3.6) si dice che è scritta in *forma normale*. Se non è questo il caso, per risolverla va comunque ridotta alla forma normale.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$|x|^\alpha u' + u = 0.$$

Una soluzione è certamente la funzione nulla. Per determinare tutte le altre bisogna dividere per $|x|^\alpha$ che comporta separare come in due problemi distinti le soluzioni definite a destra e a sinistra di 0.

Per $\alpha = 1$ le soluzioni su $]0, +\infty[$ sono le funzioni

$$u(x) = \frac{c}{x},$$

mentre quelle su $] - \infty, 0[$ sono

$$u(x) = -cx.$$

Sui due intervalli i problemi rimangono separati e indipendenti, dal momento che le soluzioni a destra non hanno limite finito per $x \rightarrow 0$ e non si possono raccordare con continuità a quelle di sinistra in nessun modo. Si osservi tra l'altro che anche considerando soltanto le soluzioni di sinistra, che invece hanno limite, non c'è unicità per il problema di Cauchy $u(0) = 0$ perché questo valore viene assegnato proprio nel punto in cui l'equazione degenera.

Per $\alpha \neq 1$ le soluzioni sono

$$u(x) = ce^{-\frac{(-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}} \quad \text{se } x < 0, \quad u(x) = ce^{\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}} \quad \text{se } x > 0,$$

da cui si vede che per $\alpha > 1$ quelle di destra divergono in 0 e quelle di sinistra vanno a 0, mentre per $\alpha < 1$ sia quelle di destra che quelle di sinistra tendono a c . In questo caso ha senso assegnare un dato iniziale $u(0) = u_0$ e possiamo accettare come unica soluzione dell'equazione di partenza, anche se non in forma normale, la funzione

$$u(x) = \begin{cases} u_0 e^{\frac{(-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}} & \text{se } x < 0 \\ u_0 e^{-\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poco fa abbiamo verificato l'unicità della soluzione del Problema di Cauchy per le equazioni lineari del I ordine. Riguardo invece la questione dell'esistenza, che affronteremo insieme all'unicità anche nel caso generale, possiamo subito dire che per le equazioni lineari del prim'ordine è scontata per il fatto stesso che siamo stati in grado di risolverle. L'importanza dei teoremi di esistenza si rivela soprattutto di fronte ai casi non risolvibili, in cui le soluzioni non sono rappresentabili in forma chiusa mediante un'espressione esplicita. Sapere allora che la soluzione esiste, e possibilmente che è anche unica, è estremamente utile per studiarla sia dal punto di vista qualitativo, si pensi a proprietà di monotonia, convessità, andamento asintotico ecc., sia dal punto di vista quantitativo, con riguardo alle approssimazioni numeriche. Ma c'è un altro aspetto fondamentale quando si parla di esistenza della soluzione, bisogna precisare dove la soluzione esiste, su quale intervallo è definita, anche l'intervallo è un'incognita del problema. Il teorema generale di esistenza e unicità ci fornisce la *soluzione locale*, la soluzione definita, in prima battuta, su un "piccolo" intorno del punto dove viene assegnato il dato. Il passo successivo è quello di indagare se la soluzione è prolungabile al di fuori e fino a dove, cioè quale sia l'*intervallo massimale*. Per le lineari del I ordine abbiamo già dato la risposta con la formula risolutiva, guardandola si capisce che l'intervallo massimale è l'intervallo comune al coefficiente e al dato a secondo membro.

3.4 Equazioni a variabili separabili

Cominciamo con l'esempio dell'equazione *logistica*

$$x' = kx(a - x) \quad k, a > 0$$

continuando a supporre che ad ogni dato iniziale corrisponda un'unica soluzione. La funzione a secondo membro, $kx(a - x)$, presenta i due zeri 0 e a che, per analogia col caso dinamico, rappresentano gli stati cosiddetti di equilibrio. I dati iniziali $x_0 = 0$ e $x_0 = a$ generano le uniche soluzioni costanti $x(t) \equiv 0$ (nessuna popolazione può evolvere se all'inizio non c'è nessuno) e $x(t) \equiv a$ (caso in cui le risorse non bastano per crescere, ma sono sufficienti per non decrescere). Se un'altra soluzione, con $0 < x_0 < a$ o con $x_0 > a$, assumesse in qualche istante \bar{t} il valore 0 o a verrebbe violata l'unicità. Pertanto

$$0 < x_0 < a \Rightarrow 0 < x(t) < a \quad \forall t > 0 \quad \text{e} \quad x_0 > a \Rightarrow x(t) > a \quad \forall t > 0.$$

Nei due casi si ha rispettivamente

$$\begin{cases} x'(t) = kx(t)(a - x(t)) > 0 \Rightarrow x(t) \text{ crescente} \\ x'(t) = kx(t)(a - x(t)) < 0 \Rightarrow x(t) \text{ decrescente,} \end{cases}$$

quindi $x(t)$ ammette limite finito per $t \rightarrow +\infty$. Ne segue che $x'(t) \rightarrow 0$ e quindi $x(t) \rightarrow a$.

Ma come possiamo essere certi che tali soluzioni siano effettivamente definite su tutto $[0, +\infty[$? Anche l'intervallo di definizione è in generale un'incognita del problema. Se $x(t)$ fosse definita su un certo intervallo limitato $[0, t_1[$, l'esistenza del limite di $x(t)$ per $t \rightarrow t_1$ per la monotonia e il fatto che sia finito per la limitatezza implicherebbero comunque la possibilità di risolvere un nuovo problema di Cauchy con dato iniziale $x(t_1)$ e la soluzione si estenderebbe oltre, anche per $t > t_1$, quindi non può che essere definita su tutto $[0, +\infty[$. Anzi su tutto \mathbf{R} , anche nel passato, per $t < 0$, rimanendo confinate tra 0 ed a . Quelle che invece assumono valori superiori ad a , che tendono ad a decrescendo, non sono superiormente limitate come vediamo tra poco, né definite su tutto \mathbf{R} .

Passiamo alla risoluzione effettiva del problema, le soluzioni che troviamo ci confermeranno tutte queste previsioni. Poiché cerchiamo soluzioni che non assumono mai il valore 0 né a , possiamo dividere l'equazione membro a membro per $x(t)(a - x(t))$ e integrare ottenendo

$$\int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)(a - x(\tau))} d\tau = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x(a - x)} = kt.$$

Per $0 < x_0 < a$ si ha

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x(a - x)} = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a - x} \right) dx = \frac{1}{a} \log \frac{x(t)}{a - x(t)} = \frac{1}{a} \log \frac{x_0}{a - x_0} + kt,$$

da cui

$$x(t) = \frac{ax_0}{x_0 + (a - x_0)e^{-akt}}, \quad t \in \mathbf{R},$$

che è positiva, crescente e tende ad a per $t \rightarrow +\infty$.

Per $x_0 > a$ si ha

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x(a - x)} = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - a} \right) dx = \frac{1}{a} \log \frac{x(t)}{x(t) - a} = \frac{1}{a} \log \frac{x_0}{x_0 - a} + kt,$$

da cui

$$x(t) = \frac{ax_0}{x_0 - (x_0 - a)e^{-akt}}, \quad t \in \mathbf{R},$$

che è maggiore di a , decrescente e tende ad a per $t \rightarrow +\infty$. Queste soluzioni, a differenza delle precedenti, non sono limitate superiormente, ma presentano un asintoto verticale in corrispondenza dell'istante (negativo, nel passato) $\tilde{t} = \frac{1}{ak} \log\left(1 - \frac{a}{x_0}\right)$ e sono definite per $t > \tilde{t}$. Questo comportamento è dovuto all'andamento superlineare del dato $f(x) = kx(a - x)$ a II membro dell'equazione. Si provi a integrare l'equazione $u' = u^2$ nella quale avviene lo stesso fenomeno.

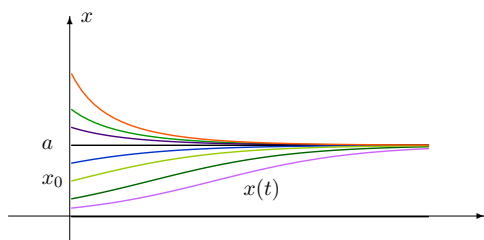


Figura 3.1: Le varie soluzioni dell'equazione logistica

3.8 Nel moto di caduta con resistenza dell'aria possiamo fare l'ipotesi della resistenza idraulica del mezzo, la quale si esprime con una forza del tipo $-h|\mathbf{v}|^2$ vers \mathbf{v} .

Rispetto ad un sistema di riferimento in cui il versore verticale è rivolto verso l'alto, l'equazione del moto assume la forma scalare

$$\dot{v} = -g - \varepsilon v^2 \operatorname{sign} v, \quad \varepsilon = h/m,$$

e se la velocità iniziale è nulla dall'equazione stessa si deduce $\dot{v}(0) = -g$, quindi per il teorema della permanenza del segno l'accelerazione rimane negativa in un intorno dell'istante iniziale, la velocità decresce e dal valore iniziale $v_0 = 0$ diventa subito negativa. In quella fase del moto l'equazione va scritta nella forma

$$\dot{v} = -g + \varepsilon v^2$$

ed ha come unica soluzione, limitata su tutto \mathbf{R} ,

$$(3.8) \quad v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\varepsilon} \frac{e^{2\sqrt{g\varepsilon}t} - 1}{e^{2\sqrt{g\varepsilon}t} + 1}}.$$

Dal valore iniziale nullo $v(t)$ decresce e tende alla velocità limite $-\sqrt{g/\varepsilon}$. Ma se $v(0) = v_0 > 0$ è corretto scegliere la forma

$$\dot{v} = -g - \varepsilon v^2,$$

che ha per soluzione

$$v(t) = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} \operatorname{tang} \sqrt{g\varepsilon}t}{1 + v_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{g}} \operatorname{tang} \sqrt{g\varepsilon}t}.$$

La velocità rimane positiva per un po' (il corpo sale), ma diminuisce (lo si vede anche dall'equazione) fino ad annullarsi nella posizione più alta all'istante $\tilde{t} = (g\varepsilon)^{-1/2} \operatorname{arctg}(\sqrt{\varepsilon/g}v_0)$. In quell'istante l'accelerazione è ancora negativa, quindi bisogna applicare il ragionamento del caso precedente, il corpo inverte il moto e cade con la legge asintotica (3.8).

In questi due esempi abbiamo applicato il metodo della *separazione delle variabili* che ora vediamo in generale. L'equazione deve presentarsi nella forma

$$u' = f(x)g(u)$$

in cui, al solito, supponiamo che $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbf{R}$ siano continue. Una soluzione è eventualmente la funzione costante $u(x) = \bar{u}$ qualora \bar{u} fosse uno zero della g . Volendo trovare anche le soluzioni $u(x)$ non costanti, originate da un dato iniziale $u(x_0) = u_0$ tale che $g(u_0) \neq 0$, possiamo supporre $g(u(x)) \neq 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Allora possiamo dividere per $g(u(x))$ e integrare

$$\int_{x_0}^x \frac{u'(t)}{g(u(t))} dt = \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x).$$

D'altra parte

$$\int_{x_0}^x \frac{u'(t)}{g(u(t))} dt = \int_{u_0}^{u(x)} \frac{1}{g(u)} du$$

e, detta $\Phi(u)$ una primitiva di $1/g(u)$, ammesso che la si riesca a calcolare, si ottiene

$$\Phi(u(x)) - \Phi(u_0) = F(x),$$

da cui

$$u(x) = \Phi^{-1}(\Phi(u_0) + F(x)),$$

ammesso che si riesca a determinare la Φ^{-1} .

Il procedimento appena illustrato ci permette di trovare tutte le soluzioni $u(x)$ per le quali $g(u(x)) \neq 0$ e presuppone che quelle costanti, ben distinte e i cui valori sono gli zeri di g , siano già state individuate. Ma siamo sicuri che siano effettivamente “ben distinte” quelle costanti dalle altre? Ogni soluzione costante $u(x) = \bar{u}$ soddisfa il dato iniziale $u(0) = \bar{u}$, ma possono esistere altre soluzioni distinte da questa, ovviamente non costanti, con lo stesso dato iniziale? La questione posta riguarda l’unicità, perché se esistono soluzioni distinte con lo stesso dato iniziale vuol dire che la soluzione del problema di Cauchy non è unica. Vediamo un esempio di non unicità.

3.9 Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni.

Una soluzione è evidentemente la funzione costante identicamente nulla. Ne cerchiamo adesso una $u(x) \geq 0$, visto che negativa non può essere, tale che $u(\bar{x}) > 0$ per un certo $\bar{x} \neq 0$. Osservando l’equazione, nessuna soluzione può assumere valori non nulli per $x < 0$ perché u deve essere positiva, crescente e annullarsi in 0, quindi scegliamo $\bar{x} > 0$. Per continuità $u(x) > 0$ per $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$ e su questo intervallo possiamo dividere l’equazione per $\sqrt{u(x)}$ e integrare

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = x + c$$

da cui si ottiene l’integrale generale

$$u(x) = \left(\frac{x + c}{2} \right)^2.$$

Tra queste, quella che soddisfa $u(0) = 0$ è la funzione $u(x) = x^2/4$ se $x \geq 0$. Ma non solo questa e quella nulla soddisfano il problema di Cauchy 3.9, bensì tutte le funzioni

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{(x - a)^2}{4} & \text{se } x > a \end{cases}$$

al variare del parametro $a \geq 0$.

A che cosa è dovuta la non unicità della soluzione? In questo esempio la funzione $f(u)$ non è lipschitziana. Mentre per l’esistenza basta che f sia continua, per l’unicità deve soddisfare una condizione di Lipschitz almeno localmente, come vedremo più avanti.

Esercizio 3.1 Integrare l’equazione differenziale

$$u' = \sqrt{1 - u^2}.$$

Il metodo della separazione delle variabili può essere applicato anche alle equazioni lineari del prim’ordine (3.6) purché sia $f = ka$.

Esercizio 3.2 Integrare la (3.6) col metodo della separazione delle variabili supponendo $f = ka$ e verificare che il risultato è identico a quello ottenuto in precedenza.

Il procedimento della *riduzione alle quadrature* consiste nel passaggio dall’equazione di moto per un sistema conservativo ad un grado di libertà, notoriamente del second’ordine, all’equazione del prim’ordine della conservazione dell’energia, alla quale si applica

poi il metodo della separazione delle variabili. Se la forza attiva agente a secondo membro è una funzione continua $F(x)$ *posizionale*, cioè dipendente esclusivamente dalla posizione $x \in \mathbf{R}$, ogni sua primitiva $U(x)$ viene detta *potenziale* di F , mentre $V = -U$ si chiama *energia potenziale*. Consideriamo un moto $x(t)$ *dinamicamente possibile*, cioè soluzione dell'equazione di moto

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

e moltiplichiamo questa per la velocità $\dot{x}(t)$. Allora vale identicamente nel tempo l'uguaglianza

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \dot{x}(t)^2 = m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = -V'(x(t))\dot{x}(t) = -\frac{d}{dt}V(x(t))$$

dove al primo membro si riconosce la derivata temporale dell'energia cinetica. Integrando rispetto a t si ottiene il principio di conservazione

$$(3.9) \quad \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E \quad \forall t \in I$$

dove E è la costante dell'energia il cui valore può essere determinato in base ai dati iniziali. È evidente, osservando la (3.9), che ogni moto possibile deve essere compatibile con la condizione

$$V(x) \leq E$$

e quindi deve evolvere rimanendo all'interno di uno degli intervalli che questa condizione definisce, quello che contiene la posizione iniziale x_0 . Dalla (3.9) si ricava

$$(3.10) \quad \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\dot{x}}{\sqrt{E - V(x(t))}} = 1.$$

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che la velocità iniziale sia nulla, quindi $V(x_0) = E$ e $V(x) < E$ per $x > x_0$. Se $V'(x_0) = -f(x_0) = 0$, x_0 è di equilibrio e l'unica soluzione del problema di Cauchy è la quiete $x(t) = x_0$ per ogni $t \geq 0$. Altrimenti deve essere $V'(x_0) < 0$, quindi $\ddot{x}(0) > 0$ e per il teorema della permanenza del segno $\dot{x}(t) > 0$ per $0 \leq t < \delta$ e quindi \dot{x} crescente, dal valore iniziale nullo a valori subito positivi, su questo intervallo. Allora bisogna scegliere il segno “+” e integrare nel tempo

$$(3.11) \quad \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\sqrt{E - V(x(\tau))}} d\tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t$$

in accordo con quanto visto del metodo di integrazione per separazione di variabili. Come si comporta $x(t)$ negli istanti successivi dipende dalla forma di V , certamente il moto procederà senza arrestarsi finché $V(x) < E$. Se poi in una certa posizione $x_1 > x_0$ si ha $V(x_1) = E$ il secondo integrale nella (3.11) è improprio e risulta convergente se $V'(x_1) > 0$, altrimenti divergente se $V'(x_1) = 0$, caso in cui $x(t)$ impiega un tempo infinito per raggiungere x_1 , tende cioè ad esso ma non lo raggiunge mai. Queste due possibilità si spiegano con lo sviluppo di Taylor della V nelle vicinanze di x_1 . Nel primo caso si ha per $x < x_1$

$$V(x) \sim E + V'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{V'(x_1)(x_1 - x)}}.$$

Nel secondo, supponendo V sufficientemente regolare e $h > 1$ il più basso ordine di derivazione tale che $V^{(h)}(x_1) \neq 0$, può essere h pari, con $V^{(h)}(x_1) < 0$ e x_1 di massimo, per cui

$$V(x) \sim E + \frac{V^{(h)}(x_1)}{h!}(x - x_1)^h \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \sim \frac{\sqrt{h!}}{\sqrt{-V^{(h)}(x_1)(x - x_1)^h}},$$

oppure h dispari con $V^{(h)}(x_1) > 0$ e x_1 di flesso orizzontale con V crescente in x_1

$$V(x) \sim E + \frac{V^{(h)}(x_1)}{h!}(x-x_1)^h \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{E-V(x)}} \sim \frac{\sqrt{h!}}{\sqrt{V^{(h)}(x_1)(x_1-x)^h}},$$

pari o dispari che sia, siccome $h/2 \geq 1$ l'integrale diverge. Nel primo caso, se t_1 è il valore dell'integrale in quell'istante, il moto si arresta nella posizione $x(t_1) = x_1$ per tornare verso x_0 per $t > t_1$, fase in cui naturalmente va scelto il segno “-” nella (3.10) essendo $\ddot{x}(t_1) = F(x_1) = -V'(x_1) < 0$. Si tratta di un moto oscillatorio periodico che percorre in un senso e nell'altro l'intero intervallo $[x_0, x_1]$. Nel secondo invece il moto è asintotico verso x_1 , posizione che non può essere raggiunta in nessun istante, altrimenti verrebbe violato il teorema di unicità, dato che anche la funzione costante $x(t) = x_1$ è un moto possibile.

Per fare un esempio, la forza lineare elastica $F(x) = -kx$ ammette $V(x) = kx^2/2$ come energia potenziale, per cui, assegnando i dati di Cauchy $x(0) = x_0 > 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, si ha

$$-\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsen \frac{x(t)}{x_0} - \frac{\pi}{2} \right) = t,$$

da cui, per inversione, si ottiene la ben nota soluzione periodica del moto armonico

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$ è la frequenza delle oscillazioni.

3.5 Equazioni lineari

Si dicono *lineari di ordine n* le equazioni differenziali nella forma *generale*

$$(3.12) \quad a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x)$$

o nella forma *normale*

$$(3.13) \quad u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x),$$

dove le funzioni a_i e f sono date su uno stesso intervallo I a valori in \mathbf{C} . Come già detto nel caso del prim'ordine, la (3.12) può sempre essere ricondotta alla (3.13) dividendo per il coefficiente del termine di ordine massimo in ogni intervallo in cui non si annulli, salvo poi indagare il comportamento delle soluzioni agli estremi di ognuno di essi. Quindi da ora in poi useremo solo la forma normale.

Si chiamano *lineari* perché l'operatore a I membro

$$u \rightarrow Lu = u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u$$

è lineare in u , nel senso che $L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv$.

Vediamo innanzi tutto come sia possibile talvolta, in qualche caso fortunato, “ad-domesticare” e “rimescolare” i termini in modo da ridurre l'ordine dell'equazione. Prendiamo ad esempio la seguente del II ordine (non in forma normale)

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La manipoliamo un po' e diventa

$$(x^2y'' + 2xy') + (xy' + y) - xy'' = (x^2y')' + (xy)' - (xy')' + y' = 0,$$

da cui

$$x^2 y' + xy - xy' + y = x(x-1)y' + (x+1)y = c_1.$$

Adesso può essere risolta come nel § 3.3 ottenendo dapprima

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x-1)^2}{x} y \right] = \frac{c_1(x-1)}{x^2}$$

e poi le due famiglie distinte di soluzioni

$$y(x) = \begin{cases} \frac{c_1(1+x \log x) + c_2 x}{(x-1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{c_1(1+x \log(-x)) + c_2 x}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si noti che le soluzioni a destra e le soluzioni a sinistra di 0 tendono a c_1 per $x \rightarrow 0$ e questo significa che ognuna delle funzioni

$$y(x) = \frac{c_1(1+x \log |x|) + c_2 x}{(x-1)^2}$$

può essere considerata soluzione su tutto \mathbf{R} dell'equazione data. La degenerazione in 0 dell'equazione comporta però che le soluzioni per cui $c_1 \neq 0$ non siano derivabili in 0, come si può facilmente verificare, quindi degli eventuali dati di Cauchy in 0 non può essere assegnato il valore della derivata.

L'equazione di **Hermite**

$$u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0$$

con $\lambda = -1$ diventa

$$u'' - 2(xu)' = 0$$

che per integrazione diretta equivale alla

$$u' - 2xu = c_1.$$

L'integrale generale è dunque

$$u(x) = e^{x^2} \left(c_2 + c_1 \int_0^x e^{-t^2} dt \right).$$

Dal momento che l'equazione (3.13) coinvolge le derivate fino all'ordine n di u , è naturale assumere che L sia definito sullo spazio vettoriale $C^n(I, \mathbf{C})$ delle funzioni derivabili su I fino all'ordine n a valori complessi, cosa possibile solo se le funzioni a valori complessi a_i e f assegnate sono almeno continue su I . Teniamo presente però che allo stato attuale nulla sappiamo dell'intervallo su cui le soluzioni, ammesso che esistano, sono definite, dato che neanche esso è noto a priori perché, per quanto ne sappiamo, potrebbe essere strettamente contenuto in I . Comunque adesso ci preoccupiamo soltanto di come trovarle accettando per vera l'esistenza di un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu = f & \text{su } I \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{n-1}(x_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

con u_0, u_1, \dots, u_{n-1} numeri complessi assegnati.

Vale la seguente importante proprietà generale di un'equazione del tipo

$$(3.14) \quad Lu = f$$

dove L è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, di qualunque natura. Siano V_0 il nucleo di L , cioè lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$(3.15) \quad Lu = 0,$$

e V_f l'insieme delle soluzioni della (3.14).

Proposizione 3.1 - Fissato ad arbitrio un elemento $\bar{u} \in V_f$, si ha

$$V_f = \bar{u} + V_0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $V_f \subset \bar{u} + V_0$. Dobbiamo fare vedere che per ogni $u \in V_f$ esiste $u_0 \in V_0$ tale che $u = \bar{u} + u_0$. Basta porre $u_0 = u - \bar{u}$ e si ha $Lu_0 = 0$, infatti

$$Lu_0 = L(u - \bar{u}) = Lu - L\bar{u} = f - f = 0.$$

Viceversa, se $u \in \bar{u} + V_0$, cioè se $u = \bar{u} + u_0$ con $u_0 \in V_0$, allora $u \in V_f$ in quanto

$$Lu = L(\bar{u} + u_0) = L\bar{u} + Lu_0 = f.$$

□

Il problema dell'integrazione della (3.14) viene così ridotto a due problemi indipendenti, la ricerca dell'integrale generale della cosiddetta omogenea associata, la (3.15), e la determinazione di una soluzione particolare, di una sola soluzione, qualunque sia, della (3.14). Cominciamo dal primo di questi.

L'integrale generale di un'equazione omogenea - Essendo V_0 uno spazio vettoriale, conviene caratterizzarlo scegliendo in esso una base, cioè un insieme di soluzioni della (3.15) linearmente indipendenti che possano generare tutto V_0 . Un insieme siffatto si chiama *sistema fondamentale di soluzioni*.

Definizione 3.2 Diciamo che k funzioni su un intervallo I sono **linearmente (o funzionalmente) indipendenti** se

$$\sum_{i=0}^k c_i u_i(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Ad esempio $\cos x$ e $\sin x$ sono linearmente indipendenti perché se

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

allora scegliendo $x = 0$ si ottiene $c_1 = 0$ e per $x = \pi/2$ $c_2 = 0$. Per vedere che k funzioni esponenziali $e^{\lambda_i x}$, con $i = 1, \dots, k$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, sono linearmente indipendenti basta calcolare una loro combinazione lineare per k valori distinti di x e porla ogni volta uguale a 0. Si ottiene un sistema omogeneo nei c_i la cui matrice dei coefficienti ha determinante non nullo, quindi tutti i c_i devono essere nulli. Facilmente si possono immaginare tanti altri esempi. Ma c'è anche un altro procedimento che si basa sul fatto che se una combinazione lineare di funzioni è identicamente nulla allora lo è anche quella delle loro derivate di qualunque ordine con gli stessi coefficienti. Per due funzioni, come le precedenti, servono due condizioni e basta derivare una volta sola. Il sistema omogeneo

$$\begin{cases} c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0 \\ -c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0, \end{cases}$$

in cui la seconda equazione è la derivata della prima, ammette la sola soluzione $c_1 = c_2 = 0$ perché

$$\det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

a conferma che $\cos x$ e $\sin x$ sono linearmente indipendenti. Per k funzioni si deriva fino all'ordine $k - 1$ pervenendo al sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ u_1' & u_2' & \dots & u_k' \\ u_1'' & u_2'' & \dots & u_k'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{k-1} & u_2^{k-1} & \dots & u_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha solo la soluzione nulla $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ se e solo se le u_i sono linearmente indipendenti, e questo avviene se il determinante $W(x)$, il *wronskiano*, della matrice di funzioni a primo membro non si annulla mai al variare di x . Il vantaggio dell'uso del wronskiano sta nel fatto che ci fornisce un criterio per stabilire se certe funzioni sono linearmente dipendenti: se $W(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ le funzioni che compaiono nella prima riga sono linearmente indipendenti.

Osservazione 3.3 - La condizione $W(x) \neq 0$ è sufficiente ma non necessaria per l'indipendenza lineare. Ad esempio le due funzioni

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad e \quad u_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sono linearmente indipendenti, ma il loro wronskiano è ovunque nullo.

Quanto si è detto in queste righe va adesso applicato ad un insieme di soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n , vogliamo in particolare stabilire se tali funzioni sono linearmente indipendenti o meno usando il wronskiano. Il fatto interessante è che, per il semplice motivo che si tratta di soluzioni di una stessa equazione differenziale, basta che il wronskiano si annulli in un punto e allora si annulla dappertutto. Lo si vede bene nel caso di un'equazione del II ordine

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0.$$

Scelte due soluzioni u_1 e u_2 , usando l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{d}{dx}(u_1 u_2' - u_2 u_1') = u_1 u_2'' - u_2 u_1'' \\ &= u_1(-a(x)u_2' - b(x)u_2) - u_2(-a(x)u_1' - b(x)u_1) \\ &= -a(x)(u_1 u_2' - u_2 u_1') = -a(x)W. \end{aligned}$$

Il procedimento risolutivo per le equazioni lineari del I ordine, visto nel § 3.3, porta all'espressione

$$(3.16) \quad W(x) = C e^{-a(x)}.$$

Non essendo l'esponenziale mai nullo, l'eventuale annullarsi di W in un punto comporta $C = 0$ e quindi l'annullarsi di W su tutto I ; viceversa basta che W sia non nullo anche in un solo punto e non si annulla mai su I . In conclusione, per stabilire se due soluzioni di un'equazione lineare del II ordine sono linearmente indipendenti basta vedere se è nullo o meno il loro wronskiano in un punto scelto a piacere. Il

risultato vale in generale per le equazioni lineari di qualunque ordine. Siano infatti u_i , $i = 1, \dots, n$, n soluzioni dell'equazione (3.13) con $f = 0$. Allora

$$\begin{aligned}
 W'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{n-2} & u_2^{n-2} & \dots & u_n^{n-2} \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \dots & u_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{n-2} & u_2^{n-2} & \dots & u_n^{n-2} \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{n-2} & u_2^{n-2} & \dots & u_n^{n-2} \\ -a_{n-1}(x)u_1^{n-1} & -a_{n-1}(x)u_2^{n-1} & \dots & -a_{n-1}(x)u_n^{n-1} \end{vmatrix} = -a_{n-1}(x)W(x)
 \end{aligned}$$

e quindi anche in questo caso vale la (3.16), con a_{n-1} al posto di a , e la stessa conclusione sul carattere di W .

Ci poniamo adesso la questione: in che modo possiamo individuare ogni volta una famiglia di soluzioni indipendenti? Si vede immediatamente che lo sono le n soluzioni degli n problemi di Cauchy

$$(3.17) \quad \begin{cases} Lu_k = 0 & \text{su } I \\ u_k^{(h-1)}(x_0) = \delta_{hk} & \forall h = 1, \dots, n \end{cases}$$

con $1 \leq k \leq n$. In questo caso infatti il wronskiano in x_0 non è altro che il determinante della matrice identità che vale 1 e si manterrà non nullo anche in tutti gli altri punti. Ciò dimostra che ogni equazione lineare di ordine n ammette almeno n soluzioni linearmente indipendenti. Ma in più possiamo facilmente dimostrare che ogni soluzione può essere espressa come loro combinazione lineare, quindi l'integrale generale dell'equazione resa omogenea, lo spazio V_0 , ha dimensione n ed ha per base le n soluzioni delle (3.17), le quali formano dunque un sistema fondamentale.

Sia infatti v una soluzione qualsiasi della solita equazione (3.13) resa omogenea. Allora sono noti il valore suo e delle sue derivate in x_0 , siano essi $\alpha_i = v^{(i-1)}(x_0)$ per $i = 1, \dots, n$. La funzione

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x), \quad x \in I,$$

combinazione lineare delle soluzioni u_k degli n problemi (3.17), soddisfa lo stesso problema di Cauchy di cui è soluzione la v , dunque $v = u$ per l'unicità.

Sfortunatamente sono molto rari i casi in cui si riesce a determinare un sistema fondamentale di soluzioni, ma una categoria importante per cui ciò è possibile è quella delle equazioni a coefficienti costanti, come vedremo tra poco. È utile intanto tener presente che conoscere una soluzione permette il passaggio dall'equazione data ad un'equazione di ordine più basso. Infatti se si applica l'operatore differenziale L al prodotto $v = \varphi u$ si ha per la formula di Leibnitz

$$\begin{aligned}
 L(\varphi u) &= \sum_{k=0}^n a_k(x)(\varphi u)^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k(x) \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \varphi^{(h)} u^{(k-h)} \\
 &= \varphi \sum_{k=0}^n a_k(x) u^{(k)} + \sum_{k=0}^n a_k(x) \sum_{h=1}^k \binom{k}{h} \varphi^{(h)} u^{(k-h)} = \varphi Lu + \Lambda \varphi,
 \end{aligned}$$

dove Λ è un operatore lineare. Pertanto, sapendo che una certa funzione u soddisfa $\Lambda u = 0$, la φ deve soddisfare l'equazione di ordine n

$$\Lambda\varphi = 0$$

che però non contiene la φ , ma solo le sue derivate, quindi è come se avesse ordine $n-1$. Questo procedimento, noto come *metodo della riduzione dell'ordine di D'alambert*, è particolarmente efficace per le equazioni lineari del II ordine perché, una volta ridotte al I ordine, sono tutte risolubili in modo esplicito.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$u'' - \frac{xu'}{1+x^2} + \frac{u}{1+x^2} = 0.$$

Individuata la soluzione $u(x) = x$, riconoscibile a colpo d'occhio, se ne può trovare un'altra come prodotto della u per una funzione φ da determinare: $v(x) = x\varphi(x)$. Per sostituzione diretta si ottiene l'equazione del I ordine in φ'

$$x\varphi'' + \left(2 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)\varphi' = 0$$

che ammette come integrale generale

$$\varphi'(x) = \frac{c\sqrt{1+x^2}}{x^2}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Al valore $c = 0$ corrisponde la soluzione u già considerata insieme allo spazio vettoriale cu che essa genera. Scegliendo $c = 1$ si ricava

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

da cui

$$v(x) = -\sqrt{1+x^2} + x \log(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Le funzioni u e v , evidentemente linearmente indipendenti, costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni e l'integrale generale dell'equazione data è lo spazio vettoriale che esse generano, cioè la famiglia

$$c_1x + c_2[\sqrt{1+x^2} - x \log(x + \sqrt{1+x^2})]$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Esempi

3.10 Nell'equazione di Legendre

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda(\lambda+1)u = 0$$

per $\lambda = 1$ si riconosce subito la soluzione $u(x) = x$. Una seconda soluzione va cercata tra le v del tipo $v(x) = x\varphi(x)$ dove φ , per sostituzione nella stessa equazione, deve soddisfare la condizione

$$\varphi'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)\varphi' = 0, \quad x \neq 0, \pm 1.$$

Risolta questa, si ricava

$$v(x) = -1 + \frac{x}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

3.11 Nell'equazione di Bessel

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \lambda^2) u = 0$$

per $\lambda = 1/2$ si riconosce, non così facilmente, la soluzione $u(x) = \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}$. Lasciamo al lettore il compito di trovare una seconda soluzione indipendente.

Il caso dei coefficienti costanti - Pensando al tipo di soluzioni già viste nel caso del I ordine, siamo indotti a cercarle anche adesso di tipo esponenziale. Proviamo ad imporre alla funzione $u(x) = e^{\lambda x}$ di soddisfare per sostituzione diretta l'equazione

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0.$$

Otteniamo l'equazione algebrica associata

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

che ammette, per il teorema fondamentale dell'algebra, un certo numero $r \leq n$ di soluzioni complesse $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ con rispettive molteplicità m_1, m_2, \dots, m_r . Nel caso di n soluzioni a due a due distinte otteniamo il sistema fondamentale $\{e^{\lambda_i x}\}$, con $1 \leq i \leq n$, e quindi l'integrale generale

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Imponendo eventuali dati di Cauchy in un punto, trattandosi di n condizioni indipendenti, si determinano univocamente i valori dei coefficienti c_i e quindi una sola soluzione viene individuata.

Se invece alcune delle radici hanno molteplicità superiore dobbiamo servirci anche di funzioni del tipo $x^h e^{\lambda_i x}$, dette *quasi-polinomi*. Precisamente, ad una certa radice λ_i con molteplicità m_i corrispondono le m_i soluzioni indipendenti

$$e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}.$$

Ad esse si perviene applicando il metodo di D'Alambert, come si può facilmente verificare con esempi vari di equazioni del II ordine, del III e così via. L'equazione

$$u''' - u'' - u' + u = 0$$

ammette

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

come equazione algebrica associata, soddisfatta per $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ di cui la seconda è doppia. Allora sono soluzioni indipendenti le funzioni e^{-x} e e^x , ma queste non generano tutto V_0 che ha 3 dimensioni. Una terza soluzione indipendente dalle altre si trova ponendo $v(x) = \varphi(x) e^x$, che sostituita nell'equazione fornisce

$$\varphi' + 2\varphi = x$$

dopo qualche immediata integrazione con scelte di comodo delle costanti. Ne deriva $\varphi(x) = x/2$, ma che si può sostituire con $\varphi(x) = x$, da cui $v(x) = x e^x$. Lo spazio V_0 è allora l'insieme delle funzioni

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x$$

al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

In presenza di una radice complessa $\lambda = p + iq$, con $p, q \in \mathbf{R}$, la funzione esponenziale corrispondente può essere scritta in termini trigonometrici $e^{\lambda x} = e^{px}(\cos qx +$

$i \operatorname{sen} qx$). Un esempio notevole proviene dalla Meccanica dei sistemi vibranti. L'equazione del moto unidimensionale per un punto materiale di massa m soggetto a una forza di richiamo elastica lineare verso un centro di attrazione è data da

$$m\ddot{x} = -kx, \quad k > 0,$$

dove x è l'ascissa del punto materiale. I circuiti elettrici LC sono governati dalla stessa equazione. Definita la frequenza propria $\omega = \sqrt{k/m}$, si ha

$$(3.18) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

a cui è associata l'equazione algebrica

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Ne deriva il sistema fondamentale $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$ da cui l'integrale generale

$$c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{C}.$$

È immediato verificare che se i dati di Cauchy sono reali, come deve accadere se si vuol tener conto della situazione fisica, allora la parte immaginaria della corrispondente soluzione deve rimanere nulla nel tempo. Imponendo ad esempio le condizioni reali sul moto $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = \frac{v_0}{i\omega} \end{cases}$$

da cui deriva l'unica soluzione

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{i\omega} \right) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega} \right) e^{-i\omega t} = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

Osserviamo a tal proposito che anche il sistema $\{\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t\}$ è fondamentale, il passaggio dal precedente a questo va visto come un cambio di base, la soluzione è la stessa ma scritta in due modi diversi. Lo si può vedere direttamente così

$$\begin{aligned} c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} &= c_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + c_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\ &= \frac{c_1 + c_2}{2} \cos \omega t + \frac{i(c_1 - c_2)}{2} \operatorname{sen} \omega t = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t. \end{aligned}$$

Ma c'è anche una terza espressione per l'integrale generale. Introdotta l'ampiezza $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ delle oscillazioni, poiché $C_1^2/A^2 + C_2^2/A^2 = 1$, esiste un numero reale ψ , detta *fase*, tale che

$$\frac{C_1}{A} = \cos \psi \quad \text{e} \quad \frac{C_2}{A} = \operatorname{sen} \psi$$

per cui

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t = A \left(\frac{C_1}{A} \cos \omega t + \frac{C_2}{A} \operatorname{sen} \omega t \right) = A \cos(\omega t - \psi).$$

Se vi è resistenza al moto perché il punto si muove nell'aria o in un mezzo fluido, si deve tener conto della resistenza viscosa $-h\dot{x}$, $h > 0$, che abbiamo già considerato nel problema della caduta del grave. L'equazione diventa

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \varepsilon = \frac{h}{m},$$

la stessa dei circuiti LRC

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Qui bisogna analizzare tre casi possibili a seconda del segno di $\varepsilon^2 - \omega^2$.

Caso $\varepsilon > \omega$ - Posto $\delta = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$, prevale la resistenza viscosa sulla forza di richiamo elastica, le radici $-\varepsilon \pm \delta$ sono reali negative quindi il moto si smorza con legge esponenziale verso la posizione di equilibrio compiendo al più una sola oscillazione. L'integrale generale è infatti

$$x(t) = e^{-\varepsilon t}(c_1 e^{-\delta t} + c_2 e^{\delta t}).$$

Caso $\varepsilon = \omega$ - Viene detto *smorzamento critico*, le radici coincidono e l'integrale generale è

$$x(t) = e^{-\varepsilon t}(c_1 t + c_2).$$

Anche in questo caso c'è un rapido smorzamento verso l'equilibrio con al più un'oscillazione.

Caso $\varepsilon < \omega$ - Prevale la forza elastica e il sistema subisce (infinite) oscillazioni smorzate, sempre con decadimento esponenziale verso la posizione di equilibrio, con legge temporale

$$x(t) = e^{-\varepsilon t}(c_1 \cos \delta t + c_2 \sin \delta t) = A e^{-\varepsilon t} \cos(\delta t - \psi).$$

L'equazione non omogenea - Adesso ci dobbiamo preoccupare di determinare una particolare soluzione dell'equazione non omogenea, quella completa con un dato f non identicamente nullo a II membro. Limitandoci per il momento ai coefficienti costanti, se f è una funzione polinomiale o esponenziale o trigonometrica o un prodotto tra queste la soluzione particolare ce l'aspettiamo nella stessa categoria. Questo è il metodo della *somiglianza*, si può interpretare dicendo che la soluzione risponde alla sollecitazione, il dato a secondo membro, comportandosi grosso modo alla stessa maniera e quindi dovrà avere una forma *simile*. Facciamo un esempio osservando anche che per un'equazione lineare come la seguente

$$u'' - 5u' + 6u = x e^x + \sin x,$$

con una somma di funzioni a II membro, vale il *principio di sovrapposizione*, per cui basta risolvere separatamente le due equazioni

$$u'' - 5u' + 6u = x e^x \quad \text{e} \quad u'' - 5u' + 6u = \sin x$$

e sommarne le soluzioni. L'equazione resa omogenea è la stessa, ma per la prima è naturale cercare una soluzione particolare del tipo $\bar{u}(x) = (\alpha x + \beta)e^x$, per la seconda la cercheremo del tipo $\bar{u}(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Attenzione a non confondere questi coefficienti con le costanti di integrazione precedenti, dette anche *costanti arbitrarie*; qui dobbiamo cercare i valori di α e di β affinché una certa funzione soddisfi l'equazione. Nei due casi si ha rispettivamente

$$\bar{u}(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)e^x \quad \text{e} \quad \bar{u}(x) = \frac{1}{10}(\cos x + \sin x).$$

Si ottiene pertanto come integrale generale dell'equazione di partenza

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)e^x + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x).$$

Questo procedimento funziona all'interno di una ristretta categoria di dati, precisamente con le funzioni polinomiali, esponenziali, trigonometriche, con relative combinazioni lineari e prodotti tra questi tre tipi, tutti casi particolari di una funzione del tipo $P(x)e^{qx}$ dove P è un polinomio e q un numero complesso.

Per chiarezza illustriamo lo schema completo su come si deve procedere per la soluzione particolare dell'equazione lineare a coefficienti costanti

$$(3.19) \quad \sum_{k=0}^n a_k u^{(k)} = f(x)$$

dove $a_k \in \mathbf{C}$ e $a_n \neq 0$. Negli schemi che seguono mettiamo a sinistra il dato e a destra la forma della soluzione particolare con delle eccezioni nella seconda riga.

Caso 1

$f(x) = \sum_{h=0}^m p_h x^h$	$\bar{u}(x) = \sum_{h=0}^m \alpha_h x^h$
	nella (3.19) $a_i = 0$ per $0 \leq i \leq j \Rightarrow \bar{u}(x) = \sum_{h=0}^{m+j+1} \alpha_h x^h$

Esempi

3.12 Per l'equazione

$$u'' + u = x^3 + 2x^2 - 1$$

cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$\bar{u}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Si ottiene $\bar{u}(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 5$.

3.13 Per l'equazione

$$u'' + u' = x^3 + 2x^2 - 1$$

cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$\bar{u}(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

dove però si può già porre $e = 0$. Si ottiene $\bar{u}(x) = x^4/4 - x^3/3 + x^2 - 3x$.

In assenza dei termini in u e u' a sinistra avremmo cercato come soluzione particolare un polinomio di quinto grado, e così via.

Caso 2

$f(x) = ke^{px}$	$\bar{u}(x) = \alpha e^{px}$
	e^{px} soluzione della omogenea $\Rightarrow \bar{u}(x) = \alpha x e^{px}$

Esempi

3.14 Per l'equazione

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-x}$$

cerchiamo una soluzione del tipo $\bar{u}(x) = \alpha e^{-x}$ ottenendo $\alpha = 1/6$.

3.15 Se il dato nell'equazione precedente è e^x oppure e^{2x} , funzioni che soddisfano la omogenea per cui 1 e 2 annullano il polinomio caratteristico, dobbiamo cercare una soluzione del tipo $\alpha x e^x$ o $\alpha x e^{2x}$ rispettivamente. Si ottiene in questo caso $\bar{u}(x) = -x e^x$. Nel caso di radici doppie, come avviene con l'equazione

$$u'' - 2u' + u = e^x,$$

dobbiamo cercarla della forma $\bar{u}(x) = \alpha x^2 e^x$ e viene $\alpha = 1/2$.

Caso 3

$f(x) = e^{px} \sum_{h=0}^m p_h x^h$	$\bar{u}(x) = \alpha e^{px} \sum_{h=0}^m \alpha_h x^h$
	e^{px} soluzione della omogenea $\Rightarrow \bar{u}(x) = \alpha e^{px} \sum_{h=0}^{m+1} \alpha_h x^h$

Esempi

3.16 Una soluzione dell'equazione

$$u'' - 2u' + u = x^2 e^{-x}$$

è $\bar{u}(x) = (x^2/4 + x/2 + 3/8)e^{-x}$.

3.17 Una soluzione dell'equazione

$$u'' - 2u' + u = x^2 e^x$$

è $\bar{u}(x) = x^4 e^x / 12$.

Caso 4

$f(x) = A \cos qx + B \sin qx$	$\bar{u}(x) = \alpha \cos qx + \beta \sin qx$
	f soddisfa l'omogenea $\Rightarrow \bar{u}(x) = x(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

Oscillatore forzato, risonanza - In presenza di una forza impressa, funzione periodica del tempo con frequenza γ del tipo $f(t) = f_0 \sin \gamma t$, l'equazione (3.18) che governa il moto dell'oscillatore lineare elastico *libero* con frequenza ω diventa

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin \gamma t.$$

Nel cercare una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = \alpha \cos \gamma t + \beta \sin \gamma t$ si perviene alla

$$(3.20) \quad \bar{x}(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t,$$

quindi i moti possibili sono dati dalla famiglia di funzioni

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Ora, quanto più la frequenza γ della forzante è prossima alla frequenza propria ω dell'oscillatore, tanto più prevale sugli altri l'ultimo termine,

quello che “risponde” alla forza impressa. Che cosa succede quando $\gamma = \omega$? Questo è il caso in cui la forza impressa è essa stessa soluzione della omogenea e la soluzione particolare scelta non è più accettabile. Fisicamente corrisponde al fenomeno della *risonanza*. Un modo per calcolare la soluzione particolare in questo caso è quello di sceglierne un'altra per $\gamma \neq \omega$ per la quale sia poi possibile passare al limite per $\gamma \rightarrow \omega$. Se lo era la (3.20) lo è anche la seguente

$$\bar{y}(t) = \frac{f_0(\text{sen } \gamma t - \text{sen } \omega t)}{\omega^2 - \gamma^2},$$

ottenuta da quella aggiungendo una soluzione dell'omogenea. Applicando la prima regola di L'Hôpital nel punto $\gamma = \omega$ si ottiene

$$(3.21) \quad \bar{x}(t) = -\frac{f_0 t \cos \omega t}{2\omega}.$$

Si tratta sempre di un moto oscillatorio, ma non più periodico, in cui l'ampiezza delle oscillazioni cresce proporzionalmente al tempo; *a regime*, come si usa dire, possiamo senz'altro trascurare i termini periodici che rimangono limitati, e considerare, con approssimazione soddisfacente, il solo termine (3.21) come quello che descrive l'effettivo comportamento del sistema. Interessante osservare che la posizione dell'oscillatore è in *controfase* rispetto alla forza impressa, quando questa è nulla l'elongazione è massima.

La soluzione particolare ottenuta coincide con ciò che avremmo ottenuto seguendo lo stesso suggerimento dei casi precedenti, in cui il dato soddisfa l'omogenea. Il lettore può cercare infatti come soluzione particolare una funzione del tipo $t(\alpha \cos \omega t + \beta \text{sen } \omega t)$ e verificare che il risultato non è cambiato (a meno della somma con una soluzione dell'omogenea).

Oscillatore dissipato e forzato, risonanza - Volendo tener conto della resistenza viscosa che si oppone al moto con legge lineare, a sinistra compare anche il solito termine del I ordine proporzionale alla velocità

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + \omega^2 x = f_0 \text{sen } \gamma t$$

dove è evidente che per nessun valore di γ il dato è soluzione dell'omogenea. Cercando anche questa volta una soluzione particolare del tipo $\bar{x}(t) = \alpha \cos \gamma t + \beta \text{sen } \gamma t$ troviamo

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{f_0}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\varepsilon^2 \gamma^2} ((\omega^2 - \gamma^2) \text{sen } \gamma t - 2\varepsilon \gamma \cos \gamma t) \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\varepsilon^2 \gamma^2}} \text{sen} \left(\gamma t - \text{arctg} \frac{2\varepsilon \gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \right). \end{aligned}$$

A maggior ragione in questo caso la soluzione particolare è quella che descrive il moto effettivo a regime, dato che i termini che provengono dall'omogenea subiscono uno smorzamento esponenziale. E anche adesso possiamo affermare che per $\gamma \rightarrow \omega$, tendendo la fase a $\pm \pi/2$, la soluzione trovata tende a trovarsi in controfase con la forza impressa, in più possiamo dire che sono in fase forza e velocità. Ma se per frequenza di risonanza si intende quella che rende massima l'ampiezza delle oscillazioni, il suo valore è quello che rende minimo il denominatore nell'espressione dell'ampiezza, cioè $\gamma_{ris} = \sqrt{\omega^2 - 2\varepsilon^2}$, supponendo ovviamente $\varepsilon \leq \omega/\sqrt{2}$, condizione che garantisce che i moti siano oscillatori (per questo bastava $\varepsilon < \omega$ come si è già visto).

Caso 5

$f(x) = e^{px}(A \cos qx + B \sin qx)$	$\bar{u}(x) = e^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$
	f soddisfa l'omogenea \Rightarrow $\bar{u}(x) = xe^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

Quest'ultimo caso, ma anche il Caso 4, è in realtà riconducibile al Caso 2 osservando che, posto $\eta = p + iq$, si ha

$$e^{px}(A \cos qx + B \sin qx) = \frac{A - iB}{2} e^{\eta x} + \frac{A + iB}{2} e^{\bar{\eta} x}.$$

Il metodo della variazione delle costanti - Si tratta di un metodo generale per determinare una soluzione particolare che certamente può essere usato nei casi precedenti, ma anche quando al secondo membro compare una funzione che non è di quel tipo e l'equazione è a coefficienti variabili.

Si cerca una soluzione particolare come combinazione lineare a coefficienti variabili (da cui il nome del metodo) degli elementi del sistema fondamentali. Per l'equazione del II ordine

$$(3.22) \quad u'' + a(x)u' + b(x)u = f(x), \quad x \in I,$$

si pone

$$\bar{u}(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x),$$

la si deriva

$$\bar{u}'(x) = c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) + c_1(x)u_1'(x) + c_2(x)u_2'(x)$$

e si impone alla parte contenente le derivate dei coefficienti di annullarsi identicamente

$$c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) = 0.$$

Ne segue, derivando ancora, l'espressione della derivata seconda

$$\bar{u}''(x) = c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x) + c_1(x)u_1''(x) + c_2(x)u_2''(x).$$

Inserite le \bar{u} , \bar{u}' e \bar{u}'' nella (3.22), si ottiene

$$c_1'u_1' + c_2'u_2' + c_1u_1'' + c_2u_2'' + a(c_1u_1' + c_2u_2') + b(c_1u_1 + c_2u_2) = f$$

dove si può notare che al I membro la somma dei termini dal terzo in poi è nulla perché u_1 e u_2 soddisfano l'omogenea. Rimane pertanto da risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) = 0 \\ c_1'(x)u_1' + c_2'(x)u_2' = f(x) \end{cases}$$

rispetto a c_1' e c_2' , da cui per integrazione si sceglie una c_1 e una c_2 tra le possibili definite a meno di una costante.

Esercizio 3.3 - Integrare l'equazione differenziale

$$u'' - \frac{2x-1}{x^2-x}u' - \frac{x^2-3x+1}{x^2-x}u = (x^2-x)e^{2x}.$$

Dapprima troviamo due soluzioni fondamentali risolvendo l'omogenea associata. Siccome la somma dei coefficienti è identicamente nulla, sicuramente una soluzione è $u_1(x) = e^x$. Cerchiamo allora la seconda del tipo $u_2(x) = \varphi(x)e^x$. Inserendo questa nell'equazione si trova con facili calcoli

$$\varphi'(x) = (x^2 - x)e^{-2x}, \quad \varphi(x) = x^2 e^{-2x} \quad \text{e} \quad u_2(x) = x^2 e^{-x}.$$

Applicando il metodo della variazione delle costanti cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{u}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)x^2e^{-x}$$

e risolviamo rispetto a c_1' e c_2' il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)x^2e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - x)e^{2x}. \end{cases}$$

Esso ammette la soluzione

$$c_1' = \frac{x^2 e^x}{2} \quad \text{e} \quad c_2' = -\frac{e^{3x}}{2}$$

da cui

$$c_1(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^x \quad \text{e} \quad c_2(x) = -\frac{e^{3x}}{6}.$$

ne derivano la soluzione particolare

$$\bar{u}(x) = \left(\frac{x^2}{3} - x + 1\right)e^{2x}$$

e l'integrale generale

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 x^2 e^{-x} + \left(\frac{x^2}{3} - x + 1\right)e^{2x}.$$

In base agli eventuali dati di Cauchy si possono calcolare a questo punto i valori delle costanti arbitrarie c_1 e c_2 .

Tornando al metodo generale, conviene usare una notazione vettoriale, più compatta, per la soluzione particolare ponendo $c = (c_1, c_2)$ e $u = (u_1, u_2)$, quindi

$$\bar{u}(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) = c(x) \cdot u(x),$$

espressione assai più maneggevole specialmente per equazioni di ordine superiore. Ripercorriamo il ragionamento per quelle del II ordine

$$\bar{u}'(x) = c' \cdot u + c \cdot u'$$

e siccome va imposta la condizione $c' \cdot u = 0$, la derivata seconda è

$$\bar{u}''(x) = c' \cdot u' + c \cdot u''.$$

Imponendo che sia soddisfatta l'equazione, si ottiene

$$c \cdot u'' + c' \cdot u' + ac \cdot u' + bc \cdot u = c \cdot (u'' + au' + bu) + c' \cdot u' = f$$

dove la parentesi è nulla perché u è una coppia di soluzioni della omogenea. Rimane così da risolvere il sistema

$$\begin{cases} c' \cdot u = 0 \\ c' \cdot u' = f. \end{cases}$$

Nel caso di un'equazione del III ordine, posto $c = (c_1, c_2, c_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$, si ragiona in modo analogo ottenendo

$$\begin{cases} c' \cdot u = 0 \\ c' \cdot u' = 0 \\ c' \cdot u'' = f. \end{cases}$$

È facile infine immaginare come si procede per le equazioni di ordine qualunque.

3.6 Unicità per il Problema di Cauchy

Vogliamo ora affrontare la questione dell'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy, ma dapprima, avendo trattato finora solo degli esempi, dobbiamo precisare alcuni concetti riguardanti le equazioni e i sistemi differenziali.

Definizione 3.4 - Un'equazione differenziale di ordine n è una relazione del tipo

$$(3.23) \quad F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

tra una funzione u e le sue derivate fino all'ordine n , con $F : D \rightarrow \mathbf{R}$ dove D è un aperto connesso di \mathbf{R}^{n+2} . Si chiama **soluzione** dell'equazione (3.23) ogni funzione $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile fino all'ordine n tale che

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Diciamo che un'equazione è scritta in **forma normale** se la derivata di ordine più alto è espressa in funzione degli altri termini

$$(3.24) \quad u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

con $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ dove D è un aperto connesso di \mathbf{R}^{n+1} . L'equazione viene detta **autonoma** se F o f , a seconda dei casi, non dipende esplicitamente da x .

Noi ci occuperemo solo delle equazioni scritte in forma normale perché quelle che non sono di questo tipo si suppone possano ricondursi a più equazioni in forma normale su intervalli separati, come si è già detto, salvo poi stabilire se le relative soluzioni sono raccordabili, e con quale regolarità, attraverso gli estremi da uno all'altro. Ogni funzione così ricostruita può essere interpretata come soluzione del problema di partenza.

Definizione 3.5 - Un sistema di equazioni differenziali, o un'equazione differenziale vettoriale, del I ordine in forma normale è una relazione del tipo

$$(3.25) \quad u' = f(x, u)$$

dove $f(x, u) = (f_1(x, u_1, \dots, u_n), f_2(x, u_1, \dots, u_n), \dots, f_n(x, u_1, \dots, u_n))$ è un campo vettoriale definito su un aperto connesso $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ a valori in \mathbf{R}^n .

Ogni equazione del tipo (3.24) si può trasformare in un sistema equivalente del I ordine, basta porre $u = u_1, u' = u_2, \dots, u^{(n-1)} = u_n$ e si ottiene

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \vdots \\ u'_{n-1} = u_n \\ u'_n = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n). \end{cases}$$

Ovviamente esistono anche sistemi di ordine più alto, ma questi si possono sempre ricondurre al I ordine aumentando il numero di equazioni con simili artifici, quindi è sufficiente considerare i sistemi del I ordine. Al Problema di Cauchy per un'equazione di ordine n si addicono n condizioni iniziali, per u e per le sue derivate fino all'ordine $n - 1$. Ad un sistema di n equazioni del I ordine si addicono n condizioni iniziali, una per ogni funzione incognita.

L'Equazione Fondamentale della Dinamica che governa il moto di un punto materiale

$$(3.26) \quad \begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0. \end{cases}$$

è un esempio di Problema di Cauchy per un sistema del II ordine. L'unicità della soluzione non è altro che la versione matematica del principio di determinismo meccanico:

note in un certo istante t_0 la configurazione \mathbf{x}_0 e lo stato cinetico \mathbf{v}_0 di un sistema meccanico soggetto ad una sollecitazione $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, l'evoluzione del sistema $\mathbf{x}(t)$ rimane univocamente determinata per ogni $t > t_0$.

Problema 3.6 (di Cauchy per un'equazione differenziale di ordine n) - Dati una funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, con D aperto in \mathbf{R}^{n+1} , e n numeri reali u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , trovare $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile fino all'ordine n tale che

$$(3.27) \quad \begin{cases} u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u_1 \\ u''(x_0) = u_2 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}. \end{cases}$$

Problema 3.7 (di Cauchy per un sistema differenziale del I ordine) - Dati una funzione continua $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$, con D aperto in \mathbf{R}^{n+1} , e un vettore $u_0 \in \mathbf{R}^n$, trovare $u : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ derivabile tale che

$$(3.28) \quad \begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

essendo $x_0 \in I$.

Avendo ricondotto la (3.27) alla (3.28), tratteremo la questione dell'esistenza e dell'unicità solo per la (3.28), che però ci conviene trasformare in un'equazione integrale.

Problema 3.8 (Equazione integrale di Volterra) - Trovare $u \in C^0(I)$ tale che

$$(3.29) \quad u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \quad \forall x \in I.$$

Proposizione 3.9 - Il Problema 3.7 e il Problema 3.8 sono equivalenti.

Dimostrazione. Se $u \in C^1(I)$ soddisfa il Problema 3.7 allora è certamente continua e siccome lo è anche f , è continua anche la composizione $x \rightarrow f(x, u(x))$ e quindi integrabile. Basta allora integrare membro a membro la (3.28) e si ottiene

$$u(x) - u_0 = \int_{x_0}^x u'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \quad \forall x \in I.$$

Viceversa, se $u \in C^0(I)$ soddisfa il Problema 3.8 soddisfa anche $u(x_0) = u_0$ ed essendo continua la composizione $x \rightarrow f(x, u(x))$ la sua funzione integrale appartiene a $C^1(I)$, quindi anche $u \in C^1(I)$ e derivando membro a membro la (3.29) si ottiene la (3.28). \square

Dalla (3.29) si deduce facilmente che il grado di regolarità della soluzione u è pari a quello di f aumentato di 1. Se è vero che f continua implica $u \in C^1$, per induzione $f \in C^k$ implica $u \in C^{k+1}$, infine $u \in C^\infty$ se $f \in C^\infty$ e u analitica se f analitica.

Per l'esistenza di soluzioni vale il seguente risultato che non stiamo a dimostrare.

Teorema 3.10 (Peano) - Se $f \in C^0(D)$ il problema di Cauchy (3.28) ammette almeno una soluzione.

Il motivo per cui nell'Esempio 3.9 vi sono più soluzioni che soddisfano lo stesso dato di Cauchy $u(x_0) = 0$ sta nel fatto che nell'intorno di 0 la f non è lipschitziana. Assumendo invece un'opportuna condizione di Lipschitz di natura locale, come la seguente, l'unicità può essere provata facilmente.

Definizione 3.11 - Una funzione $f \in C^0(D)$ è detta **localmente lipschitziana** rispetto ad u **uniformemente** in x se per ogni compatto $K \subset D$ rettangolare, del tipo $K = [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_r(u_0)$, esiste una costante $L(K) \geq 0$ tale che

$$(3.30) \quad |f(x, u) - f(x, v)| \leq L(K)|u - v| \quad \forall (x, u), (x, v) \in K.$$

Una condizione sufficiente perché valga la Definizione 3.11 è $f \in C^1(D)$. Se $L = \sup_{K \subset D} L(K) < +\infty$ allora f è lipschitziana in u su tutto D , cioè **globalmente**.

Teorema 3.12 - Se $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$, con D aperto connesso di \mathbf{R}^{n+1} , soddisfa la Definizione 3.11 il Problema 3.7 ha al più una sola soluzione $u(x)$ in un intorno di x_0 .

La dimostrazione si basa sul seguente lemma.

Lemma 3.13 (di Gronwall) - Siano $w, \psi : I \rightarrow [0, +\infty[$ due funzioni continue, $c \geq 0$ e $x_0 \in I$ tali che

$$w(x) \leq c + \int_{x_0}^x \psi(t)w(t) dt \quad \forall x \in I, x \geq x_0.$$

Allora

$$w(x) \leq ce^{\int_{x_0}^x \psi(t) dt} \quad \forall x \in I, x \geq x_0.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $c > 0$ e definiamo la funzione non negativa

$$W(x) = \int_{x_0}^x \psi(t)w(t) dt \quad \forall x \geq x_0.$$

Poiché

$$W'(x) = \psi(x)w(x) \leq \psi(x)(c + W(x)) \quad \forall x \geq x_0,$$

dividendo per $c + W$ e integrando si ottiene

$$\log(c + W(x)) \leq \log c + \int_{x_0}^x \psi(t) dt \quad \forall x \geq x_0,$$

da cui segue

$$w(x) \leq c + W(x) \leq ce^{\int_{x_0}^x \psi(t) dt} \quad \forall x \geq x_0$$

che è la tesi.

Se $c = 0$ possiamo affermare che per ogni $c > 0$

$$w(x) \leq \int_{x_0}^x \psi(t)w(t) dt < c + \int_{x_0}^x \psi(t)w(t) dt \quad \forall x \geq x_0,$$

quindi, sempre per ogni $c > 0$, si ha

$$w(x) \leq ce^{\int_{x_0}^x \psi(t) dt} \quad \forall x \geq x_0,$$

ma per l'arbitrarietà di c la $w(x)$ deve essere identicamente nulla. \square

Dimostrazione del Teorema 3.12. Se u e v sono soluzioni della (3.29) su $[x_0 - a, x_0 + a]$ con lo stesso dato di Cauchy in x_0 e a valori in $\bar{B}_r(u_0)$ allora la funzione $w = |u - v|$ soddisfa

$$\begin{aligned} w(x) &= \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) - f(t, v(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt \\ &\leq L(K) \int_{x_0}^x |u(t) - v(t)| dt = L(K) \int_{x_0}^x w(t) dt. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall $w(x) = 0$ per ogni $x \geq x_0$. \square

3.7 Sistemi lineari a coefficienti costanti

Nel § 3.3 abbiamo stabilito l'unicità della soluzione del Problema di Cauchy per un'equazione lineare del I ordine mediante una verifica diretta. Non sembra però così ovvio poter estendere quel ragionamento ad un sistema di equazioni lineari del I ordine (cui si può ridurre anche un'equazione lineare di ordine qualunque come si è già detto). Ma il Teorema 3.12 che abbiamo appena dimostrato si applica molto bene al caso lineare per $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$

$$\begin{cases} u' + A(x)u = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $f(x) = (f_i(x))$, $A(x) = (a_{ij}(x))$, $ij = 1, \dots, n$. Se f e A sono definite e continue su un intervallo I (supponiamolo aperto per comprendere il caso in cui queste funzioni non siano limitate) allora per ogni $\alpha, \beta \in I$ si ha

$$|f(x) - A(x)u - (f(x) - A(x)v)| = |A(x)(u - v)| \leq L(\alpha, \beta)|u - v|$$

dove $L(\alpha, \beta) = \max_{i,j} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |a_{ij}(x)|$. La condizione di Lipschitz (3.30) è quindi verificata su ogni striscia $[\alpha, \beta] \times \mathbf{R}^n$ con $\alpha, \beta \in I$ e a maggior ragione su ogni compatto di $I \times \mathbf{R}^n$.

In più possiamo affermare che ogni soluzione del sistema è definita su tutto I . Questo lo si deve al fatto che il caso lineare rientra in quello più generale di una $f(x, u)$ definita su una striscia $I \times \mathbf{R}^n$ che soddisfa la condizione

$$|f(x, u)| \leq k_1|u| + k_2$$

per opportune costanti $k_1, k_2 \geq 0$ su ogni insieme del tipo $[\alpha, \beta] \times \mathbf{R}^n$ strettamente contenuto. In quest'ambito si dimostra che le soluzioni locali si prolungano fino a tutto I .

Per determinare una soluzione particolare possiamo applicare anche adesso il metodo della variazione delle costanti. Ma per l'omogenea, a differenza delle semplici

equazioni, i sistemi lineari che ammettono una formula generale di rappresentazione delle soluzioni sono quelli a coefficienti costanti, del resto non può che essere così perché altrimenti potremmo risolvere in modo esplicito anche le equazioni lineari di ordine qualunque.

Consideriamo il sistema omogeneo

$$(3.31) \quad u' = Au$$

con A matrice costante. Aspettandoci funzioni esponenziali come soluzioni, inseriamo nel sistema (3.31) la funzione vettoriale $u(x) = \xi e^{\lambda x}$ dove $\xi \in \mathbf{R}^n$. Si ottiene

$$A\xi = \lambda\xi.$$

La (3.31) è così ricondotta ad un problema di autovalori e autovettori.

I punti di equilibrio sono gli elementi del nucleo di A che nel caso $\det A \neq 0$ contiene solo 0, ricordiamo che sono anche tutti e soli i valori delle soluzioni stazionarie. Daremo qualche cenno sullo studio della loro stabilità.

Autovalori distinti - Abbiamo in questo caso n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tutti diversi cui corrispondono, com'è noto dall'Algebra Lineare, n autovettori indipendenti ξ_1, \dots, ξ_n . Le funzioni vettoriali

$$(3.32) \quad \xi_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, \xi_n e^{\lambda_n x}$$

formano un sistema fondamentale di soluzioni e l'integrale generale è esprimibile come loro combinazione lineare

$$u(x) = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k e^{\lambda_k x}.$$

Che le (3.32) siano un sistema fondamentale di soluzioni lo si vede dal carattere non singolare della *matrice wronskiana* per i sistemi

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} \xi_{11} e^{\lambda_1 x} & \xi_{21} e^{\lambda_2 x} & \dots & \xi_{n1} e^{\lambda_n x} \\ \xi_{12} e^{\lambda_1 x} & \xi_{22} e^{\lambda_2 x} & \dots & \xi_{n2} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{1n} e^{\lambda_1 x} & \xi_{2n} e^{\lambda_2 x} & \dots & \xi_{nn} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

che ha per colonne le componenti dei vettori $\xi_k e^{\lambda_k x}$. Infatti il suo determinante

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

per l'indipendenza di questi vettori.

Autovalori non necessariamente semplici - Questo è il caso più generale, il procedimento che usiamo non coinvolge direttamente gli autovettori di A (che tra l'altro non è neanche detto che formino una base di \mathbf{R}^n) e può essere applicato anche al caso precedente. Da quanto abbiamo detto sulle equazioni di ordine n possiamo indovinare, ma anche dimostrare, che se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $k \leq n$, sono gli autovalori di A con rispettive molteplicità m_1, \dots, m_k , $m_1 + \dots + m_k = n$, l'integrale generale assume la forma

$$(3.33) \quad u(x) = \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{m_h} \mathbf{c}_{ih} x^{i-1} e^{\lambda_h x}.$$

Per sostituzione diretta di questa rappresentazione nel sistema si trovano delle relazioni tra i coefficienti c_{ih} che lasciano indeterminate n costanti, come ci si aspetta del resto, visto che queste vanno determinate in base ai dati iniziali.

Facciamo ora un paio di esempi, uno con autovalori distinti, e quindi in presenza di una base di autovettori, e uno in cui un autovalore è doppio con un numero di autovettori minore della dimensione dello spazio quindi con A non diagonalizzabile. A tal proposito ricordiamo che se A è simmetrica [antisimmetrica], più in generale hermitiana [antihermitiana], allora è diagonalizzabile anche se gli autovalori reali [immaginari] non sono semplici e ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali.

Esempi

3.18 Si consideri il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = 2x + y \\ z' = x + z. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

ammette come autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$. I relativi autovettori sono nell'ordine

$$\xi_1 = (-2, 2, 1), \quad \xi_2 = (0, -2, 1), \quad \xi_3 = (2, 2, 1).$$

Allora l'integrale generale del sistema è

$$\begin{cases} x(t) = -2c_1e^{-t} + 2c_3e^{3t} \\ y(t) = 2c_1e^{-t} - 2c_2e^t + 2c_3e^{3t} \\ z(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3e^{3t}. \end{cases}$$

3.19 Integriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = z \\ z' = -x - y + 3z. \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. I corrispondenti autovettori sono solo due: $\xi_1 = (1, -1, 0)$ e $\xi_2 = (1, 1, 2)$. Allora cerchiamo l'integrale generale $u = (x, y, z)$ della forma

$$u(t) = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2e^{2t} + \mathbf{c}_3te^{2t}$$

dove i \mathbf{c}_h sono vettori costanti opportuni. Per sostituzione nell'equazione si ha

$$u'(t) = 2\mathbf{c}_2e^{2t} + \mathbf{c}_3e^{2t}(1 + 2t) = Au(t) = A\mathbf{c}_1 + e^{2t}A\mathbf{c}_2 + te^{2t}A\mathbf{c}_3.$$

Per l'indipendenza lineare delle tre funzioni 1 , e^{2t} e te^{2t} possiamo scegliere $\mathbf{c}_1 = k_1\xi_1$, $\mathbf{c}_3 = k_3\xi_2$ essendo $A\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_3$ e infine, dovendo essere $A\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3$, si ottiene $\mathbf{c}_2 = k_2(1, 1, 2) + k_3(-1, 0, 1)$. Ne deriva l'integrale generale

$$\begin{cases} x(t) = k_1 + (k_2 - k_3)e^{2t} + k_3te^{2t} \\ y(t) = -k_1 + k_2e^{2t} + k_3te^{2t} \\ z(t) = (2k_2 + k_3)e^{2t} + 2k_3te^{2t}. \end{cases}$$

Il caso di autovalori distinti comprende la possibilità che siano complessi (a due a due coniugati se i coefficienti sono reali) e le relative funzioni esponenziali presenti nelle soluzioni sono esprimibili in termini delle funzioni trigonometriche.

Dalla formula di rappresentazione (3.33) appare evidente che

- (a) tutte le soluzioni tendono a 0, l'unico punto di equilibrio, per $t \rightarrow +\infty$ se e solo se $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- (b) le soluzioni evolvono rimanendo nelle vicinanze di 0, l'unico punto di equilibrio, se e solo se $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e l'autospazio relativo ad ogni autovalore con parte reale nulla ha dimensione pari alla molteplicità;
- (c) in tutti gli altri casi vi sono soluzioni che definitivamente escono da qualsiasi intorno di 0.

Vediamo un esempio che riguarda il caso (b) di un solo autovalore nullo (doppio) e un solo autovettore. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

ammette come soluzioni con dato iniziale (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = x_0 t + y_0, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Gli andamenti possibili qui elencati si possono spiegare con la teoria della stabilità dell'equilibrio. Ricordiamo che un punto $\bar{u} \in D$, aperto connesso di \mathbf{R}^n , del sistema dinamico

$$u' = f(t, u),$$

con $f : I \times D \rightarrow \mathbf{R}^n$, è di *equilibrio* se $f(t, \bar{u}) = 0$ per ogni $t \in I$. Ripetiamo che \bar{u} è di equilibrio se e solo se la funzione costante $u(t) = \bar{u}$ per ogni $t \in I$ è soluzione.

Definizione 3.14 - Il punto di equilibrio \bar{u} viene detto **stabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|u_0 - \bar{u}| < \delta$ allora $|u(t) - \bar{u}| < \varepsilon$, essendo $u(t)$ la soluzione del Problema di Cauchy con dato iniziale u_0 . Se in più $u(t) \rightarrow \bar{u}$ per $t \rightarrow +\infty$ allora viene detto **asintoticamente stabile**.

Studiamo la stabilità dei punti di equilibrio in base al carattere degli autovalori nel caso lineare. Ci limitiamo al caso piano che è interessante di per sé, ma anche significativo per farsi un'idea di come si potrebbero comportare le soluzioni in dimensione maggiore.

Posto $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, il sistema (3.31) scritto in componenti scalari ha la forma

$$(3.34) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$$

Vediamo cosa succede nei vari casi e teniamo presente che 0 è l'unico punto di equilibrio se e solo se non vi sono autovalori nulli.

(1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ - Ad essi corrispondono due autovettori $\mathbf{h}_1 = (h_{11}, h_{12})$ e $\mathbf{h}_2 = (h_{21}, h_{22})$ indipendenti. L'integrale generale è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 h_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 h_{21} e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = c_1 h_{12} e^{\lambda_1 t} + c_2 h_{22} e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

(1A) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 - 0$ è asintoticamente stabile perché tutte le soluzioni tendono a 0. Ogni soluzione con dato iniziale su una delle quattro semirette $k\mathbf{h}_i$ percorre la semiretta andando verso 0.

La struttura delle soluzioni è quella della prima riga nella (??)

3.8 Equazioni speciali

Capitolo 4

Calcolo differenziale

4.1 Derivate direzionali e derivate parziali

Consideriamo un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ed una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Volendo definire la derivata di f in un punto $x \in \Omega$, ciò che il calcolo differenziale in una variabile ci suggerisce è di considerare una retta orientata di versore $v \in \mathbf{R}^n$, passante per x , e il limite del rapporto incrementale di f in x lungo tale retta. La derivata viene così a dipendere non soltanto da x , ma anche da v e quindi verrà chiamata *derivata direzionale*.

La retta è il sostegno della curva $t \rightarrow \gamma(t) = x + tv$, con $t \in \mathbf{R}$, mentre l'applicazione $t \rightarrow f \circ \gamma(t) = f(x + tv)$, con $|t| < \delta$ per un certo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, è la restrizione di f , in termini del parametro t , ad un segmento di centro x contenuto in Ω .

Definizione 4.1 - Diciamo che f è **derivabile rispetto al vettore v nel punto x** se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

il quale prende il nome di **derivata di f rispetto a v in x** . Se v è un versore si chiama **derivata direzionale**.

La derivata rispetto a v di f in x non è altro che la derivata in 0 della funzione di una variabile $t \rightarrow f(x + tv)$

Ovviamente, se f è derivabile rispetto a v in x lo è anche rispetto ad ogni vettore ad esso parallelo, cioè del tipo $u = \lambda v$ con $\lambda \neq 0$, e

$$\frac{\partial f(x)}{\partial u} = \lambda \frac{\partial f(x)}{\partial v},$$

quindi non è restrittivo fare sempre riferimento alla derivata direzionale.

Le derivate rispetto ai versori degli assi e_i sono casi particolari di derivate direzionali e vengono dette **derivate parziali**. Poiché

$$x + te_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

derivare rispetto a e_i significa derivare la funzione di una sola variabile

$$x_i \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

considerando costanti le altre variabili, quindi al posto di $\partial f / \partial e_i$ si preferisce usare le notazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad D_i f, \quad f_{x_i}.$$

Si chiama *gradiente* il vettore che ha come componenti le derivate parziali

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Si usa per il gradiente anche la notazione Df . Se vogliamo fare riferimento più esplicito alla base si scrive

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n,$$

specialmente nei casi in cui si pensa di dover effettuare dei cambiamenti di base. Se f ammette derivate direzionali o parziali in ogni punto $x \in \Omega$ allora diciamo che f ammette derivate direzionali o parziali in Ω .

Esempi

4.1 Ogni funzione costante ha derivate parziali e direzionali nulle ovunque. Ogni funzione lineare $f(x) = a \cdot x$, o lineare affine $f(x) = a \cdot x + b$, ha derivata direzionale ovunque e

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = a \cdot v.$$

4.2 La funzione $f(x) = |x|^2$, $x \in \mathbf{R}^n$, che ha per grafico un paraboloide di rotazione col vertice in 0, è derivabile in ogni punto rispetto ad ogni direzione e

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = 2x \cdot v.$$

Basta osservare che

$$\frac{|x + tv|^2 - |x|^2}{t} = 2x \cdot v + t|v|^2.$$

In particolare $D_i f(x) = 2x_i$ e $Df(x) = 2x$.

4.3 La funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}^n$, che ha per grafico un cono col vertice in 0, è derivabile per ogni $x \neq 0$ rispetto ad ogni direzione e

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \frac{x}{|x|} \cdot v,$$

ma non è derivabile in 0 rispetto a nessuna direzione.

Infatti si ha anche

$$\frac{\partial |x|^2}{\partial v} = 2|x| \frac{\partial |x|}{\partial v},$$

da cui, per confronto coll'esempio precedente, segue che

$$2|x| \frac{\partial |x|}{\partial v} = 2x \cdot v.$$

In particolare $D_i f(x) = x_i/|x|$ e $Df(x) = \text{vers } x$ per ogni $x \neq 0$.

È immediato estendere alla derivata direzionale alcuni teoremi algebrici che già conosciamo per le derivate ordinarie. Per esempio

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial v} = \lambda \frac{\partial f}{\partial v} + \mu \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial v} = f \frac{\partial g}{\partial v} + g \frac{\partial f}{\partial v}$$

e per le funzioni composte $g \circ f$, dove $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è derivabile, si ha

$$(4.1) \quad \frac{\partial g(f(x))}{\partial v} = g'(f(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial v},$$

che si ottiene dividendo per t la relazione

$$\begin{aligned} g(f(x+tv)) &= g(f(x)) + g'(f(x))(f(x+tv) - f(x)) + o(f(x+tv) - f(x)) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))t \frac{\partial f(x)}{\partial v} + o(t) \end{aligned}$$

e passando poi al limite per $t \rightarrow 0$. Usando la (4.1) si possono calcolare direttamente le derivate parziali negli Esempi 4.2 e 4.3, ad esempio

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|}.$$

Esercizio 4.1 *Nel caso di un'interazione lineare elastica di costante k , agente tra due punti materiali P_1 e P_2 che occupano nello spazio le posizioni $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, le due forze, quella che P_2 esercita su P_1 e quella che P_1 esercita su P_2 , sono rispettivamente*

$$F_x(x, y) = k(y - x) \quad e \quad F_y(x, y) = k(x - y).$$

Riconoscere il **potenziale** di questa sollecitazione nella funzione di sei variabili

$$U(x, y) = -\frac{k}{2}|x - y|^2$$

osservando che

$$\nabla_x U = F_x \quad e \quad \nabla_y U = F_y.$$

L'**energia potenziale** della sollecitazione è invece la funzione $V = -U$, per cui $F_x = -\nabla_x V$ e $F_y = -\nabla_y V$.

Esercizio 4.2 *Due punti materiali P_1 e P_2 di masse rispettive m_1 e m_2 occupano nello spazio le posizioni $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Il potenziale della sollecitazione gravitazionale è la funzione di sei variabili $U(x, y) = Gm_1m_2/|x - y|$. Verificare che*

$$\nabla_x U = \frac{Gm_1m_2}{|x - y|^3}(y - x) \quad e \quad \nabla_y U = \frac{Gm_1m_2}{|x - y|^3}(x - y)$$

e riconoscere che queste sono la forza che P_2 esercita su P_1 e quella che P_1 esercita su P_2 .

Più in generale, considerazioni legate all'invarianza delle leggi fisiche in Meccanica Classica comportano, per l'interazione tra due punti, una struttura della forma

$$F_x(x, y) = \varphi(|x - y|)(y - x) \quad e \quad F_y(x, y) = \varphi(|x - y|)(x - y),$$

in cui cioè l'azione reciproca si traduce in una coppia di forze a braccio nullo, parallele alla retta che li congiunge. Si vede facilmente che una sollecitazione di questo tipo ammette come potenziale U una funzione della distanza $r = |x - y|$ che sia primitiva della funzione $-r\varphi(r)$, $r > 0$.

4.2 Funzioni differenziabili

A differenza di quanto avviene per le funzioni di una variabile, l'esistenza di tutte le derivate direzionali non garantisce né la continuità della funzione, né l'esistenza del piano tangente al grafico (l'analogo della retta tangente in una variabile), ma

rivela soltanto l'esistenza in ogni direzione della retta tangente alla superficie che rappresenta il grafico di f . Ad esempio la funzione

$$(4.2) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è discontinua in $(0, 0)$, infatti se si passa al limite lungo la retta $y = x$ e lungo la parabola $y = x^2$ si ottengono i risultati tra loro diversi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 + x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Tuttavia esistono in $(0, 0)$ tutte le derivate direzionali. Per $v = (v_1, v_2)$, se $v_2 \neq 0$ si ha

$$\frac{f(tv)}{t} = \frac{t^2 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \rightarrow \frac{v_1^2}{v_2}$$

per $t \rightarrow 0$, e se $v_2 = 0$

$$\frac{f(t, 0)}{t} = 0 \quad \forall t \neq 0,$$

quindi anche la derivata parziale in $(0, 0)$ rispetto a x esiste ed è nulla.

L'esistenza del piano tangente è invece dovuta alla differenziabilità, una condizione che per le funzioni di più variabili è più restrittiva dell'esistenza delle derivate direzionali.

Fissato un punto $x_0 \in \Omega$, ad ogni applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ corrisponde la funzione $x \rightarrow f(x_0) + L(x - x_0)$ che ha per grafico un piano passante per il punto $(x_0, f(x_0))$. Ovviamente f è continua in x_0 se e solo se la quantità

$$f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)$$

è infinitesima per $x \rightarrow x_0$.

Definizione 4.2 - Diciamo che f è **differenziabile in** x_0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$(4.3) \quad f(x) - f(x_0) - L(x - x_0) = o(x - x_0),$$

dove $o(x - x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $|x - x_0|$ per $x \rightarrow x_0$. L'applicazione L si chiama **differenziale** di f in x_0 e si indica con df_{x_0} o con $df(x_0)$.

Se f è differenziabile in x_0 il piano tangente al grafico di f nel punto x_0 è il grafico della funzione $\varphi(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0)$.

In un generico punto $x \in \Omega$ la condizione (4.3) può essere scritta in modo equivalente nella forma

$$(4.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0,$$

dove evidentemente $L(h) = df_x(h)$ per ogni $h \in \mathbf{R}^n$. Se f è differenziabile in ogni punto di Ω allora diciamo che è differenziabile in Ω .

Esempi

4.4 Ogni funzione costante ha come differenziale l'applicazione lineare identicamente nulla.

4.5 Ogni funzione del tipo $f(x) = a \cdot x + b$ è differenziabile e $df_x(h) = a \cdot h$, che è come dire che ogni applicazione lineare ha come differenziale se stessa.

4.6 La funzione $f(x) = |x|^2$ è differenziabile e il suo differenziale è $df_x(h) = 2x \cdot h$.

4.7 La funzione $f(x) = |x|$ è differenziabile per ogni $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ e il suo differenziale è $df_x(h) = \text{vers } x \cdot h$.

Esercizio 4.3 Dimostrare che ogni forma quadratica $f(x) = Ax \cdot x$ su \mathbf{R}^n ha per gradiente $\nabla f(x) = 2Ax$, è differenziabile e $df_x(h) = 2Ax \cdot h$.

Esercizio 4.4 Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $f(x) = |x|^\alpha$ su $\mathbf{R}^n - \{0\}$ ha per gradiente $\nabla f(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x$, è differenziabile e $df_x(h) = \alpha|x|^{\alpha-2}x \cdot h$. In più, f è definita e continua anche in 0 per $\alpha > 0$, ma è differenziabile per $\alpha > 1$.

L'osservazione che precede la Definizione 4.2 mostra che una funzione differenziabile è necessariamente continua, ne segue che la (4.2) costituisce un primo esempio di funzione con tutte le derivate direzionali ma non differenziabile (in quanto non continua). Mostriamo allora un esempio di funzione continua e derivabile rispetto ad ogni direzione ma non differenziabile. La funzione

$$(4.5) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$ perché $|f(x, y)| \leq |y|$, inoltre ammette in $(0, 0)$ le derivate direzionali

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial v} = v_1^2 v_2 \quad \forall v \in \mathbf{R}^n : |v| = 1.$$

Perché non è differenziabile? Il motivo è dovuto al seguente risultato, in cui tra l'altro si caratterizza il vettore che rappresenta il differenziale.

Teorema 4.3 - Se $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è differenziabile nel punto $x \in \Omega$ allora ammette in x la derivata rispetto ad ogni vettore e

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = df_x(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^n,$$

in particolare $v \rightarrow \partial f / \partial v$ è lineare. Inoltre

$$df_x(v) = \nabla f(x) \cdot v \quad \forall v \in \mathbf{R}^n.$$

Dimostrazione. Applicando la (4.3) ai punti x e $x + tv$, si ottiene

$$f(x + tv) = f(x) + df_x(tv) + o(|tv|) = f(x) + tdf_x(v) + o(t),$$

da cui

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = df_x(v).$$

Dunque esiste la derivata in x rispetto ad ogni vettore v e coincide col differenziale in x calcolato in v . Riguardo alla sua rappresentazione si ha

$$df_x(v) = df_x \left(\sum_{i=1}^n v_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n v_i df_x(e_i) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \nabla f(x) \cdot v.$$

□

Questo risultato, considerato insieme alla funzione (4.5), fa sorgere la domanda: se f è continua nel punto x e l'applicazione $v \rightarrow \partial f(x) / \partial v$ è lineare possiamo concludere che f è differenziabile in x ? La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$ e ammette derivate direzionali tutte nulle, quindi $v \rightarrow \partial f(0, 0)/\partial v$ è l'applicazione lineare identicamente nulla, però f non è differenziabile perché essa stessa dovrebbe coincidere con un $o(\sqrt{x^2 + y^2})$, ma $f(x, x^2) = x$.

Il gradiente è il vettore che rappresenta il differenziale come applicazione lineare, quindi la funzione che ha per grafico il piano tangente è $\varphi(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$. Il significato geometrico del gradiente è evidente: per ogni versore v si ha

$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \nabla f(x) \cdot v \leq |\nabla f(x)|$$

e se $\nabla f(x) \neq 0$ l'uguaglianza viene raggiunta solo quando $v = \text{vers } \nabla f(x)$. La massima pendenza del grafico nel punto x è dunque quella indicata dal vettore gradiente e vale proprio $|\nabla f(x)|$, la pendenza nulla si ha invece nelle direzioni ad esso ortogonali. Le curve di massima pendenza si possono pertanto ricavare risolvendo l'equazione differenziale per le linee di un campo vettoriale

$$x' = \nabla f(x), \quad x \in \Omega,$$

scritta nel caso di un gradiente.

Immaginiamo la superficie di una montagna come il grafico di una funzione di due variabili. Nelle carte geografiche compaiono talvolta le *isoipse*, le cuve di livello, per dare un'idea della forma della montagna. In effetti questo modo di rappresentarla è abbastanza efficace perché dove le isoipse sono più fitte il gradiente, ad esse ortogonale, ha modulo maggiore e maggiore è anche la pendenza della montagna.

La legge di Fourier del calore stabilisce, in ogni punto x di un conduttore termico, una relazione lineare tra il flusso di calore, il vettore $q(x)$, e il gradiente della temperatura $\nabla \vartheta$ in tale punto, per cui

$$q(x) = -K(x)\nabla \vartheta(x)$$

dove $K(x)$ è la matrice definita positiva che esprime la conducibilità termica del mezzo in x . Se il conduttore è isotropo, cioè $K(x) = k(x)I$ con $k > 0$ scalare, il flusso avviene lungo le linee di massima pendenza della temperatura, dalle zone più calde verso quelle più fredde a causa del segno “-”.

Esercizio 4.5 Una lamina piana omogenea (k costante) e isotropa viene tenuta a temperatura $\vartheta(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Trovare le linee di flusso del calore.

È tradizione ormai consolidata indicare il differenziale con la seguente notazione

$$(4.6) \quad df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i,$$

dovuta al fatto che in origine, in un tempo in cui gli infinitesimi non erano ancora molto chiari, era motivata dall'esigenza di esprimere la “variazione infinitesima” di una funzione in termini delle “variazioni infinitesime” delle sue variabili. In effetti la notazione esprime quest'idea in modo estremamente efficace, tanto che in Fisica è utile interpretarla proprio così. Nel caso dell'integrale curvilineo che esprime il lavoro di un campo vettoriale lungo un cammino, abbiamo visto che l'integrando è del tipo

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i = F(x) \cdot dx$$

e può essere interpretato come il “lavoro elementare” che F compie in corrispondenza di uno “spostamento infinitesimo”. Di questa la (4.6) è un caso particolare.

Se vogliamo dare una spiegazione rigorosa della notazione usata nella (4.6) e, più in generale, nella (4.7), dobbiamo interpretare i dx_i come i differenziali delle proiezioni

canoniche $\pi_i(x) = x_i$ che, essendo lineari, soddisfano la proprietà $d\pi_i = \pi_i$. Più precisamente, affermare che

$$df(x)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \pi_i(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^n,$$

equivale ad affermare che

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \pi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d\pi_i.$$

Se adesso, con abuso di notazione, si confonde una funzione con i valori che essa assume, nel caso presente π_i con x_i , allora è altrettanto lecito scrivere dx_i al posto di $d\pi_i$. Si perviene così alla notazione (4.6).

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per la differenziabilità con l'ipotesi di continuità delle derivate parziali. Va tenuto presente che in certi casi non lo possiamo usare perché esistono funzioni differenziabili con derivate parziali discontinue. Conviene dapprima calcolare a parte le derivate parziali nel punto in questione, diciamo x_0 , come limiti dei rapporti incrementali (che tra l'altro è più facile che calcolarle come limiti delle derivate) e poi controllare che sia soddisfatta la definizione di differenziabilità sostituendo $L(x - x_0)$ con $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Teorema 4.4 (del differenziale totale) - Se $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ammette le derivate parziali in un intorno U del punto $x_0 \in \Omega$ ed esse sono continue in x_0 allora f è differenziabile in x_0 .

Dimostrazione. Basta dimostrarlo per $n = 2$ perché il ragionamento che faremo, in cui si considera la funzione lungo rette parallele agli assi, non cambia nel passaggio a n qualsiasi, comporta solo qualche complicazione nella scrittura. La tesi è

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Scritta la variazione della funzione nel seguente modo

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y) - f(x_0,y)] + [f(x_0,y) - f(x_0,y_0)],$$

applichiamo alle funzioni di una variabile $f(\cdot, y)$ e $f(x_0, \cdot)$ il teorema del valor medio

$$f(x,y) - f(x_0,y) = f_x(\xi, y)(x-x_0) \quad \text{e} \quad f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = f_y(x_0, \eta)(y-y_0)$$

per opportuni $\xi \in [x_0, x]$ e $\eta \in [y_0, y]$ (o con gli estremi scambiati se $x < x_0$ o $y < y_0$). Tenendo presente che ξ dipende da (x, y) e η dipende da x , si ha

$$\begin{aligned} & |f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)| \\ (4.8) \quad & = |(f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0))(x-x_0) + (f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0))(y-y_0)| \\ & \leq \sigma(x,y) \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \end{aligned}$$

dove

$$\sigma(x,y) = \sqrt{(f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0))^2 + (f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0))^2}$$

è infinitesima con la distanza di (x, y) da (x_0, y_0) per la continuità delle derivate parziali. Dividendo la (4.8) per questa distanza si ottiene la tesi. \square

Le funzioni *differenziabili con continuità* sono quelle per cui il differenziale come funzione di x , $x \rightarrow df(x)$, è continuo, il che significa che è continuo il campo vettoriale $x \rightarrow \nabla f(x)$ che lo rappresenta. Introdotto allora lo spazio

$$C^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid \exists df(x) \forall x \in \Omega \text{ e } x \rightarrow df(x) \text{ è continua in } \Omega\},$$

esso rimane caratterizzato come lo spazio delle funzioni che ammettono derivate parziali continue in Ω .

Sulle proprietà algebriche del differenziale non c'è molto da dire; senza entrare nei dettagli si dimostrano facilmente tutti i risultati che ci aspettiamo, ad esempio

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(fg) = gdf + fdg$$

che in termini dei relativi gradienti si possono scrivere nella forma

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

Vale la pena invece spendere qualche parola in più sul prodotto di composizione. Per l'interesse che ha nelle applicazioni, trattiamo dapprima il caso semplice della composizione di una funzione con una curva.

Proposizione 4.5 - Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione differenziabile nel punto $x \in \Omega$ e $\gamma : I \rightarrow \Omega$ derivabile per un certo $t \in I$ tale che $\gamma(t) = x$. Allora la $f \circ \gamma$ è derivabile in t e

$$(4.9) \quad \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Dimostrazione. Basta applicare la definizione di differenziabilità

$$\begin{aligned} f(\gamma(t + \tau)) - f(\gamma(t)) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot (\gamma(t + \tau) - \gamma(t)) + o(\gamma(t + \tau) - \gamma(t)) \\ &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t)\tau + o(\tau)) + o(\gamma'(t)\tau) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\tau + o(\tau). \end{aligned}$$

Dividendo per τ e passando al limite si ottiene la tesi. □

Vediamo adesso alcune interessanti applicazioni di questo risultato.

Derivata convettiva - Di una certa importanza è il caso di una funzione $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Vogliamo calcolare la derivata (totale) rispetto a t della funzione $t \rightarrow f(\gamma(t), t)$, detta *derivata convettiva*, da non confondersi con la derivata parziale rispetto a t che è la derivata rispetto all'ultima variabile. A questo scopo si usa la Proposizione 4.5 applicata alla curva $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), t)$ a valori in $\Omega \times \mathbf{R}$. Si ottiene così

$$\frac{d}{dt}f(\tilde{\gamma}(t)) = \nabla_x f(\gamma(t), t) \cdot \gamma'(t) + \frac{\partial}{\partial t}f(\gamma(t), t).$$

Ad esempio la velocità di un punto $x(q, t)$ vincolato ad una guida in movimento vale

$$v(t) = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

durante un particolare moto $q(t)$. Il primo termine è la *velocità relativa*, dovuta al moto del punto rispetto alla guida, il secondo è la *velocità di trascinamento*, il contributo dato dal moto della guida che porta con sé il punto.

Per fare un altro esempio, è ragionevole supporre che il consumo di carburante di un veicolo, che si trova nella posizione x con velocità \dot{x} , sia rappresentato da una funzione $f(x, \dot{x}, t)$. La dipendenza dalla posizione è dovuta per esempio al fatto che il consumo è maggiore in salita che in discesa o in piano; comunemente si assume una dipendenza quadratica, comunque non lineare, del consumo dalla velocità; infine si spiega anche la dipendenza esplicita dal tempo: di giorno per esempio, quando fa più caldo, si consuma più benzina che di notte. Durante un viaggio $x(t)$ il tasso temporale istantaneo di consumo di benzina è dato da

$$\frac{d}{dt}f(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ortogonalità tra il gradiente e le superfici di livello - Ad ogni $c \in \mathbf{R}$ corrisponde il luogo geometrico

$$\Gamma_c = \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$$

che prende il nome di *insieme di livello* di f . A seconda della f , al variare di c possiamo ottenere diversi tipi di insieme, compreso \emptyset se $c < \inf f$ o se $c > \sup f$ quando f è limitata inferiormente o superiormente. Supponiamo che un certo Γ_c non sia vuoto e che f sia abbastanza regolare. Come vedremo più avanti, trattando il teorema delle funzioni implicite, se $\nabla f \neq 0$ su Γ_c tale insieme è una superficie $n - 1$ dimensionale, una curva di livello se f dipende da due variabili. Se f è convessa le superfici, o le curve, di livello sono chiuse e racchiudono regioni convesse. Utilizzando il Teorema 4.11 si verifica immediatamente che ∇f in un punto $x \in \Gamma_c$ è ortogonale a Γ_c , nel senso che è ortogonale ad ogni curva $\gamma \subset \Gamma_c$ e passante per x . Infatti lungo ognuna di esse si ha $f(\gamma(t)) = c$ per ogni $t \in I$, quindi

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0,$$

dove $\gamma'(t)$ è tangente a Γ_c . La superficie di un conduttore carico, sulla quale si distribuiscono le cariche in eccesso in condizioni di equilibrio elettrostatico, è equipotenziale per il campo elettrico da esse generato, sappiamo infatti che le linee di forza (le linee vettoriali del gradiente del potenziale) la lasciano ortogonalmente.

Esercizio 4.6 - Quali sono in $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ le soluzioni dell'equazione alle derivate parziali

$$x \times Du = 0 ?$$

In dimensione diversa non c'è il prodotto vettoriale e l'equazione va scritta come condizione di parallelismo tra Du e x , cioè $Du = \lambda x$.

Funzioni con gradiente nullo - Sappiamo già che se f è costante allora è differenziabile e $df = 0$ su Ω , o, in termini del gradiente, $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$. Possiamo invertire l'implicazione? Certamente no se Ω è *sconnesso*, cioè composto di più parti, basta scegliere una funzione che assume valori costanti, ma diversi tra loro, sulle varie *componenti connesse*. Ma che cosa significa *insieme sconnesso*, o *connesso* cioè, intuitivamente, *fatto di un unico pezzo*? La definizione rigorosa è di natura topologica e non altrettanto efficace quanto l'idea intuitiva, d'altra parte possiamo anche farne a meno per i nostri scopi. Ciò che invece ci serve è la seguente versione più restrittiva in cui si dice che un insieme è connesso se, contenendo due punti, contiene anche una curva che li unisce.

Definizione 4.6 - Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ viene detto **connesso per archi** se per ogni coppia di punti x e y in A esiste una funzione continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$, detta appunto **arco**, tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

I convessi, ad esempio, soddisfano questa definizione perché come curva che unisce due punti si può sempre scegliere il segmento. La proprietà di essere connesso per archi implica quella di essere connesso (che abbiamo evitato di definire), è quindi più forte, tuttavia per un insieme aperto sono equivalenti.

Teorema 4.7 - Un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi.

Un esempio di insieme connesso ma non connesso per archi è

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sin 1/x, x \neq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Ma a noi interessano principalmente proprio gli aperti, dove tra l'altro possiamo sempre scegliere come curva tra due punti, nella Definizione 4.6, un cammino regolare. Siamo adesso in grado di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.8 - *Se una funzione ha gradiente nullo su un aperto Ω connesso allora è costante.*

Dimostrazione. Scegliamo due punti qualsiasi $x, y \in \Omega$ e un cammino regolare $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

perché per ipotesi $\nabla f = 0$. Dunque $f(x) = f(y)$. □

Lavoro di un campo conservativo - Abbiamo visto, a proposito del lavoro di un campo vettoriale lungo una curva, che se il campo è puramente posizionale il lavoro non dipende dal tempo ma solo dalla curva. Adesso mostriamo che se il campo è conservativo il lavoro non dipende neanche dalla curva, ma solo dai suoi estremi. Dobbiamo dunque integrare il differenziale di una funzione lungo un cammino qualsiasi, con estremi assegnati, e verificare che il valore dell'integrale dipende solo dai valori che la funzione assume negli estremi. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ è un cammino regolare tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$, si ha

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(y) - f(x).$$

Quanto è stato detto sulle derivate e il differenziale rimane sostanzialmente invariato per le funzioni a valori vettoriali, a meno di qualche precisazione di natura formale. Per una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$, con Ω aperto in \mathbf{R}^n , tutte le definizioni (derivata direzionale, parziale, differenziale ecc.), con i risultati, le osservazioni e i commenti sulle loro proprietà, si applicano ancora, componente per componente, identiche a quelle relative alle funzioni scalari. C'è solo da osservare che $df(x)$ è un'applicazione lineare da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^m , quindi il gradiente di f che la rappresenta viene ad essere una matrice $m \times n$, la *matrice jacobiana*, dal matematico **Jacobi**. Essa verrà indicata con le stesse notazioni $\nabla f(x)$ o $Df(x)$ e naturalmente la relazione col differenziale è ancora

$$(4.10) \quad df(x)(v) = \nabla f(x)v \quad \forall v \in \mathbf{R}^n.$$

La matrice rappresentativa si ricava al solito modo

$$[\nabla f(x)]_{ij} = e_i \cdot \nabla f(x)e_j = e_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

pertanto l'operazione a secondo membro della (4.10) può essere interpretata come prodotto righe per colonne

$$df_i(x)(v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} v_j$$

se assumiamo che le righe della matrice siano i gradienti delle componenti f_i . Veniamo adesso al teorema di derivazione del prodotto di composizione nella sua forma più generale.

Teorema 4.9 - *Siano Ω un aperto di \mathbf{R}^k , $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione differenziabile nel punto $x \in \Omega$ e $f : g(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}^m$ differenziabile nel punto $y = g(x)$. Allora la funzione composta $f \circ g$ è differenziabile in x e*

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x).$$

Dimostrazione. Poiché la composizione tra funzioni lineari è equivalente al prodotto delle rispettive matrici, per dimostrare l'asserto ragioniamo in termini delle matrici rappresentative. In corrispondenza di un incremento $h \in \mathbf{R}^k$ si ha

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) - f(g(x)) &= \nabla f(g(x))(g(x+h) - g(x)) + o(g(x+h) - g(x)) \\ &= \nabla f(g(x))(\nabla g(x)h + o(h)) + o(\nabla g(x)h) = \nabla f(g(x))\nabla g(x)h + o(h). \end{aligned}$$

Allora $f \circ g$ è differenziabile in x e

$$(4.11) \quad d(f \circ g)(x)(h) = \nabla(f \circ g)(x)h = \nabla f(g(x))\nabla g(x)h = df(g(x)) \circ dg(x)(h)$$

per ogni $h \in \mathbf{R}^k$. □

In componenti il prodotto che compare nella (4.11) va scritto nella forma

$$\frac{\partial f_i(g(x))}{\partial x_h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(g(x))}{\partial y_j} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_h}$$

per ogni $i = 1, \dots, m$ e per ogni $h = 1, \dots, k$ e si calcola come prodotto righe per colonne tra matrici jacobiane.

4.3 Derivate successive e formula di Taylor

Qualora le derivate parziali di una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, con Ω aperto in \mathbf{R}^n , siano a loro volta differenziabili o derivabili nei vari sensi, diciamo che f ammette derivate seconde e ad esse ovviamente si applicano tutti i risultati finora esposti. Vi sono quindi n^2 derivate seconde

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, \dots, n$$

di cui n pure, cioè con $i = j$, e le restanti *miste*. Riguardo a queste, in generale è importante l'ordine in cui vengono calcolate, nel senso che

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

come avviene per esempio per la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Questa funzione è continua su tutto \mathbf{R}^2 perché

$$|f(x, y)| \leq \frac{\pi}{2} y^2 \quad \forall y \neq 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} f(x, y) = 0.$$

Inoltre appartiene a $C^1(\mathbf{R}^2)$ perché le derivate parziali sono nulle sulla retta $y = 0$ e per ogni $y \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{xy^2}{x^2 + y^2},$$

da cui

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| = |y| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq \pi |y| + |y| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \left(\pi + \frac{1}{2} \right) |y|,$$

pertanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Nei punti della retta $y = 0$ si ha se $x \neq 0$

$$\frac{f_x(x,y) - f_x(x,0)}{y} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x,0) = 0$$

$$\frac{f_y(x+t,0) - f_y(x,0)}{t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x,0) = 0$$

e le due derivate miste ancora coincidono, ma in $(0,0)$ mentre la $D_x(D_y f)$ è nulla, per l'altra si ha

$$\frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = 1 \quad \forall y \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = 1.$$

L'esistenza delle derivate seconde in un punto implica la continuità delle derivate prime. In particolare, se ciò avviene in un insieme, di f possiamo solo dire che sarà di classe C^1 .

Teorema 4.10 (Lemma di Schwarz) - Sia $f \in C^1(U)$ con U intorno del punto $x \in \Omega$. Se f ammette le derivate seconde miste in U e queste sono continue nel punto x allora sono uguali in x .

Conseguenza immediata di questo risultato, di cui omettiamo la dimostrazione, è che se f ha derivate seconde continue la matrice $D^2 f$ costruita con esse, detta *matrice hessiana* dal matematico **Hesse**, è simmetrica. In \mathbf{R}^2 ha 3 componenti indipendenti, f_{xx} , f_{yy} e f_{xy} , in \mathbf{R}^3 ne ha 6 indipendenti, f_{xx} , f_{yy} , f_{zz} , f_{xy} , f_{yz} e f_{xz} , in \mathbf{R}^n ne ha $(n^2 - n)/2 + n = n(n+1)/2$. Si possono dunque usare, in un caso di sufficiente regolarità, notazioni quali

$$D_{ij}^2 f, \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

dove non ha importanza l'ordine in cui si scelgono le variabili rispetto a cui derivare.

Alle derivate seconde possiamo applicare il Teorema 4.4 se le derivate prime sono derivabili a loro volta e le loro derivate sono continue. In questo caso si deduce che le derivate prime sono differenziabili con continuità pervenendo così alla definizione dello spazio $C^2(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni che ammettono le derivate seconde continue in Ω . Iterando questo ragionamento si perviene in modo simile a definire gli spazi $C^k(\Omega)$ e poi $C^\infty(\Omega)$, quello delle funzioni che ammettono le derivate di ogni ordine (necessariamente tutte continue).

Un *multiindice* è un n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di numeri naturali e la sua lunghezza è $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Posto

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \quad \text{e} \quad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

con la convenzione $D^0 f = f$, dimostriamo la seguente formula di Taylor col resto di Peano.

Teorema 4.11 - Se $f \in C^{k-1}(U)$, con U intorno di x_0 , e se ammette le derivate parziali di ordine k in x_0 , allora esiste un infinitesimo $o(x)$, per $x \rightarrow x_0$, di ordine superiore a $|x - x_0|^k$ tale che

$$(4.12) \quad f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^k \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + o(|x - x_0|^k).$$

Dimostrazione. Scriviamo la formula di Taylor centrata in $t = 0$, nella versione già studiata in una variabile, per la funzione $\psi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ con $t \in [0, 1]$

$$(4.13) \quad \psi(t) = \sum_{h=0}^k \frac{\psi^{(h)}(0)}{h!} t^h + o(t^k |x - x_0|^k).$$

Nella (4.13) sarebbe corretto scrivere $o(t^k)$, ma, essendo fissati x e x_0 , possono comparire nell'infinitesimo o come delle costanti, senza modificarne la natura. Per le derivate di ψ si ha

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \sum_{i=1}^n D_i f(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_{0i}) = \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha \\ \psi''(t) &= \sum_{j=1}^n D_j \left(\sum_{i=1}^n D_i f(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_{0i}) \right) (x_j - x_{0j}) \\ &= \sum_{ij=1}^n D_{ij} f(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha \\ &\vdots \\ \psi^{(h)}(t) &= \sum_{|\alpha|=h} D^\alpha f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha \end{aligned}$$

e così via fino ad $h = k$ e quindi per $t = 0$

$$\psi^{(h)}(0) = \sum_{|\alpha|=h} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha.$$

Ponendo adesso $t = 1$ nella (4.13) e tenendo presente che $\psi(1) = f(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \sum_{|\alpha|=h} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha + o(|x - x_0|^k) \\ &= \sum_{h=0}^k \sum_{|\alpha|=h} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + o(|x - x_0|^k) \end{aligned}$$

che è la tesi. □

Per $k = 1$ nella (4.12) si ritrova la definizione di differenziale, per $k = 2$ lo sviluppo di Taylor assume la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n D_i f(x_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n D_{ij}^2 f(x_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \\ &\quad + o(|x - x_0|^2) \\ &= f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2) \end{aligned}$$

dove la parte quadratica a secondo membro è la forma quadratica associata alla matrice hessiana $D^2 f(x_0)$. Per $k = 3$ si aggiunge il polinomio omogeneo di terzo grado associato alla matrice a 3 indici delle derivate terze, diviso per $3!$, e così via: con l'aumentare dell'ordine di derivazione aumenta l'ordine, cioè il numero di indici, della corrispondente matrice delle derivate. Di un certo interesse, ai fini dello studio dei massimi e minimi, è lo sviluppo fino al secondo ordine come vedremo nel prossimo paragrafo.

4.4 Espressione delle derivate in vari sistemi di coordinate

4.5 Massimi e minimi

In questo paragrafo illustriamo alcuni metodi per la determinazione degli estremi di una funzione di più variabili. Trattiamo dapprima il caso dei massimi e minimi liberi, in cui il dominio è un aperto, ma terremo presenti anche alcune situazioni interessanti in cui lo studio si estende fino al bordo, cogliendo tra l'altro l'occasione per presentare un primo esempio di equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine. Più avanti affronteremo anche il problema degli *estremi vincolati*, che consiste nella ricerca dei massimi e minimi per funzioni definite su insiemi chiusi, curve o superfici.

Definizione 4.12 - Un punto $x_0 \in \Omega$ è di **minimo relativo** [**massimo relativo**] per la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ se esiste un intorno $U \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad [f(x) \leq f(x_0)] \quad \forall x \in U.$$

Se le precedenti disuguaglianze valgono in senso stretto in U per $x \neq x_0$ allora diciamo che x_0 è di massimo [**minimo**] relativo **isolato**.

Definizione 4.13 - Diciamo che un punto $x_0 \in \Omega$ è **stazionario** per la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ se f è differenziabile in x_0 e $df(x_0) = 0$.

Teorema 4.14 - Se $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ e ammette x_0 come punto di massimo o di minimo relativo allora x_0 è stazionario per f .

Dimostrazione. Basta osservare che, per le ipotesi fatte, per ogni $v \in \mathbf{R}^n$ la funzione di una variabile $t \rightarrow \psi(t) = f(x_0 + tv)$, definita in un intorno di 0, è differenziabile in 0 e ammette $t = 0$ come punto stazionario, quindi

$$\psi'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbf{R}^n.$$

Per l'arbitrarietà di v deve essere $\nabla f(x_0) = 0$. □

In realtà, per ottenere la condizione di stazionarietà, dato che essa riguarda solo il gradiente, non è richiesta la differenziabilità di f , ma è sufficiente l'esistenza delle derivate parziali in x_0 , basta osservare che per ogni $i = 1, \dots, n$ la funzione di una variabile $x_i \rightarrow f(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$ ammette x_{0i} come punto stazionario, quindi $D_i f(x_0) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Il Teorema 4.14, che dà una condizione solo necessaria per la determinazione degli estremi relativi, ci dice che essi vanno ricercati tra i punti stazionari, naturalmente tenendo presente che possono essere estremi relativi anche eventuali altri punti in cui f non ammette derivate. Va osservato inoltre che tale teorema non fa nessuna distinzione tra massimi e minimi. A questo scopo bisogna raffinare l'indagine facendo intervenire condizioni aggiuntive sulle derivate di ordine superiore mediante il ricorso alla formula di Taylor. Il seguente teorema ci fornisce un criterio che si basa sul segno (in senso stretto) dell'hessiano, ma ci mostra anche l'esigenza di passare a derivate di ordine superiore nel caso degenerare.

Teorema 4.15 - Sia $x_0 \in \Omega$ un punto stazionario per la funzione $f \in C^2(\Omega)$. Se x_0 è di minimo [**massimo**] relativo per f allora

$$(4.14) \quad D^2 f(x_0) v \cdot v \geq 0 \quad [D^2 f(x_0) v \cdot v \leq 0] \quad \forall v \in \mathbf{R}^n.$$

Viceversa, se

$$(4.15) \quad D^2 f(x_0)v \cdot v > 0 \quad [D^2 f(x_0)v \cdot v < 0] \quad \forall v \in \mathbf{R}^n$$

allora x_0 è di minimo [massimo] relativo isolato per f .

Dimostrazione. Posto $x = x_0 + tv$ nella formula di Taylor al II ordine, si ha

$$(4.16) \quad \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t^2} = \frac{1}{2}D^2 f(x_0)v \cdot v + \frac{o(t^2)}{t^2}.$$

Ora, se x_0 è di minimo relativo, per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) \geq 0$$

e quindi, passando al limite per $t \rightarrow 0$, $D^2 f(x_0)v \cdot v \geq 0$. Viceversa, se

$$D^2 f(x_0)v \cdot v > 0$$

il II membro nella (4.16) è anch'esso positivo per $|t|$ sufficientemente piccolo, quindi $f(x_0 + tv) - f(x_0) > 0$ e x_0 è di minimo relativo isolato. In modo analogo si ragiona per il massimo. □

Che la condizione (4.14) sia necessaria ma non sufficiente lo si vede subito con la funzione $f(x, y) = x^2 - y^4$. Ovviamente il punto stazionario $O = (0, 0)$ non è né di massimo né di minimo, diciamo in tal caso che si tratta di un *punto di sella* nel senso che $x \rightarrow f(x, 0)$ ha minimo in 0 mentre $y \rightarrow f(0, y)$ ha massimo in 0. Tuttavia la sua parte quadratica $(x, y) \rightarrow x^2$ soddisfa la (4.14). La possiamo usare come condizione sufficiente soltanto se si presenta nella versione più restrittiva (4.15) di essere definita in segno e non semi-definita. A questo scopo basta controllare il segno dei suoi autovalori, che, com'è ben noto, sono tutti reali. L'hessiano in $(0, 0)$ della funzione f che abbiamo appena considerato ha come autovalori 2 e 0: il fatto che uno di essi sia positivo esclude che il punto stazionario sia di massimo, ma non basta per affermare che è di minimo perché l'altro autovalore è nullo. La funzione $g(x, y) = x^2 + y^4$ ha lo stesso hessiano della f in $(0, 0)$, stazionario anche per g , ma si tratta questa volta del punto di minimo in quanto $g(0, 0) = 0$ e altrove è positiva.

Si può evitare di ricorrere al Teorema 4.15 se si hanno altre informazioni utili sulla funzione. Vedremo tra poco, per esempio, che se $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è convessa e di classe C^1 , con Ω aperto convesso, allora vale la proprietà, analoga a quella vista in una variabile, di avere il grafico al disopra di ogni piano tangente, cioè

$$f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \Omega$$

È evidente quindi in questa circostanza che se x_0 è stazionario non può che essere di minimo relativo, ma anche assoluto. L'eventuale stretta convessità avrà come conseguenza l'unicità del minimo. Lo stesso si può dire per il massimo di una funzione concave. Ricordiamo inoltre l'utilità, in quest'ambito di problemi, dei teoremi di Weierstraß e di Rolle, con le relative varianti, che combinati insieme sono particolarmente efficaci.

Teorema 4.16 (di Weierstraß) - *Ogni funzione continua definita su un insieme compatto ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. Basta ricordare che ogni funzione continua trasforma compatti in compatti e che ogni insieme compatto in \mathbf{R} ammette massimo e minimo. □

Teorema 4.17 (di Rolle) - Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto limitato (quindi $\bar{\Omega}$ è compatto) e $f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ una funzione costante su $\partial\Omega$. Allora esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}$ rispettivamente il minimo e il massimo di f su $\bar{\Omega}$. Essendo

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

se $f(x_1) = f(x_2)$ deve essere f costante e quindi ha gradiente nullo ovunque. Se, al contrario, uno dei due punti cade all'interno sia applica il Teorema 4.14 e la tesi è dimostrata. \square

Una situazione tipica è il caso di una funzione nulla sul bordo e con un segno determinato all'interno. Mettiamo sia positiva, allora il massimo cade all'interno e i punti del bordo sono tutti di minimo. Ciò non esclude l'esistenza di minimi relativi interni, ma solo se vi sono almeno due punti stazionari interni, altrimenti, se il punto stazionario è unico, è necessariamente di massimo.

Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \log(x^2 + y^2)$$

sull'aperto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > |y|, x^2 + y^2 < 1\}$. Poiché

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2) |\log(x^2 + y^2)|,$$

f ammette su $\bar{\Omega}$ prolungamento continuo, indichiamolo ancora con f , nullo su $\partial\Omega$. In Ω è negativa, quindi ha il minimo all'interno e il massimo sul bordo. Cerchiamo i punti stazionari interni come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \log(x^2 + y^2) \right] = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \log(x^2 + y^2) \right] = 0. \end{cases}$$

L'espressione in parentesi nella seconda equazione non può mai annullarsi perché somma delle quantità positive $x^2 - y^2$ e $-\log(x^2 + y^2)$, quindi deve essere $y = 0$ che, sostituito nella prima, implica $x = 1/\sqrt{e}$. L'unico punto stazionario interno per f è $(1/\sqrt{e}, 0)$ ed è necessariamente di minimo.

Se si toglie l'ipotesi che Ω sia limitato il Teorema di Rolle non è più vero. Costruire un controesempio è molto semplice, si prenda ad esempio la funzione $f(x, y) = y$ sul semipiano $y \geq 0$. Sul bordo, l'asse x , è identicamente nulla, ma all'interno non presenta nessun punto stazionario.

Vediamo un caso interessante in cui si prevede che il massimo e/o il minimo vengono raggiunti sul bordo. Indichiamo con Δ l'operatore differenziale, detto *laplaciano*, dato dalla somma delle derivate seconde pure

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

per cui Δu coincide con la traccia dell'hessiano di u .

Il problema dell'equilibrio di una membrana posta in trazione, vincolata sul bordo e soggetta ad un carico distribuito $p(x, y)$ per unità di superficie, consiste nel trovare lo spostamento trasversale $u(x, y)$ che soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

e una condizione al bordo del tipo

$$u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega$$

con φ assegnata.

Nello spazio, la presenza di una distribuzione di cariche elettriche di densità $p(x, y, z)$ per unità di volume genera un potenziale elettrostatico $u(x, y, z)$ che soddisfa l'equazione

$$\Delta u + p(x, y, z) = 0.$$

Equazioni alle derivate parziali che coinvolgono il laplaciano si incontrano spesso nella fisica dei mezzi continui in condizioni stazionarie o di equilibrio. Un tipico problema al bordo associato ad un'equazione di questo tipo è il seguente.

Problema 4.18 (Problema di Dirichlet) - *Dati un aperto Ω limitato (almeno nei casi più comuni) in \mathbf{R}^n e le funzioni continue $p : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ e $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$, trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tale che*

$$\begin{cases} -\Delta u = p & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se p ha un segno determinato su tutto il dominio, non in senso stretto, oppure è nulla, a seconda della situazione si verificano le possibilità

$$\begin{aligned} u \text{ subarmonica} : & \quad \Delta u \geq 0, \\ u \text{ superarmonica} : & \quad \Delta u \leq 0, \\ u \text{ armonica} : & \quad \Delta u = 0. \end{aligned}$$

Sono armoniche ad esempio le funzioni lineari del tipo $u(x) = a \cdot x + b$ (per $n = 1$ non ve ne sono altre), le funzioni xy e $x^2 - y^2$ in \mathbf{R}^2 , mentre $x^2 + y^2$ è subarmonica, come lo è in \mathbf{R}^n la $|x|^2$ il cui laplaciano vale $2n$.

Vale il seguente risultato, del tutto naturale se si pensa a come si deforma una membrana se il carico è rivolto verso il basso.

Teorema 4.19 (Principio di massimo) - *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ è una funzione subarmonica con Ω aperto limitato allora*

$$(4.17) \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare la (4.17) se $\Delta u \geq 0$.

Supponiamo dapprima $\Delta u > 0$. Se esistesse un punto di massimo $x_0 \in \Omega$, l'hessiano in tal punto sarebbe semidefinito negativo e la sua traccia $\Delta u(x_0)$ non potrebbe essere positiva, contrariamente all'ipotesi.

Adesso supponiamo $\Delta u \geq 0$ e consideriamo la perturbazione u_ε della u

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2, \quad \varepsilon > 0,$$

in modo che

$$u \leq u_\varepsilon \quad \text{e} \quad \Delta u_\varepsilon = \Delta u + 2\varepsilon n > 0.$$

Tenendo conto del caso restrittivo precedente, si ha

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2 \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon R^2$$

con $R > 0$ abbastanza grande in modo che $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$. Essendo ε arbitrario, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Con la disuguaglianza contraria, che è sempre vera, si ottiene la tesi. \square

Analogamente si dimostra che il minimo di una funzione superarmonica viene raggiunto sul bordo. Essendo una funzione armonica sia subarmonica che superarmonica, vale il seguente principio di massimo.

Corollario 4.20 - *Ogni funzione armonica $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ raggiunge sia il massimo che il minimo sul bordo.*

Una conseguenza interessante del principio di massimo è l'unicità della soluzione del Problema di Dirichlet. Supponiamo che u e v siano soluzioni dello stesso problema. Allora $\Delta(u - v) = 0$ in Ω e $u - v = 0$ su $\partial\Omega$. In altre parole $u - v$ è armonica e in quanto tale

$$\min_{\partial\Omega}(u - v) = \min_{\bar{\Omega}}(u - v) \leq \max_{\bar{\Omega}}(u - v) = \max_{\partial\Omega}(u - v),$$

ma il primo e l'ultimo membro sono nulli, quindi $u = v$ in $\bar{\Omega}$.

4.6 Funzioni convesse

Come in una variabile, una funzione f è convessa se in ogni piano bidimensionale parallelo a e_{n+1} , chiamiamolo "verticale" per convenzione, che abbia intersezione non vuota col grafico di f , la corda che unisce due punti qualsiasi di questa ne rimane al di sopra tra i due punti scelti. La definizione è formalmente la stessa che abbiamo introdotto in Analisi 1.

Definizione 4.21 - *Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, con Ω insieme convesso di \mathbf{R}^n , è detta **convessa** se per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$ si ha*

$$(4.18) \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Viene detta **strettamente convessa** se la disuguaglianza (4.18) vale in senso stretto per ogni $\lambda \in]0, 1[$. La f viene detta **concava** se $-f$ è convessa.

Ad esempio la funzione modulo $x \rightarrow |x|$ è convessa, le lineari sono le uniche funzioni convesse e concave insieme. Osserviamo anche che se $\varphi : I \rightarrow \Omega$ è lineare, $\varphi(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbf{R}^n$, la composizione $f \circ \varphi$ è convessa, infatti, scelti $t_1, t_2 \in I$ e $\lambda \in [0, 1]$, si ha

$$\begin{aligned} f(\varphi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)) &= f(a(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) + b) \\ &= f(a(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) + \lambda b + (1 - \lambda)b) = f(\lambda(at_1 + b) + (1 - \lambda)(at_2 + b)) \\ &\leq \lambda f(at_1 + b) + (1 - \lambda)f(at_2 + b) = \lambda f(\varphi(t_1)) + (1 - \lambda)f(\varphi(t_2)), \end{aligned}$$

ne segue che la funzione di λ al primo membro della (4.18) è convessa.

Il lettore è invitato a rivedere le varie proprietà delle funzioni convesse di una variabile, illustrate a suo tempo, cercando di capire quali e in che modo possono essere generalizzate ora alle funzioni di più variabili. Molte di esse valgono ancora senza che vi sia bisogno di cambiare nulla della dimostrazione, come l'unicità del minimo nel caso di stretta convessità, la disuguaglianza della media, la convessità della funzione composta e altre, in altri casi ci dobbiamo lavorare un po'. Certamente non ha senso considerare quelle legate all'ordinamento nel dominio, però se guardiamo al comportamento lungo ogni retta orientata qualcosa si può dire. Ci torna utile adesso la proprietà per cui la somma di funzioni convesse è convessa per tutti quei casi in cui la nostra funzione di più variabili è somma di tante funzioni di una variabile. Per esempio $x \rightarrow |x|^2 = \sum x_i^2$, come ogni forma quadratica con autovalori positivi, è convessa, $x \rightarrow \log(x_1 x_2 \cdots x_n)$, $x_i > 0$, è concava.

In questo paragrafo supporremo sempre che il dominio Ω sia convesso, ma anche aperto per semplicità a meno di avviso contrario.

Proposizione 4.22 - Ogni funzione convessa $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è localmente limitata superiormente.

Dimostrazione. Dimostriamo che f ha massimo su ogni n -cubo chiuso Q_n (prodotto cartesiano di n intervalli chiusi unitari) contenuto in Ω . Dalla (4.18), presi due punti $x_1, x_2 \in \Omega$, in ogni punto $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ del segmento che li unisce si ha banalmente

$$(4.19) \quad f(x) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Ragioniamo per induzione. Se $n = 1$ Ω è un intervallo aperto e Q_1 è un intervallo chiuso in esso contenuto. Allora la (4.19) è già la tesi se x_1 e x_2 sono gli estremi di Q_1 .

Se $n = 2$ Q_2 è un quadrato. Scelto $x \in Q_2$, una retta che passa per x e per uno dei 4 vertici, sia esso v_4 , attraversa il bordo del quadrato in un punto y di un lato che non contiene v_4 . Allora esiste $\lambda \in [0, 1]$ tale che $x = \lambda y + (1 - \lambda)v_4$. Ma a sua volta y è combinazione convessa di altri 2 vertici, v_2 e v_3 , che sono gli estremi del lato a cui appartiene. Esiste quindi $\mu \in [0, 1]$ tale che $y = \mu v_2 + (1 - \mu)v_3$. Ne segue che x è combinazione convessa dei 3 vertici, cioè

$$x = \lambda(\mu v_2 + (1 - \mu)v_3) + (1 - \lambda)v_4,$$

dove la somma dei coefficienti $\lambda_2 = \lambda\mu$, $\lambda_3 = \lambda(1 - \mu)$ e $\lambda_4 = (1 - \lambda)$ vale 1. Mettendoci anche $\lambda_1 = 0$ si ha

$$f(x) \leq \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) + \lambda_4 f(v_4) \leq \max_{1 \leq i \leq 4} f(v_i).$$

Se in Q_n vale la disuguaglianza

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i f(v_i), \quad \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i = 1,$$

per cui il massimo di f su Q_n verrà raggiunto in uno dei vertici come sopra, dimostriamo la stessa nel caso $n + 1$ -dimensionale. Una retta passante per un punto $x \in Q_{n+1}$ e per uno dei 2^{n+1} vertici, sia esso v_{n+1} , incontrerà una faccia, che è un n -cubo, in un punto y per cui $x = \lambda y + (1 - \lambda)v_{n+1}$ per un certo $\lambda \in [0, 1]$. Ma y per l'ipotesi induttiva è combinazione convessa degli altri 2^n vertici con certi coefficienti μ_i la cui somma vale 1. Pertanto

$$x = \lambda \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i v_i + (1 - \lambda)v_{n+1}$$

in cui è evidente che la somma dei coefficienti vale 1. Posto $\lambda_i = \lambda\mu_i$ per $1 \leq i \leq 2^n$ e $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$, si ottiene

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{2^{n+1}} \lambda_i v_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \lambda_i f(v_i) \leq \max_{1 \leq i \leq 2^{n+1}} f(v_i).$$

□

Proposizione 4.23 - Data una funzione convessa $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbf{R}^{n+1}$ con $v_{n+1} = 0$, cioè ortogonale a e_{n+1} , si consideri il semipiano verticale con origine la retta verticale per $(x, f(x))$ e parallelo a v . In tale semipiano l'arco intersezione col grafico ammette in $(x, f(x))$ la semiretta tangente uscente da questo punto e ne sta al di sopra.

Dimostrazione. Da quanto fatto notare all'inizio del paragrafo, risulta che la funzione $t \rightarrow f(x + tv)$ è convessa come funzione di una variabile. Allora il rapporto incrementale nella direzione di v è crescente in t ed esiste finito, in quanto x interno, il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v^+}$$

che possiamo interpretare come la derivata direzionale "destra", calcolata cioè dalla parte del verso di v , cosa che giustifica la notazione usata. Sappiamo però che questo limite coincide con l'estremo inferiore del rapporto incrementale sui $t > 0$, pertanto

$$(4.20) \quad f(x + tv) \geq f(x) + t \frac{\partial f}{\partial v^+} \quad \forall t > 0.$$

La (4.20) ci dice che l'arco del grafico di f formata dai punti di \mathbf{R}^{n+1} di coordinate $(x + tv, f(x + tv))$ con $t > 0$ rimane al di sopra della semiretta $(x + tv, f(x) + t \frac{\partial f}{\partial v^+})$ per gli stessi t . Al variare di v tutte queste semirette tangenti formano un cono convesso \mathcal{C} di \mathbf{R}^{n+1} col vertice nel punto $(x, f(x))$, dunque in definitiva tutto il grafico di f rimane al di sopra di questo cono. Ad ogni vettore $h \in \mathbf{R}^{n+1}$ tale che il punto $(x, f(x)) + h \in \mathcal{C}$, quindi con $h_{n+1} \neq 0$, corrisponde il *piano d'appoggio*, ortogonale ad h , per il grafico di f in $(x, f(x))$ di equazione

$$h \cdot (y - x, y_{n+1} - f(x)) = 0, \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Al variare di h ognuno di questi piani è il grafico della funzione

$$y_{n+1} = \varphi(y) = f(x) - \frac{1}{h_{n+1}} \sum_{i=1}^n h_i (y_i - x_i).$$

□

Ora, φ ammette minimo su ogni compatto $K \subset \Omega$ e $f \geq \varphi$, quindi f è limitata inferiormente su K , cioè localmente limitata inferiormente su Ω .

Dalla (4.20) si deduce in particolare che se tra tutti i piani d'appoggio c'è anche quello orizzontale, con gli $h_i = 0$ per $i = 1, \dots, n$, allora x è di minimo per f .

Una funzione convessa può non essere limitata, può non esserlo superiormente, inferiormente, o entrambe. Si veda ad esempio il comportamento delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad \sup f = +\infty$$

$$f(x, y) = x + y + e^{x+y}, \quad x + y < 0, \quad \inf f = -\infty.$$

Nel caso poi che il dominio sia tutto \mathbf{R}^n non è mai limitata superiormente, a meno che non sia costante, a causa dell'esistenza di un piano d'appoggio non orizzontale.

Teorema 4.24 - *Ogni funzione convessa $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è localmente lipschitziana.*

Dimostrazione. Sia B_{2r} una palla di raggio $2r$ tale che $\overline{B_{2r}} \subset \Omega$. Su di essa $|f| \leq M$ per le due proposizioni precedenti. Presi due punti $x_1, x_2 \in B_r$ prolunghiamo il segmento di estremi x_1 e x_2 dalla parte di x_1 fino ad incontrare il bordo di B_{2r} in y . Ovviamente $x_1 = x_2 + \lambda(y - x_2)$ per $\lambda = |x_1 - x_2|/|y - x_2|$ e si ha

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_2 + \lambda(y - x_2)) - f(x_2) \leq \lambda(f(y) - f(x_2))$$

$$\leq 2M \frac{|x_1 - x_2|}{|y - x_2|} \leq 2M \frac{|x_1 - x_2|}{r} = k|x_1 - x_2|,$$

ma scambiando x_1 con x_2 si ottiene la stessa stima per $f(x_2) - f(x_1)$, quindi

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

□

Conseguenza immediata di questo risultato è che su tutto l'aperto Ω ogni funzione convessa è continua. A tal proposito osserviamo che se il dominio, sempre convesso, non è un aperto, ma comprende punti del bordo o tutto il bordo, non è detto che la continuità e/o la condizione di Lipschitz si possano estendere fino a quei punti. Si è visto anche in una variabile, si fa presto a definire funzioni convesse su chiusi, quindi continue all'interno, ma discontinue passando al bordo. Una di queste è ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 & \text{se } |x| < 1 \\ 2 & \text{se } |x| = 1. \end{cases}$$

La seguente invece è continua fino al bordo, ma non è lipschitziana

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y \log y & \text{se } x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ e } y \leq 1 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Vediamo adesso la seguente importante caratterizzazione delle funzioni convesse differenziabili che enunciamo in modo perfettamente analogo al caso già visto in una variabile.

Teorema 4.25 - Per una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (\smile)1. f è convessa,
- (\smile)2. $f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \Omega$,
- (\smile)3. $(Df(x_1) - Df(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega$,
- (\smile)4. $D^2f(x)v \cdot v \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall v \in \mathbf{R}^n$ se f ammette le derivate seconde in Ω .

Dimostrazione. Se f è differenziabile sappiamo che il differenziale si scrive proprio come derivata direzionale e la (4.20) diventa

$$(4.21) \quad f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + tDf(x_0) \cdot v \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall x_0 \in \Omega : x_0 + tv \in \Omega.$$

Per $t = 1$ e $v = x - x_0$ con $x \in \Omega$ si ottiene la (\smile)2, la quale ci dice che tutti i piani d'appoggio vengono a coincidere con un unico piano che è quello tangente.

Dimostriamo che (\smile)2 \Rightarrow (\smile)3. Per questo basta scrivere la (\smile)2 in x_1 e x_2 , scambiarli e sommare

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &\geq Df(x_2) \cdot (x_1 - x_2) \\ f(x_2) - f(x_1) &\geq Df(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (Df(x_1) - Df(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0.$$

Per l'implicazione (\smile)3 \Rightarrow (\smile)1, definiamo la funzione derivabile $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$

$$\varphi(\lambda) = f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))$$

e dimostriamo che $\varphi'(\lambda) = Df(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1)$ è crescente. Si ha

$$\begin{aligned} &(\varphi'(\lambda_1) - \varphi'(\lambda_2))(\lambda_1 - \lambda_2) \\ &= (Df(x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1)) - Df(x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1))) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)(x_2 - x_1) \\ &= (Df(x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1)) - Df(x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1))) \\ &\quad \cdot (x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) - (x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1))) \geq 0. \end{aligned}$$

Supponiamo adesso che f abbia le derivate seconde. Inseriamo nella (◊)3 l'espressione dello sviluppo di Taylor intorno a x

$$D_i f(x+v) - D_i f(x) = \sum_{j=1}^n D_{ij}^2 f(x) v_j + o(|v|)$$

ottenendo

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_{ij}^2 f(x) v_j + o(|v|) \right) v_i = D^2 f(x) v \cdot v + o(|v|^2) \geq 0,$$

quindi $D^2 f(x) v \cdot v \geq 0$.

Viceversa, supponiamo $D^2 f(x) v \cdot v \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbf{R}^n$. Scriviamo la formula di Taylor col resto di Lagrange per la funzione di una variabile $t \rightarrow f(x+tv)$

$$f(x+tv) = f(x) + t Df(x) \cdot v + \frac{t^2}{2} D^2 f(x+\tau v) v \cdot v$$

per un certo $\tau \in [0, t]$ (se $t > 0$, altrimenti $\tau \in [t, 0]$). L'ultimo termine è non negativo per ipotesi e per $v = y - x$ con $x, y \in \Omega$ arbitrari e per $t = 1$ si ottiene

$$f(y) \geq f(x) + Df(x) \cdot (y - x)$$

che per la (◊)2 equivale ad affermare che f è convessa. □

Osserviamo che dalla (◊)2 discende banalmente la notevole proprietà che ogni punto stazionario di una funzione convessa e differenziabile è necessariamente, non solo di minimo relativo, ma anche di minimo assoluto, confermando quanto già detto nel caso esista un piano d'appoggio orizzontale.

Sappiamo che in generale l'esistenza delle derivate parziali non garantisce la differenziabilità, ma se la funzione è convessa allora sì, di questo la dimostrazione non è molto semplice e la omettiamo. Più semplice è invece dimostrare un risultato analogo a quello già incontrato in una variabile: se f è convessa e differenziabile allora è di classe C^1 .

Teorema 4.26 - Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ convessa e differenziabile. Allora $Df \in C^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che se $(x_h) \subset \Omega$ è una successione convergente ad un punto $x \in \Omega$ allora $Df(x_h) \rightarrow Df(x)$. Ragioniamo sulla componente i -esima del gradiente che è la derivata parziale rispetto a x_i . Per $|t| < \delta$ sufficientemente piccolo $x_h + te_i \in \Omega$ e per il Teorema 4.25 (◊)2 si ha

$$f(x_h + te_i) \geq f(x_h) + t \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i}.$$

Se $t > 0$ si ricava

$$\frac{f(x_h + te_i) - f(x_h)}{t} \geq \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i}$$

e passando al limite per $h \rightarrow \infty$ a sinistra e al massimo limite a destra si ottiene

$$\frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i}.$$

Per $t < 0$ analogamente

$$\frac{f(x_h + te_i) - f(x_h)}{t} \leq \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i}$$

da cui

$$\frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i}.$$

Adesso passiamo al limite rispetto a t e si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

per cui

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i} \leq \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i}.$$

In conclusione

$$\exists \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x_h)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

□

Esercizio 4.7 - Ogni funzione convessa derivabile due volte è subarmonica.

4.7 Funzioni omogenee

Definizione 4.27 - Un insieme $S \subset \mathbf{R}^n - \{0\}$ è detto **stellato** se per ogni $x \in S$ e per ogni $t > 0$ $tx \in S$.

Definizione 4.28 - Una funzione $f : S \rightarrow \mathbf{R}$, con S stellato, è detta **omogenea** di grado $\alpha \in \mathbf{R}$, o α -omogenea, se

$$(4.22) \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$$

per ogni $x \in S$ e per ogni $t > 0$.

Le funzioni omogenee sono quelle che lungo ogni semiretta $\{tx \mid t > 0\}$ si comportano come le potenze di grado α in una variabile.

L'ipotenusa di un triangolo rettangolo, ma anche il modulo ρ in funzione delle coordinate cartesiane, è la funzione omogenea di primo grado

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$$

dei due cateti x e y , infatti

$$\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall t > 0.$$

L'area di un rettangolo, xy , è una funzione omogenea di secondo grado dei lati x e y , infatti $(tx)(ty) = t^2xy$. Il suo perimetro $2(x+y)$ è 1-omogenea, mentre il rapporto tra i lati, x/y , è una 0-omogenea, come le funzioni costanti. Anche la funzione $\text{Arg}(x, y)$, o la sua restrizione al primo e quarto quadrante che è $\text{arctg}(y/x)$, è 0-omogenea. La funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n - \{0\},$$

è 0-omogenea essendo $f(tx, ty) = f(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ e per ogni $t > 0$. La funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{|x - y|}}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n - \{0\}, x \neq y,$$

è omogenea di grado $-1/2$.

Un esempio importante di funzione 2-omogenea è la forma quadratica su \mathbf{R}^n associata ad una matrice simmetrica $n \times n$

$$x \rightarrow Ax \cdot x = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Ogni funzione omogenea è univocamente determinata dai suoi valori sulla sfera unitaria, l'insieme dei vettori di modulo 1, infatti

$$f(x) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \forall x \in S.$$

Questa caratterizzazione suggerisce che le funzioni omogenee che ammettono prolungamento continuo nullo fino a 0 sono quelle per cui $\alpha > 0$, a condizione però che la f sia limitata nell'intorno di 0 che equivale a dire limitata sulla sfera unitaria. Ad esempio

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}, \quad y \neq 0,$$

è 1-omogenea, ma non ha limite per $(x, y) \rightarrow 0$ perché sulle semirette $y = tx$ ha limite 0, ma sulla parabola $y = x^2$ ha limite 1.

Si vede subito che se f è α -omogenea e differenziabile su un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ stellato allora ogni sua derivata parziale, o il gradiente Df , è $\alpha - 1$ -omogenea. Infatti

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(tx + he_i) - f(tx)}{h} = t^\alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + (h/t)e_i) - f(x)}{t(h/t)} = t^{\alpha-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Vediamo adesso una proprietà fondamentale delle funzioni omogenee differenziabili.

Teorema 4.29 (di Eulero) - Una funzione differenziabile $f : \Omega - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, con Ω stellato, è α -omogenea se e solo se

$$(4.23) \quad x \cdot Df(x) = \alpha f(x)$$

per ogni $x \in S$.

Dimostrazione. Sia f omogenea di grado α . Per ottenere la (4.23) basta derivare la (4.22) rispetto a t

$$Df(tx) \cdot x = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

e porre $t = 1$. Se, viceversa, vale la (4.23), verifichiamo che $f(tx)/t^\alpha$ è costante in t . Derivando rispetto a t si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{f(tx)}{t^\alpha} &= \frac{t^\alpha Df(tx) \cdot x - f(tx) \alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\ &= \frac{Df(tx) \cdot tx - \alpha f(tx)}{t^{\alpha+1}} = \frac{\alpha f(tx) - \alpha f(tx)}{t^{\alpha+1}} = 0. \end{aligned}$$

Allora $f(tx) = ct^\alpha$ in cui deve essere $c = f(x)$ come si vede ponendo $t = 1$. □

Esercizio 4.8 - Quali sono le soluzioni in $C^2(\mathbf{R}^n - \{0\})$ dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0?$$

Capitolo 5

Funzioni implicite ed estremi vincolati

5.1 Funzioni implicite

Sotto quali condizioni un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$ definisce una curva nel piano (x, y) ? Con semplici esempi ci si rende conto facilmente che non sempre si tratta di una curva, nel senso del sostegno di una curva regolare e semplice, con una sola tangente in ogni punto. L'equazione $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ rappresenta una circonferenza di raggio R se $R > 0$, ma per $R = 0$ degenera in un punto; $xy = k$ è l'equazione dei due rami di un'iperbole se $k \neq 0$, ma per $k = 0$ degenera in una coppia di rette; il luogo di zeri della funzione

$$F(x, y) = \max\{x^2 + y^2 - 1, 0\}$$

è addirittura una regione piana, il disco unitario, ben lungi dall'assomigliare ad una curva.

Il risultato fondamentale a cui è dedicato questo paragrafo, noto come *Teorema delle funzioni implicite* o *Teorema del Dini*, è di natura esclusivamente *locale*: esso riguarda la possibilità di riconoscere localmente un luogo di zeri come il sostegno di una curva regolare. Più precisamente come grafico di una funzione di una variabile rispetto all'altra, che è un risultato ancora più particolare perché ogni grafico è il sostegno di una curva. Comunque, trattandosi di una descrizione locale, è evidente che non c'è nessuna differenza, dal momento che anche il sostegno di una curva regolare è localmente un grafico, infatti se una delle due componenti $x(t)$ o $y(t)$, ad esempio la prima, soddisfa $x'(t_0) \neq 0$ allora, in quanto continua, $x'(t) \neq 0$ in un intorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ di t_0 , quindi strettamente monotona in tale intorno e con inversa $t(x)$ di classe C^1 . Ne segue che in un intorno di $x(t_0)$ la curva è il grafico della funzione $f(x) = y(t(x))$.

Teorema 5.1 (delle funzioni implicite) - Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un aperto e $F \in C^1(\Omega)$ tale che il suo luogo di zeri $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega \mid F(x, y) = 0\}$ sia non vuoto. Scelto un punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 ed una funzione $f : U \rightarrow V$ tali che

(a) $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U;$

(b) f è derivabile in U e $f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in U;$

(c) $f \in C^1(U).$

Dimostrazione. (a) Per continuità $F_y(x, y) > 0$ in un intorno di (x_0, y_0) . Poiché in questo intorno la funzione $y \rightarrow F(x_0, y)$ è strettamente crescente, esistono y_1 e y_2 , con $y_1 < y_0 < y_2$, tali che $F(x_0, y_1) < 0 < F(x_0, y_2)$. Per continuità esiste un intorno U di x_0 tale che $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$ per ogni $x \in U$. Scegliamo per V un intervallo contenente y_1 e y_2 e osserviamo che per ogni $x \in U$ la funzione $y \rightarrow F(x, y)$ è strettamente crescente in V , pertanto, per il teorema degli zeri, esiste per ogni $x \in U$ un'unica $y \in V$ tale che $F(x, y) = 0$, cioè $(x, y) \in \Gamma$. Ma l'unicità di y significa che y è univocamente determinata come funzione di x , dunque rimane definita una funzione $f : U \rightarrow V$ tale che $F(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in U$.

(b) Scelti $x, x+h \in U$, consideriamo i due punti di Γ $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$ e il segmento che li unisce $(x+th, f(x) + t(f(x+h) - f(x)))$, con $t \in [0, 1]$. Per il teorema del valor medio applicato alla funzione $t \rightarrow F(x+th, f(x) + t(f(x+h) - f(x)))$, esiste $\tau \in [0, 1]$ tale che

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) = \frac{d}{dt} F(x+th, f(x) + t(f(x+h) - f(x)))|_{t=\tau} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F(x+\tau h, f(x) + \tau(f(x+h) - f(x)))h \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} F(x+\tau h, f(x) + \tau(f(x+h) - f(x)))(f(x+h) - f(x)), \end{aligned}$$

da cui

$$(5.1) \quad f(x+h) - f(x) = - \frac{F_x(x+\tau h, f(x) + \tau(f(x+h) - f(x)))}{F_y(x+\tau h, f(x) + \tau(f(x+h) - f(x)))} h.$$

Questa relazione mostra che f è lipschitziana, quindi continua, infatti, potendo supporre che il compatto $\bar{U} \times \bar{V}$ sia contenuto in Ω , si deduce da essa

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \max_{\bar{U} \times \bar{V}} \frac{|F_x|}{|F_y|} |h|.$$

Ne segue che nella (5.1), dopo averla divisa per h , il secondo membro ammette limite per $h \rightarrow 0$, dunque ammette limite anche il primo e si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_x(x+\tau h, f(x) + \tau(f(x+h) - f(x)))}{F_y(x+\tau h, f(x) + \tau(f(x+h) - f(x)))} = - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \end{aligned}$$

(c) Basta osservare che nella formula per la derivata, ottenuta al punto (b), $f'(x)$ coincide con una funzione continua, quindi $f \in C^1(U)$. □

Questo teorema ha delle conseguenze notevoli e merita di essere commentato estesamente. Innanzi tutto non si tratta di un teorema di esistenza, ma di regolarità: il fatto che il luogo di zeri sia non vuoto, infatti, è assunto come ipotesi e può discendere da altri fattori del tutto indipendenti. La regolarità riguarda la f ed è chiaro che il teorema non si limita ad affermare che $F \in C^1(\Omega) \Rightarrow f \in C^1(U)$, bensì $F \in C^k(\Omega) \Rightarrow f \in C^k(U)$ oppure $F \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow f \in C^\infty(U)$, in altre parole la regolarità di f è la stessa di quella di F . Se ad esempio sappiamo che $F \in C^2(\Omega)$ il secondo membro della formula per f' sta in C^1 , ma $f' \in C^1(U)$ vuol dire $f \in C^2(U)$ e così via. In tal caso possiamo continuare a derivare fino all'ordine consentito ottenendo formule per le derivate successive, sempre più lunghe naturalmente, a partire da

$$(5.2) \quad f''(x) = - \frac{[F_{xx} + F_{xy}f'(x)]F_y - F_x[F_{yx} + F_{yy}f'(x)]}{F_y^2},$$

dove le derivate di F si intendono calcolate in $(x, f(x))$. In particolare, in corrispondenza di un punto x stazionario per la f , che si riconosce dall'annullamento di $F_x(x, f(x))$, la (5.2) si riduce a

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

L'ipotesi che il punto (x_0, y_0) non sia stazionario per F è una condizione solo sufficiente, ma non necessaria, affinché Γ sia riconoscibile localmente come grafico di f . Infatti Γ non cambia, ovviamente, se si sostituisce F con F^2 , la quale ammette tutti i punti di Γ come stazionari. In presenza di un punto critico il teorema non è più applicabile, ma non si può escludere che nell'intorno di quel punto il luogo di zeri sia grafico di una funzione $y = f(x)$ oppure $x = g(y)$.

Un'ultima osservazione riguarda l'equazione della retta tangente. Come può scriversi in termini di F nel punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$? Evidentemente anche questa si presenterà in forma implicita. Ricordando che l'equazione della tangente al grafico di f ha la forma

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

utilizzando la formula per f' data dal Teorema 8.13 si ottiene

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

che conferma l'ortogonalità tra il vettore ∇F e la particolare curva di livello Γ . Ad esempio la tangente all'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nel punto (x_0, y_0) ha equazione

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0,$$

da cui

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Il seguente teorema è la versione parametrica del Teorema 8.13 e può essere dedotto da questo come corollario, dato che ogni grafico è di fatto il sostegno di una curva, oppure può essere dimostrato in modo autonomo.

Teorema 5.2 - *Sotto le stesse ipotesi del Teorema 8.13, esiste un intorno W del punto (x_0, y_0) e una curva regolare $\gamma : I \rightarrow W$ tale che $F(\gamma(t)) = 0$ e $\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ per ogni $t \in I$.*

Vogliamo adesso generalizzare questi risultati, in modo graduale, a spazi di dimensione qualsiasi. Ci limitiamo ad enunciare i teoremi, senza entrare nei dettagli della dimostrazione, per la comprensione dei quali si consiglia di mantenere un costante collegamento con i casi semplici visti adesso. Cominciamo con il luogo geometrico di una funzione di 3 variabili che definisce localmente una superficie regolare.

Teorema 5.3 - *Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un aperto e $F \in C^1(\Omega)$ tale che il suo luogo di zeri $\Gamma = \{(x, y, z) \in \Omega \mid F(x, y, z) = 0\}$ sia non vuoto. Scelto un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ tale che $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esistono un intorno U di (x_0, y_0) , un intorno V di z_0 ed una funzione $f : U \rightarrow V$ tali che*

(a) $F(x, y, f(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U;$

(b) f è differenziabile in U e

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \quad e \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \quad \forall (x, y) \in U;$$

(c) $f \in C^1(U)$.

Si capisce che le considerazioni fatte prima si possono ripetere in questo caso con le ovvie modifiche. In particolare per l'equazione del piano tangente a Γ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ si può passare dalla forma esplicita

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

alla forma implicita, con $z_0 = f(x_0, y_0)$,

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

che conferma ancora una volta l'ortogonalità tra il vettore ∇F e la superficie Γ dove F è costantemente nulla.

Prima di dare la versione parametrica di questo teorema definiamo in modo analogo alle curve la nozione di superficie regolare.

Definizione 5.4 - Una **superficie regolare** in \mathbf{R}^3 è un'applicazione $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$, con A aperto in \mathbf{R}^2 , tale che $\varphi \in C^1(A)$ e

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A.$$

Più in generale, per una **ipersuperficie** (o semplicemente una **superficie**) **regolare** in \mathbf{R}^n si sostituisce \mathbf{R}^2 con \mathbf{R}^{n-1} per l'aperto A , in cui variano gli $n-1$ parametri $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$, e la condizione sulle derivate della $\varphi \in C^1(A)$ diventa che gli $n-1$ vettori

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_{n-1}}$$

devono essere linearmente indipendenti per ogni $u \in A$. L'immagine di φ

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid x = \varphi(u), u \in A\}$$

si chiama **sostegno** della superficie φ .

Nella Definizione 5.4 la condizione di regolarità si traduce nel fatto che la matrice jacobiana $\nabla \varphi$, a n righe e $n-1$ colonne, deve avere caratteristica massima. I vettori colonna costituiscono una base per lo *spazio tangente*, il piano tangente se si tratta di una superficie in \mathbf{R}^3 . Si noti che la dimensione dello spazio tangente è pari a $n-1$, cioè al numero di parametri indipendenti u_h che intervengono nella parametrizzazione. Diciamo allora che $n-1$ è anche la *dimensione della superficie*. È facile a questo punto dedurre l'equazione parametrica del piano tangente alla superficie nel punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$, esso è dato da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \frac{\partial \varphi(u_0, v_0)}{\partial u} + \mu \frac{\partial \varphi(u_0, v_0)}{\partial v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

e analogamente in \mathbf{R}^n

$$x = x_0 + \sum_{h=1}^{n-1} \lambda_h \frac{\partial \varphi(u_0)}{\partial u_h}, \quad \lambda_h \in \mathbf{R}.$$

Formuliamo adesso la versione parametrica del Teorema 5.3.

Teorema 5.5 - Sotto le stesse ipotesi del Teorema 5.3, esiste un intorno W del punto (x_0, y_0, z_0) e una superficie regolare $\varphi : A \rightarrow W$ tale che $F(\varphi(u, v)) = 0$ per ogni $(u, v) \in A$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} F(\varphi(u, v)) &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} F(\varphi(u, v)) &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} = 0.\end{aligned}$$

In altre parole, ∇F è su Γ ortogonale ai due vettori tangenti φ_u e φ_v . La relazione $x = \varphi(u)$ in \mathbf{R}^n può essere interpretata come configurazione ammissibile di un sistema vincolato. Nel caso del Teorema 5.5 può trattarsi ad esempio di un punto materiale vincolato a stare su una superficie, la quale, essendo definita da una sola relazione implicita, viene interpretata come *vincolo semplice*. La presenza di un vincolo di questo tipo, in quanto restrizione sulle posizioni, diminuisce il cosiddetto *grado di libertà*: se inizialmente, nello spazio, un punto libero ha 3 gradi di libertà, non appena viene imposto un vincolo semplice il grado di libertà scende a 2, la somma del grado di libertà col grado di vincolo è sempre 3, pari al caso del punto libero, senza vincoli. Il numero di parametri indipendenti, che in Meccanica sono detti *coordinate lagrangiane*, coincide con il grado di libertà. In definitiva, il grado di libertà è pari alla dimensione dello spazio tangente e il grado di vincolo a quella dello spazio normale. Vediamo il caso di un vincolo doppio.

Teorema 5.6 - Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un aperto, $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ una funzione a valori vettoriali tale che $F \in C^1(\Omega)$ e $\Gamma = \{x \in \Omega \mid F(x) = 0\} \neq \emptyset$. Supponiamo inoltre che per un certo $x_0 \in \Gamma$ si abbia $\nabla F_1(x_0) \times \nabla F_2(x_0) \neq 0$. Allora esiste un intorno W di x_0 ed una curva regolare $\gamma : I \rightarrow W$ tale che

$$(5.3) \quad F(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in I \quad e \quad \nabla F(\gamma(t))\gamma'(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

La regolarità della superficie nell'intorno di x_0 è assicurata dalla condizione (5.3) di non parallelismo dei gradienti di F_1 e di F_2 e quindi dal fatto che la matrice jacobiana ∇F , a 2 righe e 3 colonne, deve avere caratteristica massima. Così lo spazio normale ha dimensione 2 in quanto generato dai vettori ∇F_1 e ∇F_2 (2 è il grado di vincolo), mentre lo spazio tangente ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $\gamma'(t)$ (1 è il grado di libertà).

Vediamo adesso le due versioni del teorema delle funzioni implicite nel caso più generale.

Teorema 5.7 (delle funzioni implicite) - Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ un aperto e $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ una funzione tale che $F \in C^1(\Omega)$ e $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega \mid F(x, y) = 0\} \neq \emptyset$. Supponiamo inoltre che in un punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$ lo jacobiano di F rispetto alle variabili $y = (y_1, \dots, y_m)$, che denotiamo con $\nabla_y F$, sia non singolare. Allora esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 ed una funzione $f : U \rightarrow V$ tali che

- (a) $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U$;
- (b) f è differenziabile in U e $\nabla f(x) = -[\nabla_y F(x, f(x))]^{-1} \nabla_x F(x, f(x)) \quad \forall x \in U$;
- (c) $f \in C^1(U)$.

Teorema 5.8 - Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto e $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$, con $m < n$, una funzione tale che $F \in C^1(\Omega)$ e $\Gamma = \{x \in \Omega \mid F(x) = 0\} \neq \emptyset$. Supponiamo inoltre che in un punto $x_0 \in \Gamma$ lo jacobiano di F , a m righe e n colonne, abbia caratteristica massima. Allora esistono un intorno W di x_0 , un aperto $A \subset \mathbf{R}^l$, con $l = n - m$, ed una funzione $\varphi : A \rightarrow W$ tali che $F(\varphi(u)) = 0$ per ogni $u \in A$, $\nabla \varphi(u)$, a n righe e l colonne, ha caratteristica massima, $\varphi \in C^1(A)$ e

$$\nabla_u F(\varphi(u)) = \nabla_x F(\varphi(u)) \nabla_u \varphi(u) = 0 \quad \forall u \in A.$$

5.2 Diffeomorfismi e varietà differenziabili

Una delle numerose applicazioni del teorema delle funzioni implicite, che, ricordiamo, fornisce un risultato di natura locale, riguarda l'esistenza e la differenziabilità dell'inversa di una funzione differenziabile assegnata. Naturalmente tutto ciò che discende dal Teorema 5.7 non può che essere di natura locale, ciò non toglie che sia lecito chiedersi se, e quando, una proprietà valida localmente, nell'intorno di ogni punto, non possa trasformarsi in una proprietà globale.

In una variabile già sappiamo come stanno le cose. Se $U \in \mathcal{I}(x_0)$ e $f \in C^0(U)$, in generale non basta che sia derivabile in x_0 , né che sia derivabile in tutto U , con $f'(x_0) \neq 0$, per dedurre l'esistenza dell'inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ e tanto meno la sua derivabilità nel punto $y_0 = f(x_0)$ o in tutti i punti di $f(U)$, bensì bisogna assumere $f \in C^1(U)$. Con questa ipotesi, se $f'(x_0) \neq 0$, a meno di passare ad un intorno più piccolo che possiamo ancora indicare con U , esiste l'inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ in $C^1(f(U))$ e $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ per ogni $y \in f(U)$. Ne segue che se $f : I \rightarrow J$, con I e J intervalli, sta in $C^1(I)$ e $f'(x) \neq 0$, allora ogni punto $x \in I$ ammette un intorno su cui vale la stessa proprietà. In altre parole esiste su I l'inversa locale, ogni punto ha un intorno su cui f^{-1} esiste ed è differenziabile, ma possiamo "raccordare" tra loro, intorno per intorno, tutte le inverse in modo da formare un'unica funzione inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$? Certamente, la risposta è affermativa nel caso fortunato di una variabile, ma non ha niente a che fare col Teorema 5.7, infatti si può ragionare così:

se $f \in C^1(I)$ e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, per continuità la f' deve mantenere sempre lo stesso segno, di conseguenza f è strettamente monotona e quindi invertibile su tutto I , con inversa necessariamente differenziabile e soddisfacente la solita formula.

Il fatto che sia fondamentale far intervenire la monotonia per il passaggio dall'invertibilità locale a quella globale, che è poi la vera invertibilità, lo si vede subito con un semplice controesempio, ancora in una variabile, ma a valori in \mathbf{R}^2 . La funzione $f(t) = e^{it}$, con $t \in \mathbf{R}$, trasforma l'asse reale nella circonferenza unitaria avvolgendolo su di essa infinite volte, in quanto periodica non può essere iniettiva. Però è di classe C^∞ e $f'(t) = ie^{it} \neq 0$. Possiamo solo dire che ogni $t \in \mathbf{R}$ ammette un intorno $]t - \delta, t + \delta[$ che ha per immagine un arco della circonferenza con cui la corrispondenza stabilita da f è biunivoca, in definitiva che è localmente invertibile.

In più variabili questo è proprio ciò che accade in generale, come esempio se ne può prendere uno simile. La funzione $w = (u, v) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{0\}$ definita da

$$(5.4) \quad \begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y \\ v(x, y) = e^x \sin y, \end{cases}$$

che vista come funzione di variabile complessa non è altro che l'esponenziale $w(z) = e^z$, non è invertibile a causa della periodicità lungo l'asse y , però è localmente invertibile perché $w'(z) = e^z \neq 0$. Ma come si traduce questa condizione se si considera la w come funzione reale? La risposta ci viene dal caso lineare. Se $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ è lineare, $f(x) = Ax$, certamente appartiene a $C^1(\mathbf{R})$ e $\nabla f(x) = A$, quindi f è invertibile se e solo se $\det A = \det \nabla f(x) \neq 0$. Ebbene, questa è la condizione giusta anche nel caso non lineare, però è solo sufficiente e implica solo l'invertibilità locale. Per ottenere l'inversa locale della (5.4) calcoliamoci il gradiente e il suo determinante

$$\nabla w(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det \nabla w(x, y) = e^{2x} \neq 0.$$

L'inversa locale $z(u, v)$ ha per gradiente la matrice $\nabla z = (\nabla w)^{-1}$

$$\begin{aligned}\nabla z &= e^{-2x} \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos y & e^{-x} \sin y \\ -e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2 + v^2} & \frac{v}{u^2 + v^2} \\ \frac{-v}{u^2 + v^2} & \frac{u}{u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

in cui si riconoscono per righe le derivate parziali delle funzioni $x(u, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2}$ e $y(u, v) = \arg(u, v)$, le parti reale e immaginaria di $z = \log w$ che è l'inversa locale di $w = e^z$. Analogo ragionamento per l'inversa locale delle coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \vartheta \\ x_2 = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Calcoliamo l'inversa del gradiente

$$(\nabla x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\frac{\sin \vartheta}{\rho} & \frac{\cos \vartheta}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Alle righe di questa matrice, i gradienti di ρ e di ϑ , sono associati i differenziali

$$d\rho = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{e} \quad d\vartheta = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

in cui si riconosce la variazione d'angolo (2.24).

Definizione 5.9 - Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$ due aperti e $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ di classe C^1 . Diciamo che f è un **diffeomorfismo** se è bigettiva e $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ è di classe C^1 .

Definizione 5.10 - Diciamo che f è un **diffeomorfismo locale** se per ogni $x \in \Omega_1$ esistono un intorno $U \in \mathcal{S}(x)$ ed un intorno $V \in \mathcal{S}(f(x))$ tale che $f|_U : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo.

Nell'esempio precedente il diffeomorfismo è solo locale. Il seguente risultato dà una condizione sufficiente affinché una funzione sia un diffeomorfismo locale.

Teorema 5.11 - Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$ due aperti e $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una funzione di classe C^1 tale che $\det \nabla f(x_0) \neq 0$ per un certo $x_0 \in \Omega_1$. Allora esistono un intorno $U \in \mathcal{S}(x_0)$ ed un intorno $V \in \mathcal{S}(y_0)$, con $y_0 = f(x_0)$, tale che $f|_U : U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo e

$$\nabla f^{-1}(y) = [\nabla f(f^{-1}(y))]^{-1} \quad \forall y \in V.$$

Dimostrazione. Sia $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbf{R}^n$ la funzione $F(x, y) = y - f(x)$, la quale si annulla per $y = f(x)$. Poiché $\nabla_x F(x_0, y_0) = -\nabla f(x_0)$ è non singolare, per il Teorema 5.7 esistono un intorno V di y_0 , un intorno U di x_0 ed una funzione $g : V \rightarrow U$ in $C^1(V)$ tali che $F(g(y), y) = 0$ in V . Per l'unicità di g ed essendo $F(x, f(x)) = 0$ in U , si ha immediatamente $g = f^{-1}$. Inoltre

$$\begin{aligned}\nabla g(y) &= \nabla f^{-1}(y) = -[\nabla_x F(f^{-1}(y), y)]^{-1} \nabla_y F(f^{-1}(y), y) \\ &= \nabla f(x)|_{x=f^{-1}(y)} I = \nabla f(f^{-1}(y)).\end{aligned}$$

□

Nel Teorema delle funzioni implicite si passa dalla descrizione globale di un insieme Γ , il luogo di zeri di F , ad una sua descrizione locale. Supponiamo che le ipotesi siano verificate in tutti i punti di Γ . In tal caso ogni punto $x \in \Gamma$ ha un intorno W tale che $W \cap \Gamma$ è il sostegno di una parametrizzazione regolare e bigettiva che raramente, però, è la stessa per tutti gli intorni. In generale nessuna di queste può essere estesa fino a diventare una parametrizzazione globale, a meno che non si rinunci alla bigettività o alla continuità dell'inversa.

Se ad esempio vogliamo rendere bigettiva la funzione $\varphi(t) = e^{it}$, a valori nella circonferenza $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, dobbiamo restringerla all'intervallo $[0, 2\pi[$, ma l'inversa di questa non è continua, lo si vede in tanti modi, se lo fosse l'immagine della circonferenza, che è compatta, dovrebbe essere un intervallo compatto, non semiaperto. Allora scegliamo come dominio l'intervallo aperto $]0, 2\pi[$, ma in questo modo non viene descritta tutta la circonferenza, viene escluso il punto $(1, 0)$. Per descriverla tutta è necessario considerare insieme alla φ un'altra parametrizzazione che deve escludere altri punti, ma includere $(1, 0)$, per esempio $\psi(t) = e^{it}$ con $t \in]-\pi, \pi[$. Risulta che il cambio di parametrizzazione $\psi^{-1} \circ \varphi :]0, 2\pi[\rightarrow]-\pi, \pi[$, che impegna la parte comune di Γ , è un diffeomorfismo.

Una parametrizzazione della sfera unitaria $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ è la seguente

$$\begin{cases} x_1 = \cos u \cos v \\ x_2 = \cos u \sin v \\ x_3 = \sin u, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

È evidente che ai valori $v = 0, 2\pi$ corrisponde lo stesso meridiano, inoltre si hanno i due poli $u = \pi/2, -\pi/2$ per tutti i valori di v , d'altra parte, lo sappiamo per esperienza, è impossibile incartare un pallone con un solo foglio in modo che l'aderenza sia perfettamente bigettiva. Facendo variare i parametri sugli intervalli aperti si rinuncia ad un meridiano e a due punti, ma se a tale parametrizzazione se ne affianca un'altra opportunamente definita e dello stesso tipo, si riesce a descrivere tutta la sfera. Un atlante geografico non è altro che un modo di descrivere localmente la superficie della Terra mappeggiando le varie porzioni su carte piane; alcune porzioni, gli intorni di cui si parla nel teorema intersecati con la superficie, possono avere intersezioni tra loro non vuote, si tratta di quei territori, un po' di confine, che compaiono sia in una mappa che in un'altra ad essa vicina.

Definizione 5.12 - Una *varietà differenziabile* in \mathbf{R}^n di dimensione l è un insieme $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ a cui sono associate una famiglia $\mathcal{A} = \{A_i\}$ di aperti in \mathbf{R}^l , una famiglia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di aperti in \mathbf{R}^n la cui unione ricopre Γ e, posto $\Gamma_i = \Gamma \cap U_i$, una famiglia $\Phi = \{\varphi_i\}$ di applicazioni bigettive $\varphi_i : \Gamma_i \rightarrow A_i$, con inversa differenziabile e jacobiano di rango massimo, tali che, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_j|_{\Gamma_i \cap \Gamma_j} \circ \varphi_i^{-1}|_{\Gamma_i \cap \Gamma_j} : A_i \rightarrow A_j$ sono diffeomorfismi. Le φ_i si chiamano *carte locali* e la famiglia Φ che esse formano si chiama *atlante*.

Per varietà compatte le famiglie di cui sopra possono essere ridotte a famiglie finite. Ciò è dovuto ad una definizione di insieme compatto più generale, rispetto a quella per successioni che abbiamo sempre usato, secondo la quale un insieme K è compatto se e solo se ogni famiglia di aperti che ricopre K ammette un sottoricoprimento finito di K .

Questo argomento meriterebbe una trattazione a parte, noi ci siamo limitati ad un assaggio.

5.3 Punti stazionari vincolati, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Consideriamo una funzione definita su un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ e un insieme $\Gamma \subset \Omega$ sostegno di una curva regolare $\gamma : I \rightarrow \Omega$. Se f è differenziabile, come possiamo definire un punto stazionario per $f|_{\Gamma}$? La domanda nasce dall'esigenza di trattare il problema dei massimi e minimi di una funzione in presenza di vincoli. Se un certo punto $x_0 \in \Gamma$ è di minimo per $f|_{\Gamma}$ e $x_0 = \gamma(t_0)$ allora t_0 è di minimo per $f \circ \gamma$ e se t_0 è interno ad I , o se I è un intervallo aperto, deve essere nulla in t_0 la derivata della funzione composta $f \circ \gamma$. Ricordando che

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad \forall t \in I,$$

è naturale introdurre la seguente definizione.

Definizione 5.13 - Se $\Gamma \subset \Omega$ è il sostegno di una curva regolare $\gamma : I \rightarrow \Omega$, con I aperto, $x_0 \in \Gamma$ è un **punto stazionario vincolato** per f se, scelto $t_0 \in I$ in modo che $\gamma(t_0) = x_0$, si ha $\nabla f(x_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

In un punto stazionario vincolato deve dunque risultare il gradiente di f ortogonale al vincolo. Nel caso piano, ad esempio, tale condizione di ortogonalità diventa

$$\frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial x_1} \gamma'_1(t_0) + \frac{\partial f(\gamma(t_0))}{\partial x_2} \gamma'_2(t_0) = 0,$$

oppure, se la curva è data come grafico $y = \varphi(x)$, diventa

$$\frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y} \varphi'(x) = 0.$$

Se infine la curva è data come luogo di zeri di una funzione $g(x, y)$ di classe C^1 , tale condizione si traduce nel parallelismo tra i vettori ∇f e ∇g , il secondo dei quali è sempre normale alla curva. Pertanto

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \text{ è stazionario per } f|_{\Gamma} \text{ se e solo se } \nabla f(x_0, y_0) \times \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

In modo equivalente

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \text{ è stazionario per } f|_{\Gamma} \text{ se e solo se } \exists \lambda \in \mathbf{R} : \nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

Il problema della ricerca dei punti stazionari vincolati ad una curva piana viene così ricondotto alla risoluzione del sistema di 2 equazioni a 2 incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) \times \nabla g(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

o alla risoluzione del sistema di 3 equazioni a 3 incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

comprendente il fattore incognito λ , detto *moltiplicatore di Lagrange*. Si perviene allo stesso sistema se si cercano i punti stazionari liberi della *funzione di Lagrange*, o *lagrangiana*, $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Se Γ è una curva nello spazio \mathbf{R}^3 la condizione di ortogonalità $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ impone a ∇f di appartenere al piano normale. Si tratta in questo caso di un vincolo

doppio, definito dunque da due condizioni del tipo $g_1(x) = 0$ e $g_2(x) = 0$, quindi il piano normale ha dimensione 2 ed è generato dai vettori non paralleli ∇g_1 e ∇g_2 . L'appartenenza al piano normale si traduce nel sistema di 3 equazioni a 3 incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x) \cdot \nabla g_1(x) \times \nabla g_2(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \end{cases}$$

o nel sistema di 5 equazioni a 5 incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \end{cases}$$

comprendente i due moltiplicatori di Lagrange λ_1 e λ_2 . Come sopra, questo sistema può essere ottenuto cercando i punti stazionari liberi della lagrangiana $\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)$.

Se invece di una curva abbiamo a che fare con una superficie regolare Γ in \mathbf{R}^3 , caso del vincolo semplice, ugualmente ∇f deve essere ad essa normale nei punti stazionari. Per la formula di derivazione della funzione composta $f(x(u))$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $u = (u_1, u_2)$, che già conosciamo

$$(5.5) \quad \frac{\partial}{\partial u_h} f(x(u)) = \nabla f(x(u)) \cdot \frac{\partial x(u)}{\partial u_h}$$

risulta che un punto è stazionario per f sul vincolo Γ se e solo se ∇f è ortogonale ai due vettori tangenti $\partial x / \partial u_1$ e $\partial x / \partial u_2$. Pertanto deve essere parallelo al gradiente della funzione g che ammette Γ come luogo di zeri. Si perviene così al sistema di 3 equazioni a 3 incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x) \times \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

o al sistema di 4 equazioni a 4 incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

ottenibile anche ricercando i punti stazionari liberi della lagrangiana $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.

Veniamo al caso più generale di una superficie regolare Γ l -dimensionale in \mathbf{R}^n , data quindi come luogo di zeri di una funzione $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ a $m = n - l$ componenti. Considerando una sua parametrizzazione regolare $x(u)$ in termini degli l parametri $u = (u_1, \dots, u_l)$, la condizione di stazionarietà si scrive come nella (5.5), eguagliata a 0, con $h = 1, \dots, l$ e significa l'ortogonalità tra ∇f e tutti gli l vettori tangenti $\partial x / \partial u_h$. Ne segue che ∇f appartiene allo spazio normale generato dai vettori ∇g_i e il metodo dei moltiplicatori di lagrange consiste nel cercare i punti stazionari liberi della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

dipendente da $n + m$ variabili. I valori richiesti sono le soluzioni $(x, \lambda) \in \mathbf{R}^{n+m}$ del sistema di $n + m$ equazioni a $n + m$ incognite

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Il significato di questo metodo sta nella possibilità di eliminare i vincoli penalizzando la funzione costo. In altre parole modifichiamo la funzione da ottimizzare con un costo aggiuntivo che in qualche modo conserva le informazioni sui vincoli attraverso le funzioni che li definiscono come luoghi di zeri. Un'interpretazione molto interessante dal punto di vista fisico è la seguente. Le configurazioni di equilibrio di un sistema vincolato con vincoli lisci e soggetto ad una sollecitazione conservativa $F = -\nabla V$ sono i punti stazionari vincolati dell'energia potenziale V . Essi si trovano anche risolvendo l'equazione di equilibrio

$$F + \phi = 0$$

dove ϕ è la sollecitazione vincolare incognita. Poiché i vincoli sono lisci ϕ è combinazione lineare, a coefficienti incogniti λ_i , dei vettori ∇g_i , base dello spazio normale. Pertanto l'equazione di equilibrio diventa

$$\begin{cases} -\nabla V(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Risolta rispetto a (x, λ) , saranno così determinate le configurazioni di equilibrio e le corrispondenti sollecitazioni vincolari.

Esempi

5.1 Calcolare la distanza tra due rette sghembe.

5.2 Trovare i punti stazionari di una forma quadratica sulla sfera unitaria.

5.3 Un punto materiale $P = (x, y, z)$ è vincolato senza attrito sulla curva Γ intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con il cono $z = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ ed è soggetto alla forza elastica $F = -k(P - O)$. Trovare le posizioni di equilibrio di P e le reazioni vincolari che agiscono su P in corrispondenza di tali posizioni.

L'intersezione Γ è non vuota perché il vertice del cono è interno alla sfera. Poniamo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ e $h(x, y, z) = x^2 + (y-1)^2 - z^2$ sul semispazio $z > 0$. Il prodotto vettoriale dei gradienti di queste due funzioni, che sono di classe C^1 , è dato da

$$\nabla g \times \nabla h = 2(x, y, z) \times 2(x, y-1, -z) = 4(z - 2yz, 2xz, -x)$$

e si annulla per $x = 0$ e $z = 0$, cioè nei punti della forma $(0, y, 0)$, e per $x = 0$ e $y = 1/2$ con z arbitrario, nei punti $(0, 1/2, z)$. Nessuno di questi appartiene a Γ , quindi l'intersezione delle due superfici è una curva regolare.

5.4 Studio globale dei luoghi di zeri

Il Teorema delle funzioni implicite ha carattere locale: da certe ipotesi valide in un punto dell'insieme degli zeri di una funzione si deducono

Capitolo 6

Calcolo integrale

6.1 L'integrale Riemann

Nel paragrafo introduttivo al calcolo integrale del testo [Lezioni di Analisi 1](#) viene descritto il concetto di area per una regione piana. Consigliamo il lettore di rivedere attentamente quel paragrafo perché ci serve adesso. In breve, a partire dall'area dei rettangoli si passa a quella dei triangoli e dei poligoni in quanto scomponibili in un numero finito di triangoli. Per estendere poi la nozione di area a nuove figure, più generali, non c'è altra via se non quella di definirla utilizzando approssimazioni della regione in esame dall'interno e dall'esterno, con poligoni contenuti e con poligoni che la contengono, in modo che le relative aree formino classi contigue di numeri reali. Vi sono diverse teorie in proposito, più o meno generali, più o meno soddisfacenti. Quella che abbiamo scelto, di Peano-Jordan, con l'integrazione di Riemann che ne segue, ha il difetto di non essere "completa" (in un senso ovviamente da precisare, intuitivamente è un po' come lavorare coi razionali invece che coi reali). La misura e l'integrazione di Lebesgue ne sarebbe il completamento naturale, più raffinata, più flessibile nei passaggi al limite e quindi più utile. Ma il nostro approccio ha il pregio di essere particolarmente semplice e intuitivo e allo stesso tempo applicabile ad una famiglia abbastanza vasta di insiemi e di funzioni da comprendere di sicuro quelli che ci servono per l'apprendimento delle regole fondamentali del calcolo integrale e le sue applicazioni. Una questione che nella nostra teoria, a differenza di quella di Lebesgue, rimane aperta è la caratterizzazione di *tutti* gli insiemi misurabili e di *tutte* le funzioni integrabili. Comunque riusciamo anche adesso in più variabili, analogamente a quanto fatto in una variabile, a dare qualche condizione sufficiente che ci permetta di individuarne classi importanti e questo ci basta.

In Analisi 1 abbiamo osservato che sono misurabili tutti e soli gli insiemi che hanno frontiera di misura nulla. Ora, non dobbiamo immaginare la frontiera di un insieme del piano sempre come una curva, ad esempio quella del quadrato unitario formato dai soli punti con coordinate razionali è tutto il quadrato pieno, razionali e non, nulla di più diverso da una curva. Ciò che invece possiamo sostenere è che le curve chiuse, o meglio i sostegni di curve rettificabili chiuse, sono accettabili come frontiere perché hanno area nulla e come tali delimitano regioni misurabili del piano. Per il Teorema 2.12 sono certamente rettificabili, in quanto sostegni di curve regolari, i luoghi di zeri di funzioni di due variabili di classe C^1 di cui si parla nei Teoremi 8.13 e 5.2. Qualora siano anche chiuse (o disposte consecutivamente, in numero finito, in modo da formare una curva regolare a tratti chiusa) delimitano insiemi misurabili. Ma è misurabile anche un *dominio normale* $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \alpha(x)\}$ con $\alpha \geq 0$ solo integrabile secondo Riemann, ma con grafico non necessariamente rettificabile, basta rivedere la definizione di integrale in termini delle funzioni step,

anche in questo caso il bordo ha area nulla.

Per verificare che una curva γ rettificabile di estremi A e B e di lunghezza ℓ ha area nulla, dividiamola in n curve di lunghezza ℓ/n con gli $n+1$ punti $P_0 = A, P_1, \dots, P_n = B$ e definiamo Q_n il quadrato di centro P_n e lato $2\ell/n$. L'area dell'unione di questi quadrati, che ricopre tutta la curva, è certamente minore della somma delle aree che vale $4\ell^2(n+1)/n^2$, ma questo numero può essere reso piccolo quanto si vuole pur di prendere n abbastanza grande. Assumere che un insieme misurabile debba avere come contorno una curva chiusa e rettificabile dà ora maggiore fondamento all'uso dell'integrale curvilineo 2.21 per calcolarne l'area.

Senza pretendere adesso di entrare nei dettagli in dimensione maggiore, ci limitiamo ad assumere come misurabili di \mathbf{R}^3 , o di \mathbf{R}^n , le regioni che hanno come frontiera sostegni di superfici, o ipersuperfici, chiuse di classe C^1 a tratti di cui abbiamo parlato nel Cap. 5.

Vediamo sommariamente la nozione di integrale in \mathbf{R}^n iniziando con le funzioni step, come nel caso di una variabile. Dal punto di vista formale non c'è nulla di nuovo, eccetto il fatto che al posto degli intervalli dobbiamo considerare unioni finite di rettangoli.

Un rettangolo R di \mathbf{R}^n è il prodotto cartesiano di n intervalli limitati

$$R = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \prod_{i=1}^n I_i = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in I_i\}$$

ed ha per misura $m(R)$ il prodotto delle lunghezze degli I_i . Un plurirettangolo P è una unione finita di rettangoli R_h , $1 \leq h \leq m$, ed ha per misura $m(P)$ la somma delle misure $m(R_h)$ se questi hanno a due a due intersezione vuota o solo parti del bordo in comune, in definitiva se $m(R_h \cap R_k) = 0$ con $h \neq k$.

Un insieme E limitato è detto *PJ-misurabile* se

$$\sup_{P \subset E} m(P) = \inf_{P \supset E} m(P)$$

e questo valore ne definisce la misura $m(E)$. Se E non è limitato diciamo che è misurabile se per ogni $r > 0$ è misurabile l'intersezione $E_r = E \cap B_r(0)$ ed esiste, finito o infinito, il limite

$$m(E) = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(E_r).$$

Della questione su quali sono gli insiemi PJ-misurabili abbiamo già parlato pocanzi dando una risposta (non del tutto completa).

L'integrale per una funzione step $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^k \alpha_h \chi_{R_h}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

con $\alpha_h \in \mathbf{R}$ e χ_{R_h} funzione caratteristica del rettangolo R_h , è il numero reale

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) dx = \sum_{h=1}^k \alpha_h m(R_h).$$

Proprietà ovvie della somma e del valore assoluto ci dicono che l'integrale è lineare, positivo (cioè positivo sulle funzioni positive), quindi crescente, e il valore assoluto dell'integrale non supera l'integrale del valore assoluto della funzione.

Indichiamo con $\mathcal{L}_0(\mathbf{R}^n)$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ limitate e a supporto compatto, cioè, ricordiamo, identicamente nulle al di fuori di un insieme

limitato. Siano $\mathcal{S}^-(f)$ e $\mathcal{S}^+(f)$ le classi delle funzioni step minoranti e maggioranti la f rispettivamente. Dalle proprietà precedenti segue subito che i loro integrali formano due classi $S^- = S^-(f)$ e $S^+ = S^+(f)$ separate di numeri reali.

Definizione 6.1 - Si chiamano *integrale inferiore* e *integrale superiore* di $f \in \mathcal{L}_0(\mathbf{R}^n)$ i due numeri

$$\int_{\mathbf{R}^n}^- f(x) dx = \sup S^- \quad e \quad \int_{\mathbf{R}^n}^+ f(x) dx = \inf S^+.$$

Se

$$\int_{\mathbf{R}^n}^- f = \int_{\mathbf{R}^n}^+ f$$

allora f è detta **integrabile secondo Riemann** e questo valore comune è l'**integrale di Riemann** di f , che indicheremo con la solita notazione

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx.$$

L'insieme delle funzioni Riemann-integrabili su \mathbf{R}^n verrà indicato con $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$.

Una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità, già vista in Analisi 1 e più maneggevole della definizione, è la seguente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{S}^-(f), \psi \in \mathcal{S}^+(f) : \int_{\mathbf{R}^n} (\psi - \varphi) dx < \varepsilon.$$

L'integrale soddisfa le seguenti proprietà che si dimostrano come in Analisi 1:

(f)1. se $f, g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ allora $f + g, \lambda f \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f + g) = \int_{\mathbf{R}^n} f + \int_{\mathbf{R}^n} g \quad e \quad \int_{\mathbf{R}^n} \lambda f = \lambda \int_{\mathbf{R}^n} f,$$

(f)2. se $f \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e $f \geq 0$ allora $\int_{\mathbf{R}^n} f \geq 0$,

(f)3. se $f \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ allora $|f| \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ e $|\int_{\mathbf{R}^n} f| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |f|$,

(f)4. se $f \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ allora $f^2 \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$,

(f)5. se $f, g \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ allora $fg \in \mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$.

Dunque l'insieme $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$ è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare, positivo (cioè positivo sulle funzioni positive), quindi crescente, su $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$.

La *media integrale* di f su E è il numero

$$\langle f \rangle_E = \frac{1}{m(E)} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \chi_E(x) dx$$

e valgono le disuguaglianze

$$\inf_E f \leq \langle f \rangle_E \leq \sup_E f,$$

inoltre, anticipando qua l'integrabilità delle funzioni continue come del resto ci aspettiamo, se E è connesso e f è continua su E esiste un punto $\xi \in E$ tale che

$$\langle f \rangle_E = f(\xi)$$

per il teorema dei valori intermedi Corollario 1.21.

Teorema 6.2 - Se $f \in \mathcal{L}_0(\mathbf{R}^n)$ è continua eccetto al più nei punti di un insieme di misura nulla allora è integrabile.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, si consideri un aperto A_ε contenente l'insieme di tutti i punti di discontinuità tale che $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Essendo f a supporto compatto, per il Teorema di Heine è uniformemente continua su $\mathbf{R}^n - A_\varepsilon$. Sia $\delta(\varepsilon) > 0$ il modulo di continuità uniforme della f . Scelto un compatto K al di fuori del quale f è identicamente nulla, consideriamo una partizione del compatto $K - A_\varepsilon$ con una famiglia finita $E_i, i = 1, \dots, h$, di insiemi misurabili tali che $\text{diam } E_i < \delta(\varepsilon)$. Definiamo le funzioni step

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^h \ell_i \chi_{E_i}(x) + \ell \chi_{A_\varepsilon}(x) \quad \text{e} \quad \psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^h L_i \chi_{E_i}(x) + L \chi_{A_\varepsilon}(x)$$

dove

$$\ell_i = \inf_{E_i} f, \quad \ell = \inf_{\mathbf{R}^n} f, \quad L_i = \sup_{E_i} f, \quad L = \sup_{\mathbf{R}^n} f.$$

Ovviamente $\varphi \leq f \leq \psi$ e

$$\int (\psi - \varphi) = \sum_{i=1}^h (L_i - \ell_i) m(E_i) + (L - \ell) m(A_\varepsilon) < \varepsilon \sum_{i=1}^h m(E_i) + (L - \ell) \varepsilon \leq (m(K) + L - \ell) \varepsilon.$$

Pertanto f è integrabile. □

Indichiamo con $\mathcal{L}(E)$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni limitate sull'insieme E che assumiamo sempre PJ-misurabile.

Definizione 6.3 - Una funzione $f \in \mathcal{L}(E)$ è detta **Riemann-integrabile** se la funzione in $\mathcal{L}_0(\mathbf{R}^n)$

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è Riemann-integrabile secondo la Definizione 6.1 e si pone

$$\int_E f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f_0(x) dx.$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni Riemann integrabili su E verrà indicato con $\mathcal{R}(E)$.

Le proprietà dell'integrabilità e dell'integrale in questo senso sono ovviamente le stesse di quelle già viste nella Definizione 6.1.

6.2 Formula di riduzione

Gli integrali delle funzioni di più variabili vengono anche detti *integrali multipli* e talvolta può risultare efficace l'uso di una notazione in cui il simbolo d'integrale viene ripetuto tante volte quante sono le variabili, pari alla dimensione dello spazio. In due o tre variabili, per esempio, si chiama *integrale doppio* o *triplo* e si scrive

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy, \quad \iiint_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz.$$

L'uso di questa notazione nasce dal fatto che questi integrali possono essere calcolati con successive integrazioni in una sola variabile, una per volta, applicando i metodi acquisiti nel corso di Analisi 1. Vediamo come ridurre a integrazioni iterate una funzione di due variabili su un rettangolo.

Teorema 6.4 (Formula di riduzione) - Sia $f \in \mathcal{R}(R)$ dove $R = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo di \mathbf{R}^2 . Se per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ è integrabile su $[c, d]$ allora anche la funzione

$$x \rightarrow \int_c^d f(x, y) dy$$

è integrabile su $[a, b]$ e

$$(6.1) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la formula dapprima per una funzione step e poi per la f_0 , il prolungamento nullo della f su $\mathbb{C}R$. Data la forma particolare del dominio d'integrazione, un rettangolo, non è restrittivo supporre nulla su $\mathbb{C}R$ ogni funzione step, minorante o maggiorante che sia della f_0 , quindi costruita a partire da R visto come plurirettangolo. Consideriamo le suddivisioni $x_0 = a < x_1 < \dots < x_h = b$ e $y_0 = c < y_1 < \dots < y_k = d$. Posto $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, una funzione step del tipo

$$\varphi(x, y) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \chi_{R_{ij}}(x, y)$$

ha integrale

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} \varphi(x, y) dx dy &= \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} m(R_{ij}) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^h (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} (y_j - y_{j-1}) = \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} \varphi(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Per la f_0 , scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, siano φ, ψ funzioni step tali che $\varphi \leq f \leq \psi$ e

$$\iint_{\mathbf{R}^2} (\psi - \varphi) dx dy < \varepsilon.$$

Ovviamente si ha

$$(6.2) \quad \iint_{\mathbf{R}^2} \varphi(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbf{R}^2} f_0(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbf{R}^2} \psi(x, y) dx dy.$$

Inoltre

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x, y) dy \leq \int_{\mathbf{R}} f_0(x, y) dy \leq \int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) dy \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

dove a sinistra e a destra compaiono funzioni step in x che soddisfano

$$\int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) dy \right] dx = \iint_{\mathbf{R}^2} (\psi - \varphi) dx dy < \varepsilon.$$

Allora $x \rightarrow \int_{\mathbf{R}} f_0(x, y) dy$ è integrabile e

$$(6.3) \quad \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} \varphi(x, y) dy \right] dx \leq \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} f_0(x, y) dy \right] dx \leq \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) dy \right] dx.$$

Dal confronto delle (6.2) e (6.3) segue

$$\left| \iint_{\mathbf{R}^2} f_0(x, y) dx dy - \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} f_0(x, y) dy \right] dx \right| < \varepsilon$$

e quindi la (6.1) per l'arbitrarietà di ε . □

In generale, da ora in poi, indicheremo il secondo membro della (6.1) con la notazione

$$\int dx \int f(x, y) dy.$$

Non c'è (quasi) bisogno di precisare che questo risultato vale anche in \mathbf{R}^3 e in qualunque spazio \mathbf{R}^n applicando lo stesso ragionamento più volte, una per ogni variabile, o anche per gruppi di variabili. Senza modificare praticamente nulla, se non qualche dettaglio formale, in questo teorema si può interpretare $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$ e scrivere la (6.1) nella forma

$$\iint_{R_m \times R_n} f(x, y) dx dy = \int_{R_n} \left[\int_{R_m} f(x, y) dy \right] dx = \int_{R_n} dx \int_{R_m} f(x, y) dy$$

dove R_m e R_n sono rettangoli m o n -dimensionali.

Nel caso particolare di una funzione prodotto di variabili diverse, $f(x, y) = g(x)h(y)$, la formula di riduzione diventa semplicemente il prodotto di due integrali

$$\iint_{R_m \times R_n} f(x, y) dx dy = \int_{R_n} g(x) dx \int_{R_m} h(y) dy.$$

Un'altra osservazione riguarda la forma del dominio d'integrazione. Se al posto di un rettangolo c'è un insieme E misurabile e limitato basta scegliere un rettangolo R che lo contenga e prolungare la f con valore nullo su $R - E$. Allora la (6.1) rimane valida con E a primo membro e le proiezioni ortogonali E_x ed E_y sugli assi al posto dei due intervalli a secondo membro. Un caso frequente è quello in cui E è la regione piana compresa tra i grafici di due funzioni α e β che assumiamo nella relazione $\alpha \leq \beta$. Se $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ si ha

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Similmente in \mathbf{R}^3 se $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ si ha

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz$$

e se $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ha la forma $E = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in D, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ si ha

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_D dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Nel metodo di riduzione si riconosce chiaramente il Principio di Cavalieri per il quale il volume di un solido può essere ottenuto integrando l'area delle sezioni. L'idea è quella di tagliarlo a fette di spessore infinitesimo e poi di sommare le aree delle varie fette moltiplicate ciascuna per lo spessore. Dato $\Omega \in \mathbf{R}^3$, si può ad esempio considerare la sezione Ω_x ottenuta intersecandolo con un piano ortogonale all'asse x , calcolarne l'area e poi integrare questa lungo x finché non diventi vuota. Il metodo è particolarmente efficace per i solidi di rotazione.

Rotazione completa del grafico attorno alla retta $y = 0$ - Se si fa ruotare il grafico di $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ attorno all'asse x il volume del solido Ω così ottenuto è

$$m(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Rotazione completa del grafico attorno alla retta $x = 0$ - In questo caso supponiamo che il dominio di f sia un intervallo $[a, b]$ di numeri positivi. Allora il volume risulta l'integrale sulla corona circolare $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ della funzione $g(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Esempi

6.1 Vogliamo calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa del grafico della funzione e^{-x} attorno all'asse x per $x > 0$. Fissato $x > 0$ l'area della sezione è πe^{-2x} , dunque il volume vale

$$\pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

6.2 Si fa ruotare dell'angolo giro attorno all'asse y il grafico della funzione $f(x) = \cos x$ per $0 \leq x \leq \pi/2$. Il volume è

$$\int_{B_{\pi/2}(0)} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Per concludere, tra le ipotesi del Teorema 6.4 ne salta agli occhi una che sembra ridondante. Dopo aver supposto che f fosse integrabile sul rettangolo R , abbiamo richiesto che fosse integrabile anche come funzione della sola y con x fissato. Questa seconda ipotesi non è conseguenza della prima? La funzione sul quadrato unitario

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1/2 \text{ e } y \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è integrabile su R perché discontinua solo su $\{1/2\} \times [0, 1]$ che ha area nulla, ma non è integrabile la funzione di una variabile $y \rightarrow f(1/2, y)$ già nota dall'Analisi 1 col nome di funzione di Dirichlet. Nella teoria più generale di Lebesgue questo inconveniente non c'è, ognuna delle tre condizioni di integrabilità dell'enunciato del Teorema 6.4 implica le altre due.

6.3 Funzione densità e cambio di variabile

Oltre alle misure geometriche degli insiemi, lunghezze, aree, volumi, ve ne sono infinite altre. Senza entrare in dettagli formali, una funzione additiva rispetto all'unione disgiunta, definita su una famiglia di opportuni "misurabili", può essere considerata una misura. Prendiamo ad esempio la massa dei corpi materiali, visti come regioni dello spazio. La massa di due o più corpi è la somma delle singole masse. Certamente né la massa, né tante altre misure soddisfano le stesse proprietà della misura di Peano-Jordan, ma con essa ha in comune certi requisiti minimi necessari per essere considerate delle misure. Addirittura esistono misure non necessariamente positive come la massa, ma munite di un segno: in un corpo elettricamente carico sono presenti cariche elettriche positive e negative e la misura, la carica complessiva di quel corpo, risente delle due distribuzioni essendone la somma algebrica. Ma limitiamoci al caso positivo e, qualora ve ne siano due definite sugli stessi insiemi, vediamo che relazione possiamo definire tra di loro e come si passa da una all'altra. Possono essere di natura qualsiasi, ma tanto per fare un caso concreto, o, se si vuole, per convenzione, supponiamo che una delle due sia ancora la misura m di Peano-Jordan, mentre l'altra sia la massa μ . Il rapporto $\mu(E)/m(E)$, con E misurabile, rappresenta la densità media della massa contenuta in E . Per definire la densità puntuale bisogna effettuare un passaggio al limite. A seconda della dimensione si parla di densità lineare per

masse distribuite su curve o su intervalli di \mathbf{R} , superficiale se su superfici o in \mathbf{R}^2 , di volume se in \mathbf{R}^3 , ma dobbiamo escludere il caso di masse puntiformi, cioè concentrate in singoli punti, perché non ammettono come densità una funzione nel suo significato corrente.

Fissato un punto $x \in \mathbf{R}^n$, consideriamo la massa e l' n -volume della palla $B_\varepsilon(x)$. Se esiste finito il limite

$$(6.4) \quad p(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{m(B_\varepsilon(x))}$$

la funzione $p(x)$ così definita si chiama *densità di massa* nel punto x , o comunque *densità della misura μ rispetto alla misura m* in x .

La teoria matematica che riguarda questo argomento non è affatto elementare e non abbiamo nessuna intenzione di esporla col dovuto rigore, ma solo di rimanere ad un livello intuitivo. Per questo è bene largheggiare con la regolarità in modo da manipolare con maggiore disinvoltura possibili insiemi e funzioni. Supponiamo dunque che la densità definita nella (6.4) sia una funzione continua.

Se $p : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è stata assegnata a priori come funzione continua, quindi localmente integrabile, possiamo vedere l'integrale come funzione del dominio e definire la misura

$$(6.5) \quad \mu(E) = \int_E p(x) dx.$$

Allora è evidente che p è la densità di μ rispetto a m perché per il teorema della media per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\xi_\varepsilon \in B_\varepsilon(x)$ tale che

$$\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{m(B_\varepsilon(x))} = p(\xi_\varepsilon)$$

ed essendo p continua $p(\xi_\varepsilon) \rightarrow p(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Questo ragionamento ci permette di affermare che la (6.5) implica la (6.4), cioè se la massa di un insieme è l'integrale di una funzione su quell'insieme allora tale funzione ne è la densità.

Ma vale il viceversa? Se p è la densità di μ rispetto a m nel senso della (6.4) possiamo rappresentare μ in forma integrale come nella (6.5) su ogni insieme misurabile E ? A questa domanda non è facile rispondere e se anche lo fosse non è chiaro sotto quali ipotesi su queste due misure si possa ottenere una densità p continua. Tuttavia, per rimanere a livello intuitivo, possiamo osservare che su un plurirettangolo, unione di rettangoli R_{ij} , i valori $\mu(R_{ij})/m(R_{ij})$ definiscono una funzione step e quando un certo dominio misurabile E , per esempio un aperto, viene approssimato dall'interno e dall'esterno da famiglie di plurirettangoli le relative funzioni step hanno integrali convergenti verso l'integrale di una funzione $p(x)$ integrabile. Se poi è continua non lo possiamo stabilire, ma che sia integrabile ce lo garantisce il modo stesso in cui è stata costruita.

Così come abbiamo definito le funzioni Riemann-integrabili, cioè rispetto alla misura m di P-J, possiamo in modo simile trattare l'integrabilità rispetto a μ , l'integrabilità cioè di funzioni definite in termini della massa, come baricentri, momenti d'inerzia ecc. Ma se la massa è espressa da una densità questi integrali si possono convertire negli integrali usuali

$$\int_E f(x) d\mu = \int_E f(x)p(x) dx.$$

Particolarmente semplice è il caso in cui la densità è costante, o corpo omogeneo, in cui p coincide col rapporto tra la massa totale μ e la misura totale m , cioè $p = \mu/m$. Allora si ha

$$\int_E f(x) d\mu = \frac{\mu}{m} \int_E f(x) dx.$$

Talvolta conviene trasformare il dominio d'integrazione in un altro, con un'opportuna applicazione invertibile, su cui il calcolo dell'integrale risulti più facile. A tale scopo si può usufruire di una formula del cambio di variabile che generalizza quella già vista in Analisi 1.

Teorema 6.5 - Siano Ω un aperto di \mathbf{R}^n , $\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ un diffeomorfismo con $\det \nabla \varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Omega$ e $f : \varphi(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ integrabile. Allora

$$(6.6) \quad \int_{\varphi(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) |\det \nabla \varphi(x)| dx.$$

Dimostrazione. Dapprima vediamo come si trasforma la misura dimostrando la (6.6) con $f = 1$

$$(6.7) \quad m(\varphi(\Omega)) = \int_{\Omega} |\det \nabla \varphi(x)| dx.$$

Nel caso di φ lineare, $\varphi(x) = Ax$ con A matrice costante, la formula da dimostrare è

$$(6.8) \quad m(\varphi(\Omega)) = |\det A| m(\Omega).$$

Se $\varphi(x) = Rx$ con R trasformazione unitaria, quindi un'isometria, la (6.8) è ovvia perché R ha determinante di modulo 1 e le misure di Ω e della sua immagine coincidono. Se $\varphi(x) = Ux$ con U simmetrica e definita positiva esistono n autovalori $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, contati con la loro molteplicità, e una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ di autovettori. Questi formano un cubo unitario Q , ma siccome i vettori trasformati $U\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ formano un parallelepipedo retto $\varphi(Q)$, la sua misura vale

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det U.$$

Per il carattere lineare di φ

$$\frac{m(\varphi(\Omega))}{m(\Omega)} = \frac{m(\varphi(Q))}{m(Q)} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det U,$$

quindi anche per $\varphi(x) = Ux$ vale la (6.8). Se infine l'applicazione lineare φ è qualunque, basta ricordare il Teorema 1.10 di decomposizione polare per il quale $A = RU$ per opportuni R ortogonale e U simmetrico definito positivo e la (6.8) è dimostrata. Ovviamente questo ragionamento comprende il caso di una φ affine, $\varphi(x) = Ax + b$, essendo b il vettore che rappresenta una traslazione, una presenza del tutto irrilevante.

Il caso non lineare lo analizziamo in \mathbf{R}^2 . Prendiamo una generica $\varphi \in C^1(\Omega)$ invertibile e con $\det \nabla \varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Non è restrittivo supporre $0 \in \Omega$ e $\varphi(0) = 0$, dato che a questo caso ci si può ricondurre mediante traslazioni. Sviluppiamo φ secondo la formula di Taylor col resto di Lagrange

$$\varphi(x) = \nabla \varphi(\xi)x = \nabla \varphi(0)x + (\nabla \varphi(\xi) - \nabla \varphi(0))x = Ax + (A(\xi) - A)x.$$

La φ trasforma il rettangolo R di lati h_1 e h_2 paralleli agli assi in un poligono $\varphi(R)$ delimitato dai 4 lati curvilinei che sono le immagini dei 4 lati di R . Invece l'applicazione lineare $\psi(x) = Ax$, che è la parte lineare di φ , trasforma R in un parallelogramma. Poiché φ ha derivate continue, quindi uniformemente continue in un compatto di Ω che contiene R , fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se R è sufficientemente piccolo, con diametro $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta$, la distanza tra lo jacobiano in un punto e lo jacobiano in un altro punto è minore di ε , in particolare

$$|A(\xi)x - Ax| \leq \|A(\xi) - A\| |x| < \varepsilon \delta.$$

Siccome la distanza tra due punti immagine dello stesso punto tramite le due applicazioni è minore di $\varepsilon\delta$, se si copre il bordo di $\psi(R)$ con una striscia di larghezza $\varepsilon\delta$ essa coprirà anche il bordo di $\varphi(R)$. Dunque la differenza delle aree $|m(\varphi(R)) - m(\psi(R))|$ non supera l'area di questa striscia. Per ottenerla bisogna moltiplicare lo spessore $\varepsilon\delta$ per il perimetro, ma esso sarà minore di $K\delta$ dove K è una costante che maggiora le 4 componenti di $\nabla\varphi$. Dunque si ha

$$m(\varphi(R)) = m(\psi(R)) + \sigma$$

dove $|\sigma| < K\varepsilon\delta^2$. Allora, essendo $h_1h_2 \sim \delta^2$,

$$\frac{m(\varphi(R))}{h_1h_2} \sim \frac{m(\psi(R))}{h_1h_2} = |\det A|$$

nel senso che

$$\left| \frac{m(\varphi(R))}{m(R)} - |\det A| \right| < K\varepsilon,$$

pertanto

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{m(\varphi(R))}{m(R)} = |\det A|$$

che funge da densità in 0. Ma il ragionamento fatto si può ripetere in ogni punto x , quindi, da quanto detto nella prima parte del paragrafo, si ha

$$\int_{\varphi(E)} dy = \int_E |\det \nabla\varphi(x)| dx.$$

□

6.4 Integrali superficiali

Applichiamo la formula del cambio di variabile al calcolo dell'area del sostegno di una superficie in \mathbf{R}^3 . Intendiamo ora per *superficie regolare* un'applicazione $\varphi: A \rightarrow \Omega$, con A chiusura di un aperto limitato (quindi compatto) di \mathbf{R}^2 , tale che $\varphi \in C^1(A)$ e $\nabla\varphi$ ha rango massimo. Ciò equivale a dire che le due colonne di $\nabla\varphi$, che sono i due vettori tangenti φ_u e φ_v , non sono paralleli così che il loro prodotto vettoriale non sia nullo.

Indichiamo con $\Gamma = \varphi(A)$ il sostegno della superficie e con Γ_ε il solido che si ottiene ingrossando Γ dello spessore ε

$$\Gamma_\varepsilon = \{\varphi(u, v) + tn \mid (u, v) \in A, 0 \leq t \leq \varepsilon\}$$

dove $n = \text{vers}(\varphi_u \times \varphi_v)$ è il versore normale a Γ . Se definiamo, com'è naturale, l'area di Γ come il limite del volume di Γ_ε diviso per lo spessore ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Gamma) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(\Gamma_\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dt \int_A |(\varphi_u + t n_u) \times (\varphi_v + t n_v) \cdot n| dudv \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A \left| |\varphi_u \times \varphi_v| + \frac{\varepsilon}{2}(\varphi_u \times n_v + n_u \times \varphi_v) \cdot n + \frac{\varepsilon^2}{3}(n_u \times n_v \cdot n) \right| dudv \\ &= \int_A |\varphi_u \times \varphi_v| dudv = \int_\Gamma d\sigma \end{aligned}$$

interpretando $d\sigma = |\varphi_u \times \varphi_v| dudv$ come l'elemento "infinitesimo" di area. Posto $E = |\varphi_u|^2$, $G = |\varphi_v|^2$ e $F^2 = (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2$, si ottiene l'espressione usata spesso

$$|\varphi_u \times \varphi_v| = \sqrt{|\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

A questo punto possiamo definire anche l'integrale di superficie, o superficiale, di una funzione. Dati Ω aperto in \mathbf{R}^3 , $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, che assumiamo continua per semplicità e Γ sostegno di una superficie regolare $\varphi : A \rightarrow \Omega$ come sopra, quindi Γ è compatto, definiamo l'integrale di superficie nel seguente modo

$$\int_{\Gamma} f d\sigma = \int_A f(\varphi(u, v)) |\varphi_u \times \varphi_v| dudv.$$

Esempi

6.3 Calcoliamo l'area della superficie elicoidale Γ , sostegno della superficie $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, con $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2\pi$. Essendo

$$\nabla\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $|\varphi_u \times \varphi_v| = u\sqrt{2}$, quindi

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u du = \pi\sqrt{2}.$$

Nel caso di una superficie cartesiana $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = h(x, y)\}$, definita $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$, si ha

$$|\varphi_x \times \varphi_y| = \sqrt{1 + |Dh(x, y)|^2}.$$

6.5 Integrali impropri

Vogliamo estendere la nozione di integrale alle funzioni non limitate o non a supporto compatto. Per semplicità assumiamo che il dominio di integrazione sia un aperto, invece che un generico insieme misurabile. Poiché le funzioni che trattiamo sono sempre a valori finiti, nel caso che una certa $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, non sia limitata possiamo sempre supporre che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un insieme misurabile U_ε di misura $m(U_\varepsilon) < \varepsilon$ tale che f sia limitata su $\Omega_\varepsilon = \Omega - U_\varepsilon$ e poi procedere con un passaggio al limite, per $\varepsilon \rightarrow 0$, come in Analisi 1. Se ad esempio f non è limitata nell'intorno di un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$ possiamo isolare questa singolarità con una famiglia di palle $B_\varepsilon(x_0)$, assumere che sia integrabile su ogni $\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon(x_0)$ e definirne poi l'integrale come limite

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx$$

ammesso che esista. Analogamente, se Ω non è limitato se ne può considerare l'intersezione $\Omega_r = \Omega \cap B_r(0)$ e definire

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_r} f(x) dx,$$

sempre che il limite esista. Definire però l'integrale improprio in questo modo non è accettabile perché il suo valore dipenderebbe dalla famiglia degli insiemi approssimanti. Per calcolare ad esempio l'integrale della funzione $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ su $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, il I quadrante, possiamo invaderlo con palle di centro 0 e raggio r su ognuna delle quali l'integrale vale

$$\int_{\Omega \cap B_r(0)} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^r \rho \sin \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{4}(1 - \cos r^2)$$

e poi passare al limite per $r \rightarrow +\infty$, ma in questo caso non esiste. Se invece si integra sui quadrati $Q_r = [0, r] \times [0, r]$ il limite c'è

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{Q_r} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{Q_r} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx dy \\ &= 2 \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \sin x^2 dx \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \cos x^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \end{aligned}$$

e vale il doppio del prodotto dei due integrali (uguali) di Fresnel, già incontrati in Analisi 1, di cui abbiamo dedotto la convergenza dal Criterio di Abel-Dirichlet. Più avanti saremo in grado di calcolarli esplicitamente.

Per rendere indipendente il valore dell'integrale dalla scelta dei domini approssimanti dobbiamo precisarlo nella definizione e lo facciamo simultaneamente per le funzioni non limitate e per quelle non a supporto compatto.

Definizione 6.6 - Una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, eventualmente non limitata e con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ eventualmente non limitato, viene detta **integrabile in senso improprio** se per ogni $M_1, M_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni famiglia di aperti limitati $\mathcal{U} = \{U_r\}$ tali che $\cup_{r>0} U_r = \mathbf{R}^n$ la funzione $f_{M_1, M_2, r} = f(x) \chi_{M_1, M_2, r}(x)$, essendo

$$\chi_{M_1, M_2, r}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } M_1 \leq f(x) \leq M_2 \text{ e } x \in U_r \cap \Omega \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

è Riemann-integrabile ed esiste finito e indipendente dalla scelta di \mathcal{U} il limite

$$\lim_{\substack{M_1 \rightarrow -\infty \\ M_2 \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow +\infty}} \int_{\mathbf{R}^n} f_{M_1, M_2, r}(x) dx.$$

Questo numero si chiama **integrale improprio** di f e si indica con la solita notazione di integrale della f .

È ovvio che una funzione già integrabile sia anche integrabile in senso improprio, quindi si tratta di una generalizzazione. Riguardo le proprietà algebriche, osserviamo che il prodotto di due funzioni integrabili in questo senso non è detto che sia integrabile e che il modulo di una funzione integrabile può non essere integrabile.

Se f ha segno costante, per esempio $f \geq 0$, il limite che definisce l'integrale non dipende dalla scelta degli insiemi U_r e riguardo gli M_i , su M_1 non c'è nulla da dire, possiamo assumerlo nullo, mentre $M_2 = M > 0$ rimane arbitrario. Per verificare questa affermazione, scegliamo per \mathcal{U} la famiglia di palle $\mathcal{B} = \{B_R(0)\}_{R>0}$ e osserviamo che l'integrale è crescente come funzione di insieme rispetto all'inclusione, quindi esiste il limite

$$(6.9) \quad \lim_{\substack{M \rightarrow +\infty \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\mathbf{R}^n} f_{M, R}(x) dx = \sup_{M, R > 0} \int_{\mathbf{R}^n} f_{M, R}(x) dx.$$

D'altra parte, per ogni $U_r \in \mathcal{U}$ esiste una palla $B_R(0)$ che lo contiene e siccome gli U_r invadono tutto \mathbf{R}^n esiste $r' > 0$ tale che $U_{r'} \supset B_R(0)$, quindi

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_{M, r} dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} f_{M, R} dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} f_{M, r'} dx$$

e questo dimostra che il limite non dipende dalla scelta di questi insiemi.

Definizione 6.7 - Se $f \geq 0$ il limite nella (6.9) esiste sempre e, nel caso sia finito, diciamo che f è integrabile e lo assumiamo come valore dell'integrale. Ovviamente la famiglia \mathcal{B} può essere sostituita da un'arbitraria famiglia, o da una successione, crescente di insiemi la cui unione è tutto \mathbf{R}^n .

Per fare un esempio, sappiamo dall'Analisi 1 che la funzione e^{-x^2} è integrabile su $[0, +\infty[$, ma ora abbiamo gli strumenti per calcolarne l'integrale. Applichiamo le considerazioni appena fatte per mostrare l'integrabilità della funzione $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ sul primo quadrante $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$. Su ogni quadrato $Q_r = [0, r] \times [0, r]$ si ha

$$\int_{Q_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{Q_r} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_0^r e^{-x^2} dx \int_0^r e^{-y^2} dy = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2$$

dove l'integrale in parentesi ammette limite finito per $r \rightarrow +\infty$. Poiché $f > 0$ e ogni quadrato Q_r è contenuto in una palla $B_R(0)$ e viceversa, tale limite non cambia se l'integrazione viene fatta sugli spicchi di $B_R(0)$ che stanno in Q . Su questi si ha

$$\int_{B_R(0) \cap Q} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\int_Q e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4},$$

da cui il valore dell'integrale di Poisson

$$(6.10) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Per una f di segno qualsiasi, l'integrabilità delle parti positiva f^+ e negativa f^- non è altro che l'assoluta integrabilità.

Definizione 6.8 - Una $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è detta **assolutamente integrabile** se sono integrabili in senso improprio separatamente f^+ e f^- e quindi anche $|f|$ e si pone

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| dx = \int_{\mathbf{R}^n} f^+(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n} f^-(x) dx.$$

Osservazione 6.9 - Essendo $f = f^+ - f^-$, se f è assolutamente integrabile allora è integrabile nel senso della Definizione 6.6. A differenza di quanto succede in una variabile, per gli integrali multipli vale anche l'implicazione contraria, cioè se f è integrabile allora è assolutamente integrabile. In altre parole, l'indipendenza dalla scelta dei domini approssimanti equivale alla proprietà di assoluta integrabilità. Non stiamo a dimostrarlo, ma dobbiamo tenerlo presente di fronte ai casi concreti.

Se integrabile significa assolutamente integrabile, che la funzione abbia segno costante o meno, possiamo scegliere una famiglia qualsiasi di domini approssimanti e verificare la convergenza degli integrali delle parti positiva e negativa o direttamente del valore assoluto. Nel caso affermativo possiamo procedere col calcolo dell'integrale della funzione data. Altrimenti essa non è integrabile. Possiamo così confermare per altra via la non integrabilità della funzione $\sin(x^2+y^2)$ che abbiamo già considerato: essa non è integrabile, possiamo dire adesso, perché il suo valore assoluto ha integrale divergente al crescere del raggio sui cerchi di centro 0, cosa molto semplice da verificare.

Esercizio 6.1 - Dimostrare che se $|f| \leq g$ e g è integrabile allora anche f lo è.

6.6 Integrali dipendenti da un parametro

Siano $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione tale che $x \rightarrow f(x, t)$ sia integrabile su $[a, b]$ per ogni $t \in [c, d]$. Allora ha senso l'*integrale dipendente dal parametro* t

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad \forall t \in [c, d]$$

come funzione definita su $[c, d]$. L'introduzione del parametro fornisce un efficace strumento per il calcolo degli integrali.

Teorema 6.10 (Dipendenza continua) - Se $f \in C^0(R)$ allora $\Phi \in C^0[c, d]$

Dimostrazione. È ben noto che f è uniformemente continua su R . Scegliamo allora $\delta(\varepsilon) > 0$ in modo che

$$|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

In particolare, per $x = x_1 = x_2$, se $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ si ha

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = \left| \int_a^b (f(x, t_1) - f(x, t_2)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, t_1) - f(x, t_2)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

Quindi Φ non solo è continua, ma è uniformemente continua. □

Corollario 6.11 (Dipendenza continua con estremi variabili) - Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente la funzione

$$\Phi(t, u, v) = \int_u^v f(x, t) dx \quad \forall u, v \in [a, b], \forall t \in [c, d]$$

è continua su $[a, b] \times [a, b] \times [c, d]$.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} |\Phi(t_1, u_1, v_1) - \Phi(t_2, u_2, v_2)| &= \left| \int_{u_1}^{v_1} f(x, t_1) dx - \int_{u_2}^{v_2} f(x, t_2) dx \right| \\ &= \left| \int_{u_1}^{v_1} (f(x, t_1) - f(x, t_2)) dx + \int_{u_1}^{v_1} f(x, t_2) dx - \int_{u_2}^{v_2} f(x, t_2) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{u_1}^{v_1} (f(x, t_1) - f(x, t_2)) dx \right| + \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x, t_2) dx - \int_{v_1}^{v_2} f(x, t_2) dx \right| \\ &\leq \int_{u_1}^{v_1} |f(x, t_1) - f(x, t_2)| dx + \int_{u_1}^{u_2} |f(x, t_2)| dx + \int_{v_1}^{v_2} |f(x, t_2)| dx \end{aligned}$$

dove il primo integrale si maggiora come prima e siccome f è limitata, il secondo e il terzo si maggiorano con $C|u_1 - u_2|$ e $C|v_1 - v_2|$. □

Teorema 6.12 (Derivazione) - Se f e f_t sono continue in R allora Φ è derivabile su $[c, d]$ e

$$\Phi'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx \quad \forall t \in [c, d].$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \bar{t})}{\partial t} dx$$

per il teorema del valor medio. Allora

$$(6.11) \quad \left| \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f(x, \bar{t})}{\partial t} - \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| dx.$$

Possiamo a questo punto applicare lo stesso ragionamento del Teorema 6.10 tenendo presente che f_t è continua su R e quindi uniformemente continua. Se $|\bar{t} - t| \leq h < \delta$ allora $|f_t(x, \bar{t}) - f_t(x, t)| < \varepsilon/(b-a)$ e il primo membro della (6.11) è minore di ε . \square

Corollario 6.13 (Derivazione con estremi variabili) - Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente, se $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sono derivabili allora anche la funzione

$$\Phi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx, \quad t \in [c, d],$$

è derivabile e

$$\Phi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \quad \forall t \in [c, d].$$

Dimostrazione. Basta combinare il Teorema 6.12 con il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni di una variabile insieme alla regola della derivata per funzioni composte. \square

I risultati precedenti si estendono facilmente agli integrali impropri sulla semistriscia $S = [a, +\infty[\times [c, d]$, c'è solo qualche complicazione tecnica e non stiamo a dimostrarli.

Teorema 6.14 - Se $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ è continua e limitata e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ assolutamente integrabile allora la funzione

$$(6.12) \quad \Phi(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)g(x) dx$$

è continua su $[c, d]$.

Teorema 6.15 - Se f e f_t sono continue e limitate su S e g come nel teorema precedente allora la funzione Φ nella (6.12) è derivabile e

$$\Phi'(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} g(x) dx \quad \forall t \in [c, d].$$

Esempi

6.4 Calcoliamo l'integrale

$$\Phi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\text{sen } xt}{x} dx$$

con $\alpha > 0$ fissato e $t \in [-c, c]$.

Le funzioni $f(x, t) = (\operatorname{sen} xt)/x$ e $f_t(x, t) = \cos xt$ sono continue e limitate su $S = [0, +\infty[\times]-c, c]$, mentre la $g(x) = e^{-\alpha x}$ è integrabile su $[0, +\infty[$ e il suo integrale vale $1/\alpha$. Allora per il Teorema 6.15 Φ è derivabile e

$$\Phi'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos xt \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}$$

come si vede integrando due volte per parti. Pertanto

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

6.5 Per calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$$

si può procedere in due modi.

(1) Osserviamo che

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \left(\int_0^T e^{-xt} \, dt \right) dx = \int_0^T \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{sen} x \, dx \right) dt$$

che è vera perché l'integranda all'interno soddisfa la stima uniforme in t

$$|e^{-xt} \operatorname{sen} x| \leq e^{-Tx}.$$

D'altra parte

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{1 + t^2},$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

(2) L'integrale dell'esempio precedente è una funzione dispari rispetto a $t \in [-c, c]$. Per $0 < t \leq c$, ponendo $xt = y$ l'integrale diventa

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} xt}{x} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y/t} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \, dy.$$

Vale la stima

$$\left| e^{-\alpha y/t} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right| \leq e^{-\alpha y/c}$$

dove la funzione a destra è integrabile. Allora per il Teorema 6.14 possiamo passare al limite

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} xt}{x} \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} xt}{x} \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -\pi/2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

In particolare per $t = 1$ si ha lo stesso valore, $\pi/2$, ottenuto col metodo precedente.

6.6 Calcoliamo l'integrale

$$\Phi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos tx \, dx, \quad \alpha > 0,$$

che è convergente per la stima dall'alto con la funzione $e^{-\alpha x^2}$. Sia $f(x, t) = e^{-\alpha x^2} \cos tx$, sia la sua derivata $f_t(x, t) = -e^{-\alpha x^2} x \sin tx$ sono continue e anche la f_t soddisfa la stessa stima dall'alto della f uniformemente in t , quindi si può derivare sotto il segno di integrale e si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x \sin tx \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left\{ [e^{-\alpha x^2} \sin tx]_0^{+\infty} - t \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos tx \, dx \right\} = -\frac{t}{2\alpha} \Phi(t).\end{aligned}$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria che ha per soluzione

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{-t^2/4\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-t^2/4\alpha}$$

dove $\Phi(0)$ è stato calcolato con un semplice cambio di variabile nell'integrale di Poisson (6.10).

6.7 Nel corso di Analisi 1 abbiamo avuto l'occasione di citare gli integrali di Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx \quad e \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$$

la cui integrabilità è garantita dal Criterio di Abel-Dirichlet. Adesso siamo in grado di calcolarli. Sempre dalla (6.10) si ricava

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \, dt$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} (\cos x^2 + i \sin x^2) \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{ix-xt^2} \, dt.$$

Come nell'Esempio 6.5 osserviamo che per ogni $T > 0$ vale la stima uniforme

$$|e^{ix-xt^2}| = e^{-xt^2} \quad \forall t \leq T.$$

Poiché

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^T e^{ix-xt^2} \, dt = \int_0^T dt \int_0^{+\infty} e^{ix-xt^2} \, dx = \int_0^T \frac{1}{t^2 - i} \, dt = \int_0^T \frac{t^2 + i}{t^4 + 1} \, dt,$$

dopo noiosi calcoli si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + i}{t^4 + 1} \, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 + i),$$

da cui

$$(6.13) \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Capitolo 7

Forme differenziali lineari

7.1 Questioni introduttive e definizioni

Supponiamo che un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ sia sede di una campo vettoriale $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ di componenti $F_i(x)$. Il significato dell'espressione

$$(7.1) \quad F(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i$$

è evidente: intuitivamente si tratta del lavoro che il campo F compie in corrispondenza di uno *spostamento infinitesimo* dx , noto come *lavoro elementare* e in effetti anche storicamente il concetto è nato proprio così. Ma dal punto di vista matematico, non avendo senso parlare di cose “piccole” o “grandi” che siano, possiamo dare alla notazione un'interpretazione rigorosa che descriviamo tra poco.

È naturale aspettarsi che un'espressione come la (7.1) sia destinata ad essere *integrata* lungo tutto un cammino orientato γ formato dai piccoli spostamenti di cui sopra, uno dopo l'altro, in modo da ottenere il *lavoro complessivo*

$$\mathcal{L}_\gamma(F) = \int_\gamma F(x) \cdot dx$$

con le ipotesi, perfettamente ragionevoli, che le componenti di F siano continue e γ sia regolare a tratti.

Come esempi di forme differenziali e relativi integrali ne abbiamo già considerato un paio di notevole interesse in \mathbf{R}^2 :

- la variazione d'area $dA = \frac{xdy - ydx}{2}$ e l'area delimitata da un cammino chiuso

$$A = \frac{1}{2} \int_\gamma xdy - ydx,$$

- la variazione d'angolo $d\vartheta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ e l'indice di un cammino chiuso rispetto a O

$$(7.2) \quad I_\gamma(O) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Diamo la seguente definizione, a prima vista un po' astratta, ma seguita poi da spiegazioni e chiarimenti.

Definizione 7.1 - Una **forma differenziale lineare** su $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è una funzione che associa ad ogni punto $x \in \Omega$ un'applicazione lineare $\omega(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$.

Essendo $\omega(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un'applicazione lineare, ad ogni forma differenziale lineare ω corrisponde un unico campo vettoriale $x \rightarrow a(x)$ tale che

$$\omega(x)(v) = a(x) \cdot v = \sum_{i=1}^n a_i(x)v_i \quad \forall v \in \mathbf{R}^n,$$

le funzioni a_i si chiamano *coefficienti* della forma ω .

Le n proiezioni canoniche $\pi_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definite da $\pi_i(v) = v_i$ coincidono con il loro differenziale in quanto lineari, pertanto si può scrivere

$$\omega(x)(v) = \sum_{i=1}^n a_i(x)v_i = \sum_{i=1}^n a_i(x)\pi_i(v) = \sum_{i=1}^n a_i(x)d\pi_i(v) \quad \forall v \in \mathbf{R}^n$$

che significa

$$(7.3) \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)d\pi_i.$$

Ora, come già detto per il differenziale, confondendo $d\pi_i$ con $d\pi_i(x) = dx_i$, si può giustificare così l'uso della notazione

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)dx_i$$

in luogo della (7.3) e salvare la tradizione.

La forma differenziale ω è detta di classe C^0 , C^1 , C^k , C^∞ se, rispettivamente, tali sono i coefficienti a_i su Ω .

Definizione 7.2 - *Dati una forma differenziale ω continua sull'aperto Ω con coefficienti a_i e un cammino orientato $\gamma : I \rightarrow \Omega$ regolare a tratti, poniamo*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_I \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t))\gamma'_i(t)dt.$$

Esercizio 7.1 - *Verificare che l'integrale è invariante per curve orientate equivalenti, ma invertendo l'orientamento cambia di segno.*

Dato un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, indicheremo con $-\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ il cammino orientato nel verso opposto $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. I relativi integrali di ω stanno nella relazione

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

Dati i cammini $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \Omega$ tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, il cammino tra il punto iniziale $\gamma_1(a)$ e il punto finale $\gamma_2(d)$, per cui γ_1 e γ_2 vengono percorsi uno di seguito all'altro, verrà indicato con $\gamma_1 + \gamma_2$. Per una definizione formale, si può sostituire la γ_2 con la $\tilde{\gamma}_2 : [b, b + d - c] \rightarrow \Omega$ definita da $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t - b + c)$ e poi

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ \tilde{\gamma}_2(t) & \text{se } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

7.2 Forme esatte

Si definisce in Fisica un campo vettoriale *conservativo* quando è il gradiente di una funzione scalare che prende il nome di *potenziale*. Tradotta questa nozione nel nostro linguaggio diamo la seguente definizione.

Definizione 7.3 - La forma differenziale continua ω con coefficienti a_i sull'aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ si dice **esatta** se esiste una funzione $f \in C^1(\Omega)$ tale che

$$(7.4) \quad \omega(x) = df(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

La f viene detta **primitiva** di ω .

Ricordando la definizione di differenziale, la (7.4) equivale a

$$\omega(x)(v) = \nabla f(x) \cdot v \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall v \in \mathbf{R}^n$$

che in altre parole significa

$$a_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad \forall x \in \Omega.$$

Esempi

7.1 - La forma differenziale in \mathbf{R}^3

$$\omega(x, y, z) = yzdx + xzdy + xydz$$

è esatta e ammette come primitiva la funzione $f(x, y, z) = xyz$. Oltre a questa, evidentemente sono primitive anche le funzioni $xyz + c$ con c costante.

7.2 - La forma differenziale in \mathbf{R}^2

$$(7.5) \quad \omega(x, y) = xdy - ydx$$

non è esatta. Se esistesse una funzione differenziabile $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -y \\ f_y(x, y) = x, \end{cases}$$

integrando la prima rispetto a x si otterrebbe

$$f(x, y) = -xy + \alpha(y)$$

che, sostituita nella seconda, porta all'assurdo

$$-x + \alpha'(y) = x \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

7.3 Un'asta rigida AB di lunghezza ℓ è vincolata a muoversi nel piano in modo che un suo punto, per esempio il punto medio M , abbia velocità parallela all'asta stessa. Si tratta di un vincolo olonomo?

Posto $M = (x, y)$ e $AB = \ell(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$, la condizione di parallelismo è

$$\mathbf{v}_M \times AB = \ell(\dot{x} \sin \vartheta - \dot{y} \cos \vartheta) = 0.$$

Affinché il vincolo sia olonomo deve esistere una funzione differenziabile $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), \vartheta(t)) = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_\vartheta \dot{\vartheta} = \dot{x} \sin \vartheta - \dot{y} \cos \vartheta = 0.$$

In altre parole la forma differenziale $\sin \vartheta dx - \cos \vartheta dy$ deve essere esatta con la f come primitiva, soluzione del sistema

$$f_x = \sin \vartheta, \quad f_y = -\cos \vartheta, \quad f_\vartheta = 0,$$

ma queste condizioni sono incompatibili perché per l'ultima f non dipende da ϑ .

Proposizione 7.4 - Se $f \in C^1(\Omega)$ è una primitiva della forma continua ω allora anche $f(x) + c$ è una primitiva per qualunque $c \in \mathbf{R}$. Inoltre, se Ω è connesso e f, g sono due primitive di ω allora $g(x) = f(x) + c$ per qualche $c \in \mathbf{R}$.

Dimostrazione. La prima affermazione è ovviamente vera in quanto

$$dg = d(f + c) = df = \omega$$

essendo nullo il differenziale della costante c . La seconda discende dal Teorema 4.8

$$d(f - g) = df - dg = \omega - \omega = 0 \Rightarrow f - g = c.$$

□

Diamo adesso una caratterizzazione delle forme esatte e delle loro primitive attraverso certe proprietà di invarianza dei loro integrali. Nella costruzione delle primitive è evidente l'analogia col teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni di una variabile.

Teorema 7.5 - Se ω è una forma differenziale continua in Ω le seguenti condizioni sono equivalenti:

(∇)1. ω è esatta,

(\rightrightarrows)2. se γ_1 e γ_2 sono due cammini orientati in Ω con gli stessi estremi allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

(\circlearrowleft)3. se γ è un cammino chiuso in Ω allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Se in più ω è di classe C^1 ognuna delle precedenti implica

$$(7.6) \quad \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. (\rightrightarrows)2 \Rightarrow (\circlearrowleft)3. Un cammino chiuso γ lo possiamo dividere in due cammini, γ_1 da un punto x a un punto y e γ_2 da y a x , per cui $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Per la (\rightrightarrows)2 si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{-\gamma_2} \omega = 0.$$

(\circlearrowleft)3 \Rightarrow (\rightrightarrows)2. Se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi $-\gamma_1 + \gamma_2$ è un cammino chiuso, pertanto

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega + \int_{-\gamma_1} \omega = \int_{-\gamma_1 + \gamma_2} \omega = 0.$$

(∇)1 \Rightarrow (\rightrightarrows)2. Siano f una primitiva di ω e $\gamma(t)$ un cammino di estremi $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(y) - f(x)$$

che, com'è evidente, non dipende da γ , ma solo dai suoi estremi.

(\Leftarrow) $2 \Rightarrow$ (∇) 1 . Per dimostrare questa implicazione costruiamo direttamente una primitiva di ω . Per l'invarianza dell'integrale rispetto ai cammini con gli stessi estremi, fissato $x_0 \in \Omega$ è ben definita la funzione

$$f(x) = \int_{x_0}^x \omega$$

come funzione di $x \in \Omega$, senza dover precisare il cammino d'integrazione. Calcoliamo il rapporto incrementale di f nella direzione e_i scegliendo come cammino il segmento $x + te_i$ con $0 \leq t \leq h$. Per il teorema della media integrale esiste $\bar{t} \in [0, h]$ tale che

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{k=1}^n a_k(x + te_i) \delta_{ik} dt = \int_0^h a_i(x + te_i) dt = a_i(x + \bar{t}e_i)$$

e poiché a_i è continua l'ultimo termine ammette limite per $h \rightarrow 0$, quindi anche il I membro ha limite e

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = a_i(x).$$

Questa relazione dice anche che le derivate parziali di f coincidono con delle funzioni continue, dunque $f \in C^1(\Omega)$ e $df = \omega$ in Ω .

Per concludere passiamo all'ultima affermazione dell'enunciato. Se $\omega = df$ è continua allora $f \in C^2(\Omega)$ e dal Lemma di Schwartz segue che

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

□

Per fortuna la (7.5) non è esatta, altrimenti ogni cammino chiuso racchiuderebbe una regione di area nulla.

Per capire il significato della (7.6) come condizione solo necessaria, consideriamo nuovamente l'esempio della variazione d'angolo

$$(7.7) \quad d\vartheta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

sul dominio $\mathbf{R} - \{(0, 0)\}$. È evidente che

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

ma sulla circonferenza unitaria di centro O e su ogni curva semplice e chiusa che lascia O all'interno si ha

$$\int_{\gamma} d\vartheta = 2\pi \neq 0.$$

Perché dunque l'abbiamo indicata col simbolo $d\vartheta$ che sembra indicare si tratti proprio di un differenziale? Perché in effetti l'argomento $\vartheta(x, y)$ è realmente primitiva della nostra forma, ma non è una funzione nel senso usuale del termine, si tratta di una funzione *multivoca*, cioè a più valori, che associa ad ogni punto $P = (x, y) \neq O = (0, 0)$ tutti gli angoli, differenti uno dall'altro per un multiplo intero di 2π , che la semiretta OP forma col semiasse positivo delle ascisse. Se si sceglie per $\vartheta(x, y)$ la funzione $-\pi < \text{Arg}(x, y) < \pi$, l'argomento principale, sul dominio $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0, y = 0\}$, o una qualunque altra determinazione dell'argomento, allora la nostra forma diventa esatta. Si noti che in questo modo sono state eliminate tutte le curve chiuse che girano attorno ad O , proprio quelle che rendevano non nullo l'integrale.

Definizione 7.6 - Una forma differenziale

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

di classe C^1 sull'aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ viene detta **chiusa** se

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Per $n = 3$ ha senso trattare l'operatore differenziale $\text{rot} = \nabla \times$ definito da

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

che è il prodotto vettoriale formale dell'operatore gradiente col campo F e si chiama *rotore*. In questo caso una forma differenziale è chiusa se e solo se F ha rotore nullo, cioè *irrotazionale*. Come si vede dalle equazioni di Maxwell, un esempio di campo irrotazionale è il campo elettrico in condizioni stazionarie. Il campo delle velocità di un fluido in assenza di moti vorticosi è un altro esempio di campo irrotazionale.

7.3 Formule di Gauss-Green

In una variabile, quando si integra la derivata di una funzione f su un intervallo si ottiene l'incremento della f stessa agli estremi. Qualcosa di simile accade anche in più variabili, vediamo in che modo limitandoci per il momento al caso piano. A tale scopo sia $D \subset \mathbf{R}^2$ un aperto limitato il cui bordo ∂D è un cammino orientato γ regolare a tratti. Assumiamo nel seguito che ∂D sia *positivamente orientato*, cioè che valga la condizione $n_1 \gamma'_2 - n_2 \gamma'_1 > 0$, essendo n il versore normale uscente da D . In altre parole supponiamo che γ venga percorsa in modo da lasciare D alla sua sinistra.

Teorema 7.7 (di Gauss-Green) - Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un aperto, $f \in C^1(\Omega)$ e $D \subset \Omega$ un aperto limitato con bordo regolare a tratti tale che $\bar{D} \subset \Omega$. Allora

$$(7.8) \quad \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} f dy \quad e \quad \int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D} f dx.$$

Dimostrazione. Dimostriamo le (7.8) nell'ipotesi che D sia un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y (per esempio se è convesso, ma non solo!) e poi le estendiamo ad una regione decomponibile in unione finita di domini normali. Posto $D = \{(x, y) \in \Omega \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \forall x \in [a, b]\}$ con $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 a tratti tali che $\varphi \leq \psi$, si ha

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b [f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x))] dx.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f dx &= \int_a^b f(t, \varphi(t)) dt + \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b, t) \frac{db}{dt} dt + \int_b^a f(t, \psi(t)) dt + \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} f(a, t) \frac{da}{dt} dt \\ &= - \int_a^b [f(t, \psi(t)) dt - f(t, \varphi(t))] dt, \end{aligned}$$

essendo nulli il secondo e il quarto integrale. Ragionando nello stesso modo con altre due funzioni $\varphi(y)$ e $\psi(y)$, i cui grafici delimitano D nello stesso modo, si ottiene l'altra

formula. Infine, se D è decomponibile in una unione finita di domini normali, ogni curva interna a D che ne separa due adiacenti viene considerata due volte, in un senso e nell'altro, con un valore dell'integrale e il suo opposto, quindi nella formula compare anche in questo caso solo l'integrale sul bordo di D . \square

Dalle (7.8) seguono le formule per l'area

$$m(D) = \int_D \frac{\partial x}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} x dy \quad \text{e} \quad m(D) = \int_D \frac{\partial y}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D} y dx .$$

Per somma membro a membro si ritrova anche quella del calcolo dell'area che già avevamo dedotto con considerazioni intuitive

$$m(D) = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx .$$

Un'altra immediata, ma importante, conseguenza è la seguente

$$(7.9) \quad \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} f dx + g dy$$

per una coppia di funzioni $f, g \in C^1(\Omega)$. Dalla (7.9) segue che se ω è una forma differenziale chiusa sull'aperto Ω allora per ogni aperto D , limitato, connesso e con bordo ∂D regolare a tratti, tale che $\bar{D} \subset \Omega$ si ha

$$(7.10) \quad \int_{\partial D} \omega = 0 .$$

Ora se il bordo di D è formato da un solo cammino chiuso γ , che racchiude D interamente, l'integrale (7.10) non è altro che l'integrale su γ . Ma se D presenta dei fori, per cui ∂D è formato da un cammino chiuso esterno γ e da uno o più cammini chiusi interni $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, allora

$$\int_{\gamma} \omega + \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \omega = 0 ,$$

dove il verso di percorrenza lungo le γ_i è opposto a quello lungo γ . Per esempio se γ è antiorario, in modo da lasciare l'interno di D alla sua sinistra, i γ_i devono essere orari per la stessa ragione.

Una versione tridimensionale della (7.9) è enunciata nel seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 7.8 (di Stokes) - Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un aperto, $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ e $\Gamma \subset \Omega$ una superficie orientata con versore normale n , regolare a tratti e con bordo $\partial\Gamma$ unione di cammini regolari a tratti e positivamente orientati (rispetto a Γ). Allora si ha

$$(7.11) \quad \int_{\Gamma} \text{rot } F \cdot n d\sigma = \int_{\partial\Gamma} F \cdot dx .$$

In altre parole il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie è pari al lavoro del campo lungo il bordo. Se in particolare la superficie è chiusa, cioè senza bordo, o $\partial\Gamma = \emptyset$, il flusso di un rotore è sempre nullo. Analogamente a quanto detto sopra, se è nullo il rotore (forma chiusa) allora è nullo il lavoro del campo sul bordo della superficie, bordo che può essere formato da un solo cammino o da più cammini come prima.

Definizione 7.9 - Un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ viene detto **semplicemente connesso** se ogni cammino chiuso in Ω è il bordo di una superficie (bidimensionale) interamente contenuta in Ω .

Si può interpretare questa proprietà dicendo che ogni cammino chiuso può essere deformato con continuità, senza mai uscire da Ω , fino a diventare un punto di Ω .

Teorema 7.10 - Se $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è semplicemente connesso ogni forma differenziale ω chiusa è anche esatta.

Dimostrazione. Consideriamo solo i casi $n = 2$ e $n = 3$. In \mathbf{R}^2 , scelto in Ω un cammino γ qualsiasi, regolare e chiuso, esso sarà il bordo di una regione $D \subset \Omega$ sulla quale vale la (7.9). Il primo membro è nullo e quindi lo è anche il secondo. Per il Teorema 7.5 la forma è esatta. In \mathbf{R}^3 esistono infinite superfici in Ω che hanno γ come bordo. Basta sceglierne una, usare la (7.11) e concludere come nel caso precedente. \square

Una forma chiusa e non esatta non avrà integrale nullo su un cammino chiuso, ma il valore che ha è sempre lo stesso su qualunque cammino “dello stesso tipo”. Che cosa intendiamo? Rivediamo per un momento l'esempio più noto, paradigmatico, quello della forma (7.7). L'integrale lungo un cammino chiuso ci dà la variazione angolare complessiva dovuta ad un giro completo, per questo non dipende dal particolare cammino scelto, il suo valore dipende soltanto dal numero di giri (e dal verso) che il cammino compie attorno all'unica singolarità, lo 0. Il dominio $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ non è semplicemente connesso perché un cammino chiuso che gira attorno a 0 è il bordo di una regione non interamente contenuta in esso. Ciò comporta che, ad esempio per un giro in senso antiorario, la variazione angolare complessiva, cioè l'integrale, sia 2π qualunque sia il percorso compiuto. Invece su un dominio più piccolo semplicemente connesso, come quello che si ottiene da \mathbf{R}^2 eliminando una semiretta uscente da 0, ad esempio il semiasse negativo delle x , la stessa forma diventa esatta. Infatti non vi sono più cammini chiusi che girano intorno a 0. Se l'integrale è nullo su un cammino chiuso è nullo su tutti e la forma diventa esatta per il Teorema 7.5.

Il Teorema 7.10 ci dà solo una condizione sufficiente, è ovvio che una forma può essere esatta anche su un dominio non semplicemente connesso. Per verificarlo basterà considerare per ogni singolarità un solo cammino chiuso che gli gira attorno. Se su ciascuno di essi l'integrale è nullo, sarà nullo anche su ogni cammino chiuso per la (7.11), quindi la forma è esatta.

Un'altra versione della (7.9) è la seguente

$$(7.12) \quad \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} f dy - g dx.$$

Osserviamo che se t e n sono rispettivamente il versore tangente a ∂D e il versore normale uscente da D , si ha

$$t = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \quad \text{e} \quad n = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

e la (7.12) assume la forma

$$(7.13) \quad \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (fn_1 + gn_2) ds.$$

Per un campo vettoriale $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$ definiamo l'operatore differenziale $\text{div} = \nabla \cdot$

$$\text{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

che prende il nome di *divergenza* di F . L'estensione della (7.13) al caso n -dimensionale è l'enunciato del seguente teorema che diamo senza dimostrazione.

Teorema 7.11 (della divergenza) - Per ogni aperto $D \subset \Omega$ tale che $\bar{D} \subset \Omega$ e con bordo ∂D sostegno di una superficie $(n-1)$ -dimensionale regolare a tratti si ha

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma .$$

Capitolo 8

Successioni e serie di funzioni

In questo capitolo vengono illustrate alcune nozioni di convergenza per le successioni e le serie di funzioni di una variabile reale, ma teniamo presente che l'estensione al caso di più variabili, o addirittura alle funzioni su spazi astratti, è, in molti casi, ovvia e non richiede ulteriore lavoro. Le applicazioni più importanti riguardano le serie di potenze e le serie di **Fourier** trigonometriche. Avremo bisogno, ad un certo momento della trattazione, di fare riferimento al caso astratto della convergenza delle successioni negli spazi metrici e negli spazi normati.

8.1 Convergenza puntuale

Sia (f_n) , $n \in \mathbf{N}$, una successione di funzioni tutte definite sullo stesso dominio $A \subset \mathbf{R}$ a valori in \mathbf{R} . La nozione di limite che viene più spontaneo considerare è quella puntuale: se in ogni punto $x \in A$ esiste ed è finito il limite della successione di numeri reali $(f_n(x))$, tale limite dipende da x e quindi si stabilisce l'esistenza della funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, detta *limite puntuale* della (f_n) , definita da

$$(8.1) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in A,$$

oppure, in modo equivalente, dalla condizione

$$(8.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| = 0 \quad \forall x \in A.$$

Per indicare che (f_n) converge a f in ogni punto scriveremo, più semplicemente, $f_n \xrightarrow{ptlm} f$. Per maggiore chiarezza diamo anche una definizione esplicita che si ricollega direttamente alla nozione di limite di una successione di numeri reali.

Definizione 8.1 - La successione (f_n) converge **puntualmente** a f se

$$(8.3) \quad \forall x \in A \text{ e } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(x, \varepsilon) \in \mathbf{N} : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu.$$

Nella convergenza puntuale possiamo immaginare i grafici delle varie funzioni f_n che si avvicinano a quello di f dal momento che la successione dei punti del piano $(x, f_n(x))$ converge al punto $(x, f(x))$ per ogni $x \in A$.

Esempi

8.1 La successione $f_n(x) = x + n$, $x \in \mathbf{R}$, non ammette limite puntuale perché in ogni punto diverge a $+\infty$, mentre la $f_n(x) = x + 1/n$ converge a $f(x) = x$. I grafici sono rette parallele, nel primo caso a distanza costante una dall'altra, nel secondo si avvicinano alla retta $y = x$ per $n \rightarrow \infty$. Anche i grafici delle $f_n(x) = nx$, $x \in \mathbf{R}$,

sono rette, in questo caso (f_n) diverge a $+\infty$ per $x > 0$, diverge a $-\infty$ per $x < 0$ e converge nel solo punto $x = 0$. Vedere per esercizio come si comporta la successione $f_n(x) = x/n$.

8.2 La successione $f_n(x) = x^n$, con $x \in [0, 1]$, converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

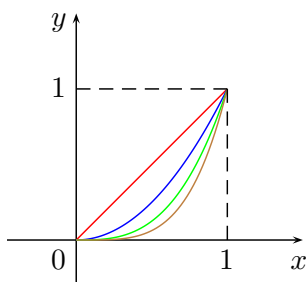


Figura 8.1: Le funzioni x^n su $[0, 1]$.

8.3 Le funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{n+x^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

assumono tutte il valore 1 per $x = 0$ e tendono a 0 per $|x| \rightarrow +\infty$, ma formano una successione che converge puntualmente alla funzione costante $f(x) = 1$. Si osservi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1.$$

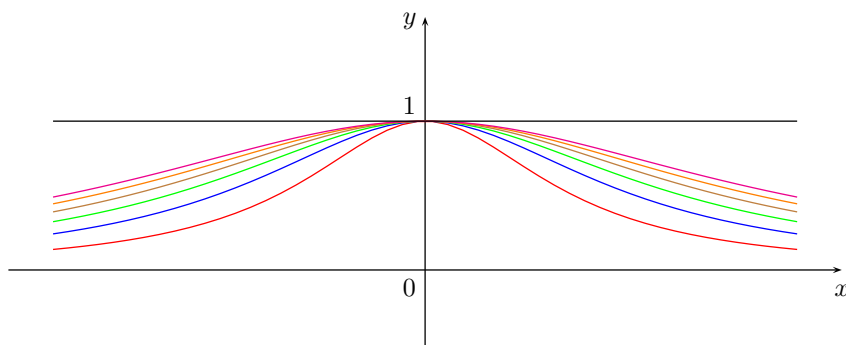


Figura 8.2: Le funzioni $\frac{n}{n+x^2}$ su \mathbf{R} .

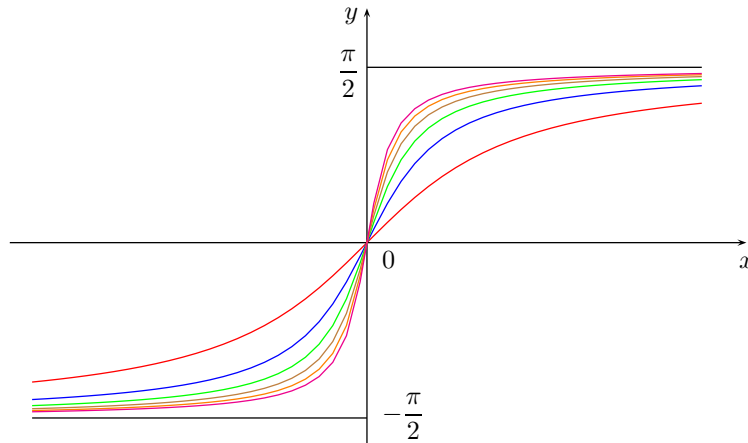
8.4 La funzione $f(x) = 1/x$, $x > 0$, è il limite puntuale delle sue “troncate”

$$f_n(x) = \min\{n, 1/x\}, \quad x > 0.$$

8.5 La successione

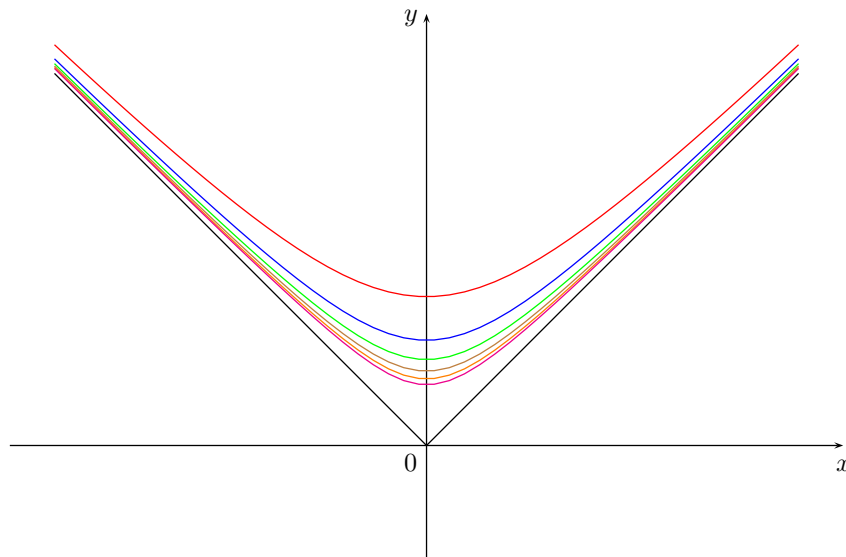
$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbf{R},$$

converge puntualmente alla funzione $f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$.

Figura 8.3: Le funzioni $\arctg nx$ su \mathbf{R} .**8.6** La successione

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}, \quad x \in \mathbf{R},$$

converge puntualmente alla funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$.

Figura 8.4: Le funzioni $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ su \mathbf{R} .

8.7 Le successioni di funzioni su \mathbf{R} ($\sin nx$) e ($\cos nx$) non convergono puntualmente, altro che nei punti $x = k\pi$ la prima dove vale 0 per ogni n , e nei punti $2k\pi$ la seconda dove vale sempre 1. Si tratta di funzioni periodiche di periodo $T_n = 2\pi/n$ sempre più piccolo al crescere di n . Il numero di oscillazioni sull'intervallo $[0, 2\pi]$ è la frequenza, sempre più grande, $\omega_n = 2\pi/T_n = n$.

8.8 La successione

$$f_n(x) = 2nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0, 1],$$

converge puntualmente alla funzione identicamente nulla, ma i massimi divergono.

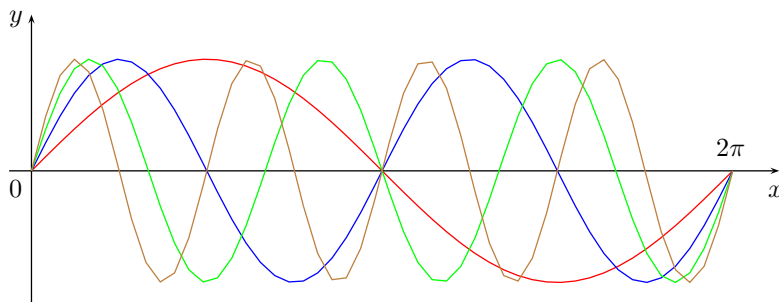


Figura 8.5: Le funzioni $\sin nx$ su $[0, 2\pi]$.

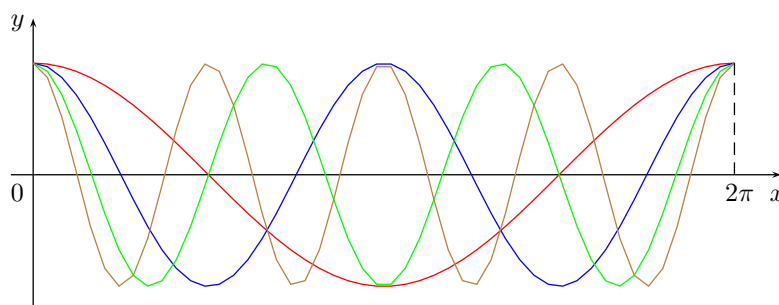


Figura 8.6: Le funzioni $\cos nx$ su $[0, 2\pi]$.

Una *serie di funzioni* f_n definite su un dominio A converge puntualmente se converge puntualmente la successione delle funzioni somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in A.$$

In tal caso è definita la funzione *somma della serie*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in A$$

tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x) - s(x)| = 0 \quad \forall x \in A.$$

Ad esempio

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R},$$

è la successione delle somme parziali di una serie di potenze in \mathbf{R} , oppure

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad c_k \in \mathbf{C}, z \in \mathbf{C},$$

è la successione delle somme parziali di una serie di potenze in \mathbf{C} . Ricordiamo che per il Teorema di Cauchy-Hadamard (v. corso di Analisi 1) il dominio di convergenza dipende dal numero

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

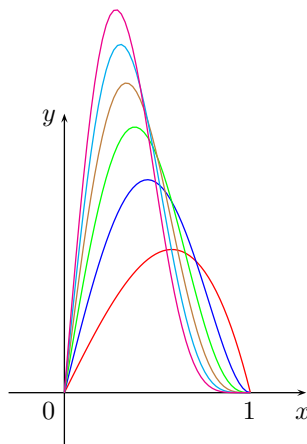


Figura 8.7: Le funzioni $2nx(1-x^2)^n$ su $[0, 2\pi]$.

precisamente è tutto \mathbf{C} se $L = 0$, il solo punto 0 se $L = +\infty$ e il cerchio di centro 0 e raggio $R = 1/L$ se $0 < L < +\infty$.

La domanda che ci poniamo dopo aver visto questi esempi è se determinate proprietà utili e interessanti delle funzioni sono stabili nei passaggi al limite. Se le f_n ad esempio sono continue, o derivabili, il loro eventuale limite puntuale è continuo o derivabile? La derivata del limite puntuale, qualora esista, è il limite della successione delle derivate? Se le f_n sono integrabili su un intervallo il loro limite è integrabile? L'integrale del limite è il limite degli integrali? In effetti si vede subito che non è così in generale, le funzioni continue degli Esempi 8.2 e 8.5 hanno come limite funzioni discontinue, le funzioni della successione dell'Esempio 8.6 sono derivabili, ma il loro limite non lo è. Nell'Esempio 8.8 gli integrali non vanno a 0 come il limite puntuale, né vanno a $+\infty$ come i massimi, precisamente si ha

$$\int_0^1 f_n dx = -n \left[\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

È anche possibile costruire successioni di funzioni integrabili il cui limite puntuale non è integrabile. Evidentemente la convergenza puntuale presenta delle carenze nel senso che proprietà importanti non passano al limite, non si conservano, derivate e integrali non commutano col segno di limite. D'altra parte la convergenza puntuale non si basa su una distanza tra funzioni, ma sulla distanza tra i valori che le funzioni assumono nei vari punti, risultando quindi anch'essa variabile. Conviene allora considerare degli spazi opportuni i cui elementi sono funzioni e dotarli volta per volta di opportune distanze, o norme nel caso vettoriale, in modo che il limite di una successione risulti ben definito in termini della relativa metrica. Tra le tante di uso comune figurano la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

e quella di tipo integrale

$$\|f\|_1 = \int_A |f(x)| dx.$$

8.2 Spazi metrici completi

Ricordiamo che una successione di punti (x_n) di uno spazio metrico (X, d) è detta *convergente* ad un punto $x \in X$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0,$$

cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbf{N} : d(x_n, x) < \varepsilon \forall n > \nu.$$

Scriviamo in questo caso $x_n \rightarrow x$. Ricordiamo inoltre che una successione $(x_n) \subset X$ è detta di *Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbf{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m > \nu.$$

Dalla disuguaglianza triangolare della distanza segue immediatamente che ogni successione convergente è di Cauchy, infatti

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon$$

per n, m sufficientemente grandi. Viceversa, non è detto che le successioni di Cauchy ammettano limite, dipende dallo spazio metrico cui appartengono. Per esempio esistono successioni di Cauchy di numeri razionali che non hanno limite in \mathbf{Q} perché il loro limite è irrazionale. In \mathbf{R} , invece, ogni successione di Cauchy di numeri reali ammette sempre un numero reale come limite. Per questo diciamo che \mathbf{R} è completo mentre \mathbf{Q} non lo è. Questa situazione suggerisce di generalizzare la nozione di completezza con la seguente definizione.

Definizione 8.2 - *Uno spazio metrico (X, d) viene detto **completo** se per ogni successione di Cauchy $(x_n) \subset X$ esiste $x \in X$ tale che $x_n \rightarrow x$.*

Esercizio 8.1 - *Dimostrare che se X è completo e C è un sottoinsieme chiuso di X allora anche C è completo.*

Possiamo generalizzare anche il passaggio da \mathbf{Q} a \mathbf{R} vedendolo come un'operazione di *completamento*. Senza entrare troppo nei dettagli, se uno spazio metrico (X, d) non è completo, per "completarlo" si definisce dapprima la relazione di equivalenza tra due successioni di Cauchy $(x_n), (y_n) \subset X$

$$(x_n) \sim (y_n) \text{ se } d(x_n, y_n) \rightarrow 0,$$

sono cioè equivalenti due successioni di Cauchy che si avvicinano tra loro per $n \rightarrow \infty$. Poi si dimostra che lo spazio quoziente $\bar{X} = X / \sim$ è metrico completo con la distanza \bar{d} tra due (classi di equivalenza di) successioni di Cauchy definita da

$$\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n),$$

dove è evidente che il limite non dipende dalla scelta delle successioni rappresentanti (x_n) e (y_n) delle rispettive classi $[(x_n)]$ e $[(y_n)]$. Lo spazio X di partenza risulterà isometrico, e quindi identificabile a tutti gli effetti, con un sottospazio X' denso in \bar{X} , quello delle successioni costanti: ogni punto $x \in X$ può essere visto, infatti come la successione costante $x_n = x$, mentre \bar{d} sulle successioni costanti coincide con la d su X , quindi ne è l'estensione a \bar{X} . La costruzione che abbiamo ora descritto è solo l'idea della dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 8.3 (di completamento) - *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora esistono uno spazio metrico completo (\bar{X}, \bar{d}) ed un sottoinsieme X' denso in \bar{X} tali che X è isometrico a X' e $\bar{d}|_{X' \times X'} = d$.*

Esercizio 8.2 - Verificare che il completamento di uno spazio metrico X coincide con il completamento di qualunque sottospazio denso in X .

Trattiamo adesso un'altra questione legata agli spazi metrici completi che ci sarà utile anche in altri contesti di questo corso.

Definizione 8.4 - Una **contrazione** su uno spazio metrico (X, d) è una funzione $\varphi : X \rightarrow X$ che soddisfa la condizione

$$(8.4) \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

con una costante $k < 1$.

La (8.4) non è altro che la condizione di Lipschitz con una restrizione sul valore della costante che serve ad imporre alla φ di ridurre strettamente le distanze tra i punti ed equivale a

$$(8.5) \quad \sup_{x, y \in X} \frac{d(\varphi(x), \varphi(y))}{d(x, y)} < 1.$$

Si noti che non è la stessa cosa assumere nella (8.4) $k = 1$ con la disuguaglianza stretta perché ciò non impedisce all'estremo superiore nella (8.5) di valere 1, come accade alla funzione $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$ su \mathbf{R} .

Teorema 8.5 (delle contrazioni) - Se X è completo e φ è una contrazione su X allora esiste un unico punto $\bar{x} \in X$ tale che $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$. Tale punto è detto **punto fisso** di φ .

Dimostrazione. Il ragionamento che faremo è noto come *metodo delle approssimazioni successive*. Precisamente si parte da un punto iniziale x_0 qualsiasi e si costruisce per induzione la successione $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \geq 1$. Poiché

$$\begin{aligned} d(x_h, x_{h-1}) &= d(\varphi(x_{h-1}), \varphi(x_{h-2})) \leq kd(x_{h-1}, x_{h-2}) = kd(\varphi(x_{h-2}), \varphi(x_{h-3})) \\ &\leq k^2 d(x_{h-2}, x_{h-3}) \leq \dots \leq k^i d(x_{h-i}, x_{h-i-1}) \leq \dots \leq k^{h-1} d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

per la disuguaglianza triangolare della distanza si ha, con $m < n$,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{h=m+1}^n d(x_h, x_{h-1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{h=m+1}^n k^{h-1} = \frac{k^{m+1} - k^{n+1}}{1 - k},$$

espressione che può essere resa arbitrariamente piccola pur di prendere m, n abbastanza grandi, visto che $k^n \rightarrow 0$. Dunque (x_n) è di Cauchy e converge ad un certo $\bar{x} \in X$. Adesso è lecito passare al limite nella definizione induttiva della successione, essendo φ continua, e si scopre che \bar{x} è un punto fisso di φ . Per l'unicità, se di punti fissi ve ne fossero due distinti, \bar{x} e \bar{y} , si otterrebbe la contraddizione

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) \leq kd(\bar{x}, \bar{y}) < d(\bar{x}, \bar{y}).$$

□

8.3 Spazi di Banach e di Hilbert

Uno spazio vettoriale X complesso, cioè sul corpo \mathbf{C} dei numeri complessi, viene detto *normato* se è definita su X una funzione a valori reali che associa ad ogni elemento $x \in X$ la sua *norma*, $\|x\|$, con le seguenti proprietà:

$$\|\cdot\|1. \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$\|\cdot\|2. \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbf{C},$$

$$\|\cdot\|3. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Dalla $\|\cdot\|2$ segue, con x qualsiasi e $\lambda = 0$, l'implicazione inversa della $\|\cdot\|1$, cioè $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$. Osserviamo inoltre che dalla $\|\cdot\|3$ segue anche la relazione

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X,$$

infatti

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

poi si porta $\|y\|$ a sinistra e infine si scambiano i ruoli di x e y .

La norma induce sullo spazio la nozione naturale di distanza

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

che fa di X uno spazio metrico.

Definizione 8.6 - Se lo spazio normato X con la distanza indotta dalla norma risulta completo allora viene detto **spazio di Banach**.

Ad esempio \mathbf{R} e \mathbf{R}^n sono spazi di Banach con la distanza indotta dal modulo, che è la distanza euclidea. Riassumendo

- $x_n \rightarrow x$ se $\|x_n - x\| \rightarrow 0$,
- (x_n) è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbf{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \forall n, m > \nu$,
- X è di Banach se ogni successione (x_n) di Cauchy ammette limite $x \in X$.

Esercizio 8.3 Dimostrare che la norma è continua: $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ se $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Uno spazio vettoriale complesso X può essere munito di un *prodotto scalare*, cioè di un'applicazione definita sul prodotto cartesiano $X \times X$ a valori complessi, che indicheremo con $\langle x, y \rangle$, tale che

$$\langle \cdot, \cdot \rangle 1. \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle 2. \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle 3. \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \forall x, y \in X,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle 4. \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X.$$

Conseguenze degli assiomi precedenti sono

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

Usando il prodotto scalare possiamo definire

$$(8.6) \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

e dimostrare che si tratta di una norma. Le $\|\cdot\|1$ e $\|\cdot\|2$ sono banali da verificare, ma per la $\|\cdot\|3$, meno banale, dobbiamo prima dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(8.7) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Per ottenerla osserviamo che per ogni $t \in \mathbf{R}$

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \langle tx + y, tx + y \rangle = \|x\|^2 t^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle t + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 t^2 + 2 |\langle x, y \rangle| t + \|y\|^2,$$

quindi deve valere la condizione sul discriminante

$$|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

e la (8.7) è provata. Adesso possiamo ricavare la $\| \cdot \|_3$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Esercizio 8.4 - *Dimostrare l'identità del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X.$$

Ogni spazio X con prodotto scalare è quindi anche normato e di conseguenza metrico con la solita distanza della norma.

Definizione 8.7 - *Se X è dotato di prodotto scalare e rispetto alla norma da esso indotta è di Banach allora viene detto **spazio di Hilbert**.*

Dunque gli spazi di Hilbert sono casi particolari di spazi di Banach, ad esempio in \mathbf{R}^2 tra tutte le norme

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

solo quella con $p = 2$ è hilbertiana. Si pone allora la domanda: come si riconoscono le norme che provengono da un prodotto scalare? E se questo esiste come si costruisce a partire dalla norma? Si può dimostrare che l'identità del parallelogramma dell'Esercizio 8.4, oltre che necessaria, è anche sufficiente affinché una norma sia hilbertiana, quindi può essere presa come criterio e se il prodotto scalare esiste è dato da

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

dove a secondo membro bastano i primi due termini se X è reale.

In uno spazio vettoriale X , la presenza di un'operazione additiva ci permette di trattare la serie associata ad una successione di punti $(x_n) \subset X$. Si definisce la successione delle somme parziali

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

e se X è anche normato ha senso studiarne la convergenza: se esiste in X il limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nel senso della norma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s - s_n\| = 0$$

allora diciamo che s è la somma della serie e si scrive

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Il lettore può facilmente dimostrare che una condizione necessaria affinché ciò accada è $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ o, in modo equivalente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$. In questo contesto più generale, l'analogo della convergenza assoluta, vista a proposito delle serie numeriche, è la seguente nozione di convergenza.

Definizione 8.8 - Una serie $\sum x_n$ in X è detta **totalmente convergente** se è convergente la serie numerica (a termini positivi) delle norme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|.$$

C'è dunque da aspettarsi che la convergenza totale implichi la convergenza nella norma dello spazio, come è stato dimostrato a suo tempo in **R**. Ma come allora si fece uso della completezza per ottenere questa proprietà, così anche adesso bisogna supporre che lo spazio sia di Banach. Anzi si può aggiungere, ma non lo dimostriamo, che vale anche l'implicazione contraria: se in X tutte le serie totalmente convergenti sono convergenti allora X è di Banach.

Teorema 8.9 (Criterio di convergenza totale) - In uno spazio di Banach X se una serie $\sum x_n$ è totalmente convergente allora è convergente e

$$(8.8) \quad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|.$$

Dimostrazione. Consideriamo le due successioni di somme parziali

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k \quad \text{e} \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^n \|x_k\|.$$

In quanto convergente, la (σ_n) è di Cauchy in X , quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbf{N} : |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad \forall m, n > \nu$$

e se $n > m > \nu$, per cui $\sigma_n \geq \sigma_m$, si ha

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| = \sigma_n - \sigma_m < \varepsilon.$$

Allora anche (s_n) è di Cauchy e quindi converge per la completezza di X . La (8.8) segue in modo ovvio passando al limite sulla disuguaglianza $\|s_n\| \leq \sigma_n$. □

8.4 Convergenza uniforme

La convergenza di una successione di funzioni (f_n) su A , a valori reali o complessi, rispetto alla norma uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

si chiama *convergenza uniforme*.

Definizione 8.10 - Diciamo che la successione (f_n) converge **uniformemente** a f se

$$(8.9) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbf{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ e } \forall n > \nu(\varepsilon)$$

e si scrive $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. La f si chiama **limite uniforme** della successione (f_n) .

Si confronti questa con la Definizione 8.1. Poiché la disuguaglianza nella (8.9) vale in tutti i punti di A per lo stesso indice ν , il quale adesso dipende solo da ε , essa può essere scritta nella forma

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbf{N} : \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall n > \nu,$$

condizione che equivale a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Ovviamente, dato che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \quad \forall x \in A,$$

la convergenza uniforme è più forte di quella puntuale, nel senso che se $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ allora $f_n \xrightarrow{\text{ptlm}} f$.

Vediamo adesso alcuni esempi di spazi di Banach rispetto alla norma uniforme. Indichiamo con $\mathcal{L}(A)$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali limitate definite su un dominio A .

Teorema 8.11 - $\mathcal{L}(A)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma uniforme.

Dimostrazione. Sia $(f_n) \subset \mathcal{L}(A)$ una successione di Cauchy. Prima di tutto facciamo vedere che (f_n) ammette come limite puntuale una funzione f limitata e poi che f è anche il limite uniforme.

Scelto $\varepsilon > 0$, sia $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tale che

$$(8.10) \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

per ogni $m, n > \nu$ e per ogni $x \in A$. La successione di numeri reali $(f_n(x))$ è, fissato $x \in A$, di Cauchy in \mathbf{R} e quindi converge ad un limite $f(x)$. Fissato $n > \nu$, passando al limite per $m \rightarrow \infty$ nella (8.10) si ottiene

$$(8.11) \quad |f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Dunque $f \in \mathcal{L}(A)$ perché

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Infine, passando all'estremo superiore nella (8.11), si ottiene

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n > \nu,$$

quindi $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. □

Con lo stesso ragionamento, si dimostra, più in generale, che se $A \subset X$ è un insieme qualunque e (Y, d_Y) è metrico completo allora lo spazio $\mathcal{L}(A, Y)$ delle funzioni su A a valori in Y è completo con la distanza $d(f, g) = \sup_{x \in A} d_Y(f(x), g(x))$.

Se si vuole stabilire se una data successione di funzioni limitate converge uniformemente il primo approccio consiste di solito nel riconoscerne l'eventuale limite puntuale, non solo perché si tratta in generale di una tentazione irresistibile essendo la cosa più facile da fare, ma anche perché è effettivamente utile. Infatti, nel caso che questo esista, resta solo da stabilire l'esistenza del limite uniforme, ad esempio verificando che la successione sia di Cauchy, senza bisogno di calcolarlo, perché se esiste non può che coincidere col limite puntuale. Al negativo, teniamo presente che il Teorema 8.11 funziona anche come criterio di non convergenza: se una successione di funzioni limitate ha come limite puntuale una funzione non limitata, la convergenza non può essere uniforme, anzi il limite uniforme non esiste proprio perché se esistesse coinciderebbe, come già detto, col limite puntuale.

Esercizio 8.5 - *Rivedere gli esempi dati all'inizio del capitolo e stabilire in quali di essi vi è, o meno, convergenza puntuale e/o uniforme. Apportare anche delle varianti a piacimento nella definizione delle varie successioni e inventarne delle altre, scambiarle con amici e compagni e pubblicarle su [Facebook](#).*

Nel seguente teorema dimostriamo che anche lo spazio $C_B^0(A) = C^0(A) \cap \mathcal{L}(A)$ delle funzioni continue e limitate (bounded) su A è completo. A questo proposito osserviamo che per il Teorema di Weierstraß $C_B^0(A) = C^0(A)$ se A è compatto.

Teorema 8.12 - $C_B^0(A)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma uniforme

Dimostrazione. Basta dimostrare che $C_B^0(A)$ è chiuso in $\mathcal{L}(A)$ perché un chiuso di uno spazio completo è necessariamente completo. Consideriamo una successione (f_n) di funzioni continue e limitate su A , uniformemente convergente verso una funzione f necessariamente limitata. Dimostriamo che f è continua. Scelto $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|f_n - f\| < \varepsilon/3$ per ogni $n \geq \nu$. Scriviamo adesso la condizione di continuità in un punto $x_0 \in A$ per una qualunque, ma fissata, di queste f_n , ad esempio per la prima di esse, la f_ν

$$\exists \delta > 0 : \quad |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in A \cap I_\delta(x_0).$$

Tenendo presente che $|f_\nu(x) - f(x)|$ e $|f_\nu(x_0) - f(x_0)|$ sono maggiorati da $\|f_\nu - f\|_\infty$, si ottiene

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

per ogni $x \in A \cap I_\delta(x_0)$. Essendo x_0 arbitrario, f è continua su A . □

Più in generale, si dimostra nello stesso modo che se (X, d_X) è metrico e $A \subset X$ allora lo spazio $C_B^0(A, Y) = C^0(A, Y) \cap \mathcal{L}(A, Y)$ delle funzioni continue e limitate su A a valori in Y è completo se (Y, d_Y) lo è.

La proprietà dimostrata nel Teorema 8.12, che la continuità passa al limite nella convergenza uniforme, ci autorizza a scambiare l'ordine dei limiti per $n \rightarrow \infty$ e per $x \rightarrow x_0$ se $x_0 \in A$ è anche di accumulazione. Infatti, sapendo che f è continua, si ha

$$(8.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

ma $f(x)$ si può sostituire con il limite delle $f_n(x)$ e $f(x_0)$ con il limite delle $f_n(x_0)$, per cui la (8.12) diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

ciascuna delle quali, essendo continua, è anche il limite di $f_n(x)$ per $x \rightarrow x_0$. Come si vede da alcuni esempi del § 8.1, la sola convergenza puntuale non garantisce lo scambio dei due limiti.

Analogamente a prima, anche il Teorema 8.12 può essere usato come criterio di non convergenza uniforme. Se il limite puntuale di una successione di funzioni continue e limitate non è continuo il limite uniforme non esiste. Viene spontaneo chiedersi a questo punto se, assumendo per ipotesi che il limite puntuale sia continuo, questa non garantisca la convergenza uniforme. La risposta è in generale negativa. Le funzioni dell'Esempio 8.8, ad esempio, sono continue e limitate e formano una successione convergente puntualmente alla funzione continua identicamente nulla, ma la convergenza non è uniforme perché addirittura

$$\|f_n\|_\infty = \frac{2n}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow +\infty.$$

Nel prossimo teorema si dimostra che se vogliamo dedurre la convergenza uniforme dalla continuità del limite puntuale bisogna aggiungere due ipotesi: che la successione sia (puntualmente) monotona e che il dominio sia compatto. La prima non è soddisfatta nell'esempio appena citato, dove infatti non c'è convergenza uniforme. Per

capire il ruolo della compattezza del dominio consideriamo l'Esempio 8.2 ma sull'intervallo $[0, 1[$ invece che su $[0, 1]$. La successione di funzioni continue x^n è monotona decrescente e converge puntualmente alla funzione continua nulla, ma la convergenza non è uniforme perché $\sup x^n = 1$.

Teorema 8.13 (di Dini) - Sia $(f_n) \subset C^0(K)$ una successione monotona di funzioni reali continue su un insieme K compatto e sia f il suo limite puntuale. Se $f \in C^0(K)$ allora $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$.

Dimostrazione. L'esistenza del limite puntuale discende banalmente da quello per le successioni monotone di numeri reali (v. il corso di Analisi 1). Supponiamo che (f_n) sia crescente, cioè che $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in K$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Posto $g_n = f - f_n$, si ha, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $g_n \geq 0$ e $g_n \in C^0(K)$, inoltre $g_n \xrightarrow{\text{ptlm}} 0$, per cui basta dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_K g_n = 0.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$, siano $x_n \in K$ un punto di massimo assoluto e $M_n = g_n(x_n)$ il massimo di g_n . La successione (M_n) è non negativa e decrescente in quanto

$$M_{n+1} = g_{n+1}(x_{n+1}) \leq g_n(x_{n+1}) \leq g_n(x_n) = M_n,$$

dunque ammette come limite il suo estremo inferiore $M \geq 0$. Essendo K compatto, esistono una sottosuccessione $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ ed un punto $x_0 \in K$ tali che $x_{k_n} \rightarrow x_0$. Per ogni $m < n$ si ha $k_m < k_n$ e per la monotonia

$$g_{k_m}(x_{k_n}) \geq g_{k_n}(x_{k_n}) = M_{k_n} \geq M,$$

d'altra parte g_{k_m} è continua, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{k_m}(x_{k_n}) = g_{k_m}(x_0) \geq M \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Ora, siccome sappiamo che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_{k_m}(x_0) = 0,$$

deve essere $M = 0$. □

Le funzioni su \mathbf{R}

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{se } x \geq -n \\ 0 & \text{se } x < -n \end{cases}$$

formano una successione crescente di funzioni continue che converge puntualmente su \mathbf{R} alla funzione continua $f(x) = e^x$. Per il Teorema 8.13 la convergenza è uniforme su ogni compatto. Non lo è su tutto \mathbf{R} perché né le f_n , né la f sono limitate.

L'Esempio 8.2 mostra che non basta eliminare un punto problematico, il punto $x = 1$ in questo caso, per ottenere la convergenza uniforme sul resto del dominio, e non cambia nulla se in quel punto la successione $f_n(1)$ converge, diverge o è indeterminata. In tutti e tre i seguenti casi

$$(8.13) \quad f_n(x) = x^n, \quad f_n(x) = nx^n, \quad f_n(x) = |\operatorname{sen} n|x^n$$

la f_n tende a 0 puntualmente su $[0, 1[$, ma non uniformemente e nel punto $x = 1$ si comportano diversamente. È sufficiente invece eliminare un intorno di quel punto, pur piccolo quanto si vuole, e vale subito la convergenza uniforme sul complementare. Basta cioè considerare un qualsiasi $\delta > 0$ e sull'intervallo $[0, 1 - \delta]$ (che non è vuoto se $\delta < 1$) la successione converge uniformemente dato che in tutti e tre i casi si ha

$$\sup_{x \in [0, 1 - \delta]} f_n(x) = f_n(1 - \delta) = (1 - \delta)^n \rightarrow 0.$$

In altre parole, ci può essere convergenza puntuale su tutto il dominio fino al bordo, se è un insieme chiuso, oppure solo sulla sua parte interna, senza che sia garantita la convergenza uniforme né all'interno né fino al bordo. Però può valere su ogni compatto interno, che non abbia cioè punti in comune col bordo.

Il seguente risultato, conseguenza immediata del Teorema 8.12, tratta il passaggio dalla convergenza uniforme sui compatti interni alla convergenza, ma solo puntuale, su tutto il dominio verso una funzione continua. Poiché in questa situazione ciò che su avviene sul bordo è del tutto imprevedibile, come si è visto nella (8.13), assumiamo che il dominio sia un aperto.

Corollario 8.14 (convergenza uniforme sui compatti) - *Siano A un aperto di \mathbf{R} o di \mathbf{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ e (f_n) una successione di funzioni continue su A tali che per ogni compatto $K \subset A$ si abbia $f_n|_K \xrightarrow{\text{unif}} f|_K$. Allora $f \in C^0(A)$ e $f_n \xrightarrow{\text{ptlm}} f$ su A .*

La successione $f_n(x) = \text{sen}(x/n)$, $x \in \mathbf{R}$, ammette la funzione identicamente nulla come limite puntuale, però non converge uniformemente perché $\|f_n\|_\infty = 1$. Tuttavia converge uniformemente su ogni compatto, infatti, preso un intervallo $[-R, R]$, si ha

$$\sup_{|x| \leq R} \left| \text{sen} \frac{x}{n} \right| \leq \sup_{|x| \leq R} \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{R}{n} \rightarrow 0.$$

Se invece di un intervallo così particolare prendiamo un compatto K qualunque basta racchiuderlo in un intervallo di quel tipo, con R abbastanza grande, e il ragionamento fila ugualmente.

Esercizio 8.6 - *Adattare il ragionamento appena fatto per studiare il comportamento della successione in due variabili*

$$f_n(x, y) = \text{sen} \frac{x + y}{n}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

8.5 Passaggio al limite per la derivata e l'integrale

Ci chiediamo adesso se, quando, sotto quali ipotesi il segno di derivata e il segno di integrale commutano col passaggio al limite di una successione. In altre parole se, data una successione di funzioni derivabili o integrabili, anche il suo limite, se esiste, è derivabile o integrabile e se la derivata o l'integrale del limite coincidono col limite della successione delle derivate o degli integrali. L'Esempio 8.6 mostra che la derivata non passa al limite perché in questo caso il limite non è derivabile. Ma se anche lo fosse non è detto che la sua derivata sia il limite delle derivate, il quale potrebbe anche non esistere. Per esempio la successione

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \text{sen} n^2 x, \quad x \in [0, 2\pi],$$

ammette oscillazioni sempre più fitte con ampiezza che tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, cioè

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Dunque ammette la funzione nulla, che è derivabile, come limite uniforme, ma la successione delle derivate

$$f'_n(x) = n \cos n^2 x$$

non converge neanche puntualmente. Possiamo usare la stessa successione per mostrare che le lunghezze $\ell(\Gamma_n)$ dei grafici (ecco coinvolto anche l'integrale!) divergono,

sebbene il grafico del limite abbia lunghezza 2π . Si ha infatti

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_n) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + n^2 \cos^2 n^2 x} \, dx > n \int_0^{2\pi} |\cos n^2 x| \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi n^2} |\cos y| \, dy \\ &= n \int_0^{2\pi} |\cos y| \, dy = 4n \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy = 4n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

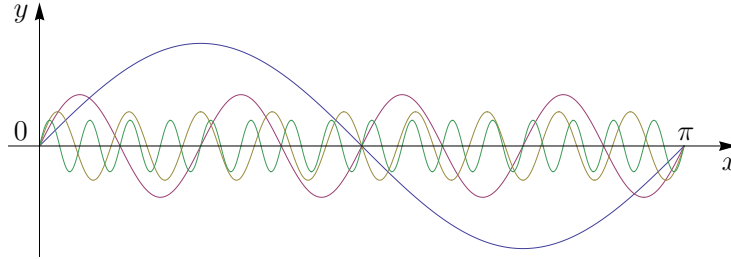


Figura 8.8: Le funzioni $\frac{1}{n} \sin n^2 x$ su $[0, 2\pi]$.

Un altro esempio, questa volta con lunghezze convergenti, è dato da una successione di funzioni definite sull'intervallo $[0, 1]$, i cui grafici hanno lunghezza costante, pari a $\sqrt{2}$, ma convergente uniformemente alla funzione nulla, il cui grafico ha invece lunghezza 1. Per costruirle, si considera il prolungamento 1-periodico su \mathbf{R} , indichiamolo con φ , della funzione $\varphi_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|, \quad x \in [0, 1],$$

poi si pone

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx), \quad x \in [0, 1].$$

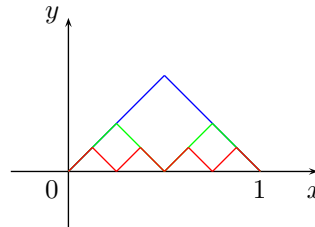


Figura 8.9: Le funzioni $\varphi(nx)/n$ su $[0, 1]$.

L'assenza nella convergenza uniforme di informazioni sulle derivate ci suggerisce la costruzione di controesempi sfruttando le funzioni periodiche rapidamente oscillanti. È chiaro che controllare la convergenza delle derivate, impedire ad esempio che raggiungano valori arbitrariamente grandi o imporre che passino al limite, equivale a controllare queste oscillazioni, ma per questo bisogna assumere a priori che le derivate convergano, come spiegato nel seguente teorema.

Teorema 8.15 - Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo limitato, $(f_n) \subset C^1(I)$ una successione di funzioni tale che $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} \varphi$ per una certa φ (necessariamente continua su I) e tale che esista finito il limite $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ in un punto $x_0 \in I$. Allora esiste una funzione $f \in C^1(I)$ tale che $f' = \varphi$ e $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$.

Dimostrazione. Ognuna delle f_n soddisfa il teorema fondamentale del calcolo

$$(8.14) \quad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \quad \forall x \in I.$$

Poiché φ è continua, la funzione

$$(8.15) \quad f(x) = \ell + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt \quad \forall x \in I,$$

appartiene a $C^1(I)$ e $f' = \varphi$ su I . Resta da dimostrare che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. Per differenza delle (8.14) e (8.15) si ha

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x |f'_n(y) - \varphi(y)| dy \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \|f'_n - \varphi\|_\infty m(I) \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

e passando a sinistra all'estremo superiore, si ottiene la tesi

□

Vale la pena osservare che la situazione più ricorrente è quella in cui già si conosce il limite puntuale ovunque anziché in un solo punto. Naturalmente il teorema vale a maggior ragione, ma se così lo vogliamo formulare, riguarda un altro caso in cui dalla convergenza puntuale segue la convergenza uniforme, come nel Teorema 8.13.

Immediata conseguenza del Teorema 8.15 è il seguente risultato. Si osservi, nell'enunciato, che essendo I limitato, la limitatezza della derivata di ordine più alto implica la lipschitzianità, e quindi l'uniforme continuità e la limitatezza, di tutte le derivate precedenti fino alla f .

Corollario 8.16 - Se $I \subset \mathbf{R}$ è un intervallo limitato lo spazio vettoriale $C_B^k(I) = \{f \in C^k(I) \mid f^{(k)} \in \mathcal{L}(I)\}$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{C^k(I)} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_\infty$$

per ogni $k \geq 1$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la tesi per $k = 1$, poi si può procedere per induzione. Se (f_n) è una successione di Cauchy in $C_B^1(I)$ allora (f_n) e (f'_n) sono di Cauchy in $C_B^0(I)$, quindi esistono $f, \varphi \in C_B^0(I)$ tali che $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ e $f'_n \xrightarrow{\text{unif}} \varphi$. Dal Teorema 8.15 segue $f \in C^1(I)$ e $f' = \varphi$ su I .

□

La notazione $f_n \xrightarrow{C^k(I)} f$ significa $f_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} f^{(k)}$ e ogni derivata $f_n^{(i)}$ con $i < k$, converge puntualmente, ma basta in un solo punto, e quindi uniformemente alla $f^{(i)}$.

In conclusione, risulta quindi naturale assumere $\|f\|_\infty$ come la norma di C^0 , o meglio di C_B^0 , $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ come quella di C^1 e così via, sono le più appropriate nei rispettivi spazi.

Possiamo ora spiegare come il funzionale lunghezza del grafico

$$l(\Gamma) = \int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

che nei due esempi di poco fa non si era comportato molto bene, si comporti meglio adesso rispetto ad una norma che tenga conto della derivata. È infatti continuo rispetto alla convergenza in $C^1(I)$ piuttosto che rispetto alla convergenza uniforme.

Se $f_n \xrightarrow{C^1} f$, per la convergenza uniforme e la limitatezza della successione delle derivate si ha

$$\begin{aligned} |\ell(\Gamma) - \ell(\Gamma_n)| &= \left| \int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} dx - \int_I \sqrt{1 + f'_n(x)^2} dx \right| \\ &\leq \int_I \frac{|f'(x)^2 - f'_n(x)^2|}{\sqrt{1 + f'(x)^2} + \sqrt{1 + f'_n(x)^2}} dx \leq \frac{1}{2} \int_I |f'(x) + f'_n(x)| |f'(x) - f'_n(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} (\|f'\|_\infty + \|f'_n\|_\infty) \int_I |f'(x) - f'_n(x)| dx \leq C \|f' - f'_n\|_\infty m(I). \end{aligned}$$

Come annunciato, anche per il passaggio al limite sotto il segno di integrale ci chiediamo sotto quali condizioni

$$f_n \rightarrow f \Rightarrow \int_A f_n \rightarrow \int_A f,$$

cioè quando l'integrale è continuo. La successione di funzioni integrabili su $[0, +\infty)$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n-1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

con $n \geq 1$, converge puntualmente alla funzione identicamente nulla, ma ognuna ha integrale pari a 1. Lo stesso vale per la successione puntualmente infinitesima su $[0, 1]$, ma non limitata,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{se } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con $n \geq 2$, nel caso $\alpha = 1$. Se $\alpha > 1$ la successione degli integrali è addirittura divergente, mentre va a 0 per $\alpha < 1$. Nell'Esempio 8.8 si mostra una successione di funzioni con limite puntuale nullo la cui norma uniforme, come abbiamo visto, tende a $+\infty$, mentre gli integrali tendono a 1.

Se I è un intervallo limitato, nello spazio $\mathcal{R}(I)$ delle funzioni Riemann-integrabili su I , munito della norma uniforme, il passaggio al limite sotto il segno di integrale è consentito dal seguente teorema di completezza. Premettiamo che una successione (f_n) di funzioni integrabili è detta *convergente in media* a f se anche f è integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f| dx = 0.$$

Teorema 8.17 - $\mathcal{R}(I)$ è uno spazio di Banach. Inoltre, se la successione $(f_n) \subset \mathcal{R}(I)$ converge uniformemente a f , allora converge a f anche in media e

$$(8.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Dimostrazione. Come nel Teorema 8.12, dal momento che $\mathcal{L}(I)$ è completo, basta dimostrare che il suo sottoinsieme $\mathcal{R}(I)$ è chiuso. Sia $(f_n) \subset \mathcal{R}(I)$ una successione uniformemente convergente ad una certa f necessariamente appartenente a $\mathcal{L}(I)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \nu$

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Poiché le f_n sono integrabili e

$$\int_I [(f_n(x) + \varepsilon) - (f_n(x) - \varepsilon)] dx = 2\varepsilon m(I),$$

si ha $f \in \mathcal{R}(I)$. Per la convergenza in media e quella degli integrali, basta osservare che

$$(8.17) \quad \left| \int_I f_n(x) dx - \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_\infty m(I).$$

□

Ricordando la condizione di continuità per successioni, la (8.16) può essere interpretata dicendo che il *funzionale integrale*

$$f \rightarrow \int_A f(x) dx$$

è continuo da $\mathcal{R}(A)$ in \mathbf{R} rispetto alla convergenza uniforme. In altre parole, la misura con segno, l'area o il volume, a seconda della dimensione, della regione compresa tra il grafico di f e il suo dominio, dipende con continuità da f .

Esercizio 8.7 - Si discuta al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la convergenza puntuale, uniforme e in media della successione

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2} \quad x \in [0, 1].$$

8.6 Serie di funzioni

Tutto ciò che è stato detto finora può essere applicato alle serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

la cui somma $s(x)$ è il limite della successione delle somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

Evidentemente si suppone che in un qualche insieme A di convergenza da determinare la serie ammetta una somma che poi si spera di poterla calcolare. Naturalmente bisogna di volta in volta precisare in che senso va interpretata la convergenza. Nel senso puntuale significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x) - s(x)| = 0 \quad \forall x \in A,$$

nel senso della convergenza rispetto a qualche norma, uniforme, in L^1 o in L^p ecc., allora significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\| = 0.$$

Adattando alla successione delle somme parziali di una serie i risultati contenuti nei Teoremi 8.15 e 8.17, nell'ipotesi di convergenza uniforme, si deduce in modo ovvio la possibilità di derivare e integrare "per serie", cioè termine a termine, che è come dire che i segni di derivata e di integrale commutano col simbolo di somma.

Teorema 8.18 (Derivazione termine a termine) - Se la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad (f_n) \subset C^1(I),$$

ammette per somma puntuale una funzione f su I (basta in un punto $x_0 \in I$) e la serie delle derivate converge uniformemente allora $f \in C^1(I)$, la serie converge a f uniformemente e

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Teorema 8.19 (Integrazione termine a termine) - Se la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad (f_n) \subset \mathcal{R}^1(I),$$

converge uniformemente ad una funzione f allora $f \in \mathcal{R}(I)$, la serie converge a f anche in media e

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Riguardo le serie negli spazi di Banach che abbiamo considerato, $\mathcal{L}(A)$, $C_B^k(A)$, $\mathcal{R}(I)$, $L^p(I)$, una condizione sufficiente per la convergenza nella relativa norma ci viene fornita dal criterio di convergenza totale dimostrato nel Teorema 8.9.

Esempi

8.9 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

converge totalmente nella norma uniforme su \mathbf{R} . Infatti

$$\max_{\mathbf{R}} \frac{|x|}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

che al variare di $n \in \mathbf{N}$ formano i termini di una serie convergente, pertanto la serie data converge anche uniformemente.

8.10 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

non converge totalmente su \mathbf{R} perché

$$\max_{\mathbf{R}} \frac{1}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{n}$$

che sono i termini di una serie divergente. Tuttavia converge uniformemente. Possiamo infatti notare che la serie delle derivate

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+nx^2)^2}$$

converge totalmente e quindi uniformemente. Per il Teorema 8.18 converge uniformemente anche la serie data.

Esercizio 8.8 - Studiare la convergenza totale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}.$$

Nell'esercizio proposto, in cui la convergenza totale non vale, si può dimostrare la convergenza uniforme senza considerare la serie delle derivate, ma direttamente. Dobbiamo valutare la distanza tra la successione delle ridotte e la somma

$$\begin{aligned} \left| s(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2} \right| = \frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+2+x^2} \\ &+ \frac{1}{n+3+x^2} - \frac{1}{n+4+x^2} + \dots \leq \frac{1}{n+1+x^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Un caso importante è quello delle serie di potenze con la norma uniforme, a cui il criterio di convergenza totale si applica in modo particolarmente semplice.

Teorema 8.20 - Sia $R > 0$ il raggio di convergenza di una serie di potenze

$$(8.18) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Allora per ogni $r < R$ tale serie è totalmente e quindi uniformemente convergente sul disco chiuso $D_r(0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$.

Dimostrazione. Posto

$$f_n(z) = c_n z^n \quad \forall |z| < R,$$

basta osservare che per ogni $r < R$ la norma uniforme di ogni f_n sul disco di raggio r è data da

$$\|f_n\|_{\infty} = \max_{|z| \leq r} |c_n||z|^n = |c_n|r^n$$

e ricordare che per l'assoluta convergenza su $B_R(0)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|r^n$$

è convergente. Per il Teorema 8.9 la nostra serie è uniformemente convergente su ogni disco chiuso, e quindi compatto, $D_r(0)$ (e quindi anche su ogni compatto $K \subset B_R(0)$). \square

In altre parole, ogni serie di potenze, il cui dominio di convergenza non sia ridotto ad un solo punto, converge uniformemente sui compatti contenuti nel cerchio di convergenza $|z| < R$, su ogni insieme limitato se $R = +\infty$, e la sua somma è sempre, di conseguenza, una funzione continua. Non è detto però, supponendo $R > 0$ finito, che la convergenza uniforme, tanto meno quella totale, sia estendibile a tutto il cerchio aperto o addirittura al disco chiuso $|z| \leq R$. Per capire ciò che succede sul bordo ci viene in aiuto il Teorema di Abel del quale abbiamo già visto, nel corso di Analisi 1, una versione parziale senza dimostrazione, ma sufficiente per stabilire l'esistenza del prolungamento continuo della somma, dall'interno lungo un raggio, fino ad un punto del bordo dove la serie converge. Adesso abbiamo gli elementi per affrontarlo nella sua versione completa che riguarda anche la convergenza uniforme della serie lungo quel raggio.

Teorema 8.21 (di Abel) - Sia $\sum c_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ finito e somma $s(z)$ per $|z| < R$. Se la serie converge anche in un punto \hat{z} tale che $|\hat{z}| = R$ con somma $s(\hat{z})$ la convergenza è uniforme lungo tutto il raggio fino a \hat{z} . In particolare, se $\hat{z} = Re^{i\hat{t}}$

$$\lim_{\rho \rightarrow R} s(\rho e^{i\hat{t}}) = s(\hat{z}).$$

Dimostrazione. Il cambio di variabile (dilatazione) $z = R w$, $|w| < 1$, e la possibilità di ridenominare come c_n i prodotti $c_n R^n$, ci permettono di supporre $R = 1$ senza ledere la generalità, inoltre, se $\hat{z} = e^{i\hat{t}}$, con l'ulteriore cambio di variabile (rotazione) $z = e^{i\hat{t}} w$ ci si riconduce al caso $\hat{z} = 1$. Dobbiamo dunque dimostrare che la convergenza è uniforme sul raggio dei reali da 0 a 1 compreso. Posto

$$s_n = s_n(1) = \sum_{k=0}^n c_k \quad \text{e} \quad s = s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

per $0 \leq x \leq 1$ e $m \leq n$ si ha

$$\begin{aligned} s_n(x) - s_m(x) &= \sum_{k=m+1}^n c_k x^k = \sum_{k=m+1}^n (s_k - s_{k-1}) x^k \\ &= \sum_{k=m+1}^n s_k x^k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k x^{k+1} = \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}) + s_n x^n - s_m x^{m+1} \end{aligned}$$

e siccome

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (x^k - x^{k+1}) + s_n x^n - s_m x^{m+1} = 0,$$

la precedente relazione può essere riscritta così

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n-1} (s_k - s)(x^k - x^{k+1}) + (s_n - s)x^n - (s_m - s)x^{m+1}.$$

Scelto $\varepsilon > 0$, per ogni $k \geq m$ con m abbastanza grande si ha $|s_k - s| < \varepsilon$, quindi

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \left(\sum_{k=m+1}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) + x^n + x^{m+1} \right) \varepsilon = 2x^{m+1} \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

per ogni $x \in [0, 1]$. Pertanto la convergenza è uniforme su tale intervallo, cioè su tutto il raggio incluso l'estremo 1, e la somma della serie è in esso una funzione continua. \square

Viene adesso spontaneo chiedersi: se in tutti i punti di un arco della circonferenza unitaria la serie converge, vista ora la convergenza uniforme sui relativi raggi, possiamo dedurre la convergenza uniforme sull'intero spicchio? In generale no, non basta che vi sia convergenza uniforme su ogni curva di una famiglia di curve che ricopre tutto un dominio per avere convergenza uniforme su tutto il dominio. Si pensi ad esempio alla successione di funzioni di due variabili sul quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f_n(x, y) = nx(1 - x^2)^n$$

(liberamente ispirata all'Esempio 8.8). Essa converge uniformemente sui segmenti $x = c$ la cui unione è tutto Q , ma non converge uniformemente su Q . Certamente se la somma della serie di potenze non è continua sull'arco, oppure, se la convergenza non è uniforme sull'arco non si può sperare che lo sia su tutto lo spicchio frontiera inclusa.

Quali condizioni allora assicurano la convergenza uniforme sull'arco? Risponderemo a questa domanda dopo aver trattato il seguente esempio.

La serie

$$(8.19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n}$$

converge puntualmente in \mathbf{R} per il criterio di Dirichlet. Per calcolarne la somma, banalmente nulla nei punti $k\pi$, possiamo riconoscerla come la parte immaginaria della serie a termini complessi

$$(8.20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{inx}}{n},$$

ma questa è la restrizione alla circonferenza unitaria della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

che, come sappiamo, ha raggio di convergenza $R = 1$ ed ha per somma $\log(1+z)$ per $|z| < 1$. Ad essa è applicabile la versione che conosciamo del Teorema di Abel in tutti i punti della circonferenza unitaria eccetto in $z = -1$, quindi per ogni $x \in]-\pi, \pi[$ la somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n} = \operatorname{Im} \log(1 + e^{ix}) = \operatorname{Arg}(1 + e^{ix}) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{x}{2}$$

pensata prolungata periodicamente al di fuori di $] -k\pi, k\pi[$. Che la convergenza non sia uniforme è evidente dal fatto che i termini della serie sono funzioni continue, mentre la somma è discontinua nei punti $(2k+1)\pi$. Tuttavia in ogni compatto $[a, b]$ contenuto nell'aperto $] -\pi, \pi[$, anche se la convergenza non è totale in quanto

$$\left\| \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{n},$$

è comunque uniforme. Per vederlo, dimostriamo che le ridotte (s_n) della serie (8.20) formano una successione di Cauchy. Infatti la successione

$$\alpha_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} e^{ikx} = \frac{(-e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} + 1},$$

è limitata in modulo su $[a, b]$ dalla funzione

$$\varphi(x) = \frac{2}{|e^{ix} + 1|} = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos x}},$$

quindi

$$\begin{aligned} s_n(x) - s_m(x) &= \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^{k+1} e^{ikx}}{k} = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\ &= \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \alpha_k - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k+1} \alpha_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \alpha_k - \frac{\alpha_m}{m+1} + \frac{\alpha_n}{n+1} \end{aligned}$$

e passando ai moduli, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n sufficientemente grandi, tenendo presente che $\varphi(x) \leq M$ su $[a, b]$, si ha

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s_m(x)| &\leq \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \right) \varphi(x) \\ &\leq \left(\frac{2}{m+1} + \frac{1}{n+1} \right) \varphi(x) < M\varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Certo, su $] - \pi, \pi[$ questa stima non servirebbe a nulla perché φ non è limitata, ma almeno su $[a, b]$, dove invece è limitata, è utile e garantisce la convergenza uniforme. Nel ragionamento fatto incide in maniera determinante la convergenza della serie $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, conseguenza del fatto che $(1/n)$ è monotona e convergente. Se infatti $(a_n) \subset \mathbf{R}$ è ad esempio crescente con limite finito ℓ allora

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \rightarrow \ell - a_0,$$

analogamente se decresce. Questa osservazione non è però applicabile al caso dei coefficienti complessi per i quali la monotonia non ha senso. La condizione giusta da assumere è allora quella della seguente definizione.

Definizione 8.22 - Una successione $(c_n) \subset \mathbf{C}$ è detta **a variazione limitata** se la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+1} - c_n|$$

è convergente.

Ogni successione reale monotona e convergente è ovviamente a variazione limitata ed è immediato verificare che lo è anche la differenza di due successioni siffatte, monotone nello stesso senso. Viceversa, se una successione reale è a variazione limitata non è detto che sia monotona, però è comunque differenza di due successioni monotone nello stesso senso e convergenti. Nel caso complesso, includendo quindi anche quello reale, una successione a variazione limitata è sicuramente convergente in quanto di Cauchy, infatti se $m \leq n$

$$|c_n - c_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |c_k - c_{k-1}|.$$

L'esempio precedente può essere a questo punto spiegato e generalizzato con il seguente teorema che riguarda il comportamento sul bordo del cerchio di convergenza di una serie di potenze. Come abbiamo fatto nel Teorema di Abel possiamo supporre che il raggio di convergenza sia 1.

Teorema 8.23 - Ogni serie di potenze $\sum c_n z^n$ con raggio di convergenza 1 e con $(c_n) \subset \mathbf{C}$ a variazione limitata e infinitesima converge uniformemente su ogni arco chiuso della circonferenza unitaria che non contiene il punto 1 (oppure, in modo equivalente, su ogni arco che non contiene un intorno del punto 1).

Dimostrazione. La dimostrazione è quasi una ripetizione dell'esempio appena fatto. Consideriamo la successione

$$\alpha_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$$

che, similmente a prima, è limitata in modulo dalla funzione

$$\varphi(t) = \frac{2}{|e^{it} - 1|} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos t}}.$$

Sull'arco $[a, b]$ della circonferenza unitaria non contenente 0 si ha $\varphi(t) \leq M$ e

$$\begin{aligned} (s_n(z) - s_m(z))|_{z=e^{it}} &= \sum_{k=m+1}^n c_k e^{ikt} = \sum_{k=m+1}^n c_k (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\ &= \sum_{k=m+1}^n c_k \alpha_k - \sum_{k=m}^{n-1} c_{k+1} \alpha_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) \alpha_k + c_n \alpha_n - c_{m+1} \alpha_m \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per m, n abbastanza grandi e per ogni $t \in [a, b]$ si ha

$$|s_n(e^{it}) - s_m(e^{it})| \leq \left(\sum_{k=m+1}^{n-1} |c_k - c_{k+1}| + |c_n| + |c_{m+1}| \right) \varphi(t) < 3\varepsilon \varphi(t) \leq 3M\varepsilon,$$

quindi (s_n) è di Cauchy su $[a, b]$ e converge uniformemente ad una funzione necessariamente continua. \square

Possiamo adesso adattare il Teorema di Abel al caso dello spicchio, la dimostrazione è praticamente la stessa.

Teorema 8.24 - Ogni serie di potenze $\sum c_n z^n$ con raggio di convergenza 1 e con $(c_n) \subset \mathbf{C}$ a variazione limitata e infinitesima converge uniformemente su ogni spicchio chiuso della circonferenza unitaria che non contiene il punto 1.

Dimostrazione. Scelto uno spicchio che non contiene 1, l'arco corrispondente sulla circonferenza unitaria è il luogo dei punti e^{it} al variare di t in un intervallo $[a, b] \subset]0, 2\pi[$. Per il Teorema 8.23 la serie su quest'arco

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in [a, b],$$

converge uniformemente. Siano $s(t)$ la somma e $s_n(t)$ la successione delle somme parziali. Dobbiamo dimostrare che la serie

$$s(\rho e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n e^{int}$$

converge uniformemente sull'insieme $\{(\rho, t) \mid 0 \leq \rho \leq 1, a \leq t \leq b\}$. Ma da qui in poi si può ripetere identico il ragionamento fatto nel Teorema di Abel, con ρ al posto di x e $s_n(t)$, $s(t)$ al posto di $s_n(1)$, $s(1)$. Otteniamo così nella parte finale che, scelto $\varepsilon > 0$, per ogni $k \geq m$ con m abbastanza grande si ha $|s_k(t) - s(t)| < \varepsilon$ uniformemente, cioè per ogni $t \in [a, b]$, quindi per ogni $\rho \in [0, 1]$

$$|s_n(\rho e^{it}) - s_m(\rho e^{it})| < \left(\sum_{k=m+1}^{n-1} (\rho^k - \rho^{k+1}) + \rho^n + \rho^{m+1} \right) \varepsilon = 2\rho^{m+1} \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

\square

Torniamo alla derivazione e integrazione per serie. Il seguente corollario è un'immediata conseguenza del Teorema 8.18, ma l'avevamo già dimostrato nel corso di Analisi 1 con uno strumento assai più povero e con molta più fatica, avevamo a disposizione infatti la sola convergenza puntuale.

Corollario 8.25 - La somma $s(z)$ della serie di potenze (8.18), con raggio di convergenza $R > 0$, è una funzione derivabile e

$$(8.21) \quad s'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che anche la serie delle derivate ammette lo stesso R come raggio di convergenza, pertanto converge totalmente, e quindi uniformemente, su ogni disco compatto $D_r(0)$ con $r < R$. Per il Teorema 8.18 la successione delle somme parziali

$$s'_n(z) = \sum_{k=1}^n k c_k z^{k-1}$$

converge su ogni $D_r(0)$ uniformemente a $s'(z)$. □

Tanto per rinfrescare la memoria su cose già dette in Analisi 1, possiamo a questo punto ricordare che allora la somma di una serie di potenze è infinitamente derivabile all'interno del cerchio di convergenza, che rimane lo stesso per tutte le derivate, inoltre la serie dei termini derivati di ordine k ha per somma la derivata k -esima della serie di partenza. Le stesse conclusioni si possono dedurre per le primitive, vista la stabilità anche dell'integrale rispetto alla convergenza uniforme. Dalla relazione

$$s^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)c_n z^{n-k}$$

si ricava il valore del termine noto, quello con $n = k$

$$s^{(k)}(0) = k!c_k$$

e siccome questa vale per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ottiene la rappresentazione di Taylor

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Non stiamo qui a ripetere esempi già visti in Analisi 1 e come sia possibile calcolare la somma di molte serie di potenze usando la derivazione e/o l'integrazione termine a termine. Si consiglia a proposito di rivedere le questioni legate alle funzioni analitiche tenendo presente, in particolare, quale estensione possa avere un dato cerchio di convergenza in base al tipo di funzione e come la funzione possa estendersi al di fuori del cerchio.

8.7 Gli spazi L^p

Torniamo al Teorema 8.17 e osserviamo bene il passaggio chiave alla fine della dimostrazione. Nella (8.17) la convergenza degli integrali (a primo membro) viene ottenuta assumendo la convergenza uniforme perché questa ipotesi fa tendere a 0 la norma uniforme (a terzo membro) che dei tre termini è il più grande. Ma tale tipo di convergenza non è necessaria, è evidente infatti che per la convergenza degli integrali basta che tenda a 0 il termine di mezzo, lasciando che la norma uniforme si comporti anche diversamente. Questa osservazione ci suggerisce di considerare una nuova norma di natura integrale (già vista en passant), precisamente

$$(8.22) \quad \|f\|_1 = \int_I |f(x)| dx,$$

col vantaggio che può essere applicata non solo alle funzioni di $\mathcal{R}(I)$, ma a tutte le funzioni Riemann-integrabili in senso improprio, anche definite su intervalli non limitati, purché assolutamente integrabili. Questo nuovo spazio, indichiamolo con $\mathcal{R}^{ass}(I)$, è vettoriale e normato, quindi metrico con la distanza

$$d(f, g) = \|f - g\|_1,$$

ma purtroppo non è completo, non è uno spazio di Banach. Ora non è il caso (e non c'è bisogno) di approfondire in questa sede l'argomento per spiegare perché non è completo. Più facile è invece mostrare che lo spazio $C_B^0(I)$, che, ricordiamo, è completo con la norma uniforme, non lo è con la norma (8.22). La successione dell'Esempio 8.5 ristretta all'intervallo $[-1, 1]$

$$f_n(x) = \arctg nx, \quad x \in [-1, 1],$$

è di Cauchy perché se $m < n$ la distanza

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^1 |\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg} mx| dx = 2 \int_0^1 (\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg} mx) dx \\ &= 2(\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} m) - \left(\frac{\log(1+n^2)}{n} - \frac{\log(1+m^2)}{m} \right) \end{aligned}$$

tende a 0 per $n, m \rightarrow \infty$, ma la f_n converge in media alla funzione discontinua $f(x) = \pi/2 \operatorname{sign} x$, infatti la distanza

$$\|f - f_n\|_1 = 2 \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right) dx = \pi - 2 \operatorname{arctg} n + \frac{\log(1+n^2)}{n}$$

tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Conviene allora ricorrere al Teorema 8.3 e passare al completamento di $C_B^0(I)$ che indicheremo con $L^1(I)$. In virtù dell'Esercizio 8.2 questo nuovo spazio è anche il completamento di $\mathcal{R}^{ass}(I)$ perché vale la catena di inclusioni

$$C_B^0(I) \subset \mathcal{R}^{ass}(I) \subset L^1(I).$$

Esiste una teoria dell'integrazione più generale di quella di Riemann, quella secondo **Lebesgue**, in cui lo stesso spazio $L^1(I)$, delle funzioni integrabili il cui modulo ha integrale finito, viene costruito direttamente e non con un'operazione di completamento, approccio un po' astratto che in effetti può sembrare artificioso, ma non la trattiamo in questa sede perché ci porterebbe troppo lontano dai nostri scopi e in fondo non ci serve.

Che la (8.22) definisca una norma è immediato da verificare, ma bisogna fare attenzione alla prima proprietà

$$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ q.o.}$$

dove *q.o.* significa *quasi ovunque*, cioè escluso al più su un insieme di misura (di Lebesgue) nulla. Norma nulla non implica funzione rigorosamente nulla ovunque, ma è facile rimediare, basta identificare due o più funzioni che differiscono su un insieme di punti di misura nulla mediante la relazione di equivalenza

$$f \sim g \Leftrightarrow m\{x \in I \mid f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Così $L^1(I)$, inteso come l'insieme delle (classi di equivalenza di) funzioni assolutamente integrabili (secondo Lebesgue), è di Banach.

Allo stesso modo definiamo $L^p(I)$, $p > 1$, come il completamento di $C_B^0(I)$ rispetto alla norma

$$(8.23) \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

con la stessa relazione di equivalenza. Si tratta, in altre parole, delle funzioni su I la cui potenza p -esima del modulo è integrabile secondo Lebesgue, cioè tali che $|f|^p \in L^1(I)$. Dunque $C_B^0(I)$ è, per definizione, denso in $L^p(I)$ per ogni $p \geq 1$, nel senso che

$$(8.24) \quad \forall f \in L^p(I) \text{ e } \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C_B^0(I) : \|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Lo spazio $L^p(I)$ è completo per costruzione, ma resta da verificare che è uno spazio vettoriale e che la (8.23) definisce una norma. È ovvio che se $\lambda f \in L^p(I)$ se $f \in L^p(I)$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, o $\lambda \in \mathbf{C}$ nel caso di funzioni a valori complessi; per vedere che $f + g \in L^p(I)$

per ogni $f, g \in L^p(I)$ basta ricorrere alla funzione $t \rightarrow t^p$ che per ogni $p \geq 1$ è convessa su $]0, +\infty[$, quindi

$$\left(\frac{|f| + |g|}{2}\right)^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2}$$

da cui

$$(|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p),$$

così il primo membro ha integrale finito se sono finiti gli integrali di $|f|^p$ e $|g|^p$. Veniamo alla norma. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, le altre sono banali, dobbiamo premettere la seguente proposizione.

Proposizione 8.26 (disuguaglianza di Hölder) - Per ogni coppia di numeri reali $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$, detti per questo **esponenti coniugati**, se $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$ allora $fg \in L^1(I)$ e

$$(8.25) \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dimostrazione. Se $\|f\|_p = 0$ oppure $\|g\|_q = 0$ la (8.25) è ovvia. Altrimenti poniamo

$$F = \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad G = \frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

Per la nota disuguaglianza di Young si ha

$$(8.26) \quad \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} = FG \leq \frac{1}{p} F^p + \frac{1}{q} G^q = \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q},$$

quindi $|fg| \in L^1(I)$. Integrando membro a membro la (8.26) si ottiene

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_I |f||g| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

da cui segue subito la tesi. □

Proposizione 8.27 (disuguaglianza di Minkowski) - Per ogni $f, g \in L^p(I)$ si ha

$$(8.27) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|) |f + g|^{p-1},$$

dove a secondo membro il primo fattore sta in $L^p(I)$ e il secondo in $L^{p/p-1}(I) = L^q(I)$. Allora possiamo applicare la (8.25)

$$\int_I |f + g|^p dx \leq \left[\left(\int_I |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p dx \right)^{1/p} \right] \left(\int_I |f + g|^p dx \right)^{1-1/p}$$

e dividendo a sinistra e a destra per l'ultimo fattore si ottiene la tesi. □

Se il dominio d'integrazione ha misura finita possiamo ricavare una relazione d'inclusione interessante fra tutti questi spazi, precisamente vale il seguente risultato.

Proposizione 8.28 - Con I limitato, se $1 \leq p < q$ allora $L^q(I) \subset L^p(I)$ e per ogni $f \in L^q(I)$ si ha

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q.$$

Dimostrazione. La funzione costante 1 su I appartiene a tutti questi spazi perché I ha misura finita. Scelta una $f \in L^q(I)$, pensiamo alla funzione $|f|^p$ come prodotto $|f|^p \cdot 1$ dove $|f|^p \in L^{q/p}(I)$ e $1 \in L^{(1-p/q)^{-1}}(I) = L^{\frac{q}{q-p}}(I)$ in modo da applicare la (8.25) e dedurre che $|f|^p = |f|^p \cdot 1 \in L^1(I)$. Inoltre

$$\int_I |f|^p dx \leq \| |f|^p \|_{q/p} \| 1 \|_{q/(q-p)} = \| f \|_q^p m(I)^{1-p/q},$$

da cui, elevando alla $1/p$, si ricava

$$\| f \|_p \leq m(I)^{1/p-1/q} \| f \|_q.$$

□

Per l'inclusione ora dimostrata, non appena una funzione sta in uno degli spazi $L^p(I)$ per qualche $p > 1$ deve appartenere a tutti gli $L^q(I)$ con $1 \leq q \leq p$, a condizione, ripetiamo, che il dominio abbia misura finita. Il fatto che $L^1(I)$ sia il più grande fra tutti gli spazi $L^p(I)$ con $p \geq 1$ non significa che ne sia l'unione. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

sta in $L^1[0, 1/2]$, ma non appartiene a nessun $L^p[0, 1/2]$ con $p > 1$.

Esercizio 8.9 - A quali spazi $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$, appartengono le funzioni $1/x^\alpha$, o in particolare la funzione $1/\sqrt{x}$?

L'unico caso in cui i due esponenti coniugati coincidono è quando $p = q = 2$, il che rende speciale lo spazio $L^2(I)$. Per la disuguaglianza di Hölder, se $f, g \in L^2(I)$ allora $f, g \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Pertanto ha senso in $L^1(I)$ l'integrale

$$\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} dx$$

che definisce un *prodotto scalare* tra f e g (il lettore lo può verificare facilmente per esercizio). Nella disuguaglianza di Hölder si riconosce quella di Cauchy-Schwarz e la norma stessa può essere scritta in termini del prodotto scalare

$$\| f \|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Se $\langle f, g \rangle = 0$ le due funzioni f e g si dicono ortogonali. Per concludere, $L^2(I)$ è uno spazio di Hilbert.

Capitolo 9

Serie di Fourier

9.1 Serie trigonometriche

Un fenomeno ondulatorio, che si manifesta ad esempio come un'onda sonora causata da vibrazioni meccaniche o come un'onda elettromagnetica o come un segnale di qualsiasi altra natura, può essere identificato con una funzione periodica $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di periodo $T > 0$. L'*analisi armonica* consiste nell'indagare sotto quali condizioni e in che senso la f può essere decomposta in una combinazione lineare, finita o infinita, di *onde elementari*, del tipo

$$(9.1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

e, viceversa, anche in che senso una espressione di questo tipo possa riprodurre una funzione, naturalmente T -periodica, e quale. Le funzioni trigonometriche usate nella (9.1), tutte con periodo comune T , sono dette *armoniche*, l' n -esima con *frequenza* $\omega_n = 2\pi n/T$, multiplo intero della *frequenza fondamentale* $\omega = 2\pi/T$.

La nota emessa da un diapason è il LA della quarta scala, la A4 nel sistema anglosassone, con frequenza $\omega_0 = 440$ Hz. Assunta come fondamentale, rispetto ad essa i LA successivi e precedenti hanno per frequenze i suoi multipli e sottomultipli interi e per calcolare le frequenze delle altre note, col sistema del *temperamento equabile*, basta usare la formula $\omega_s = 2^{s/12} \omega_0$, dove s è il numero (con segno) di semitoni che separa la nota dall'A4. Ad esempio la frequenza del DO immediatamente successivo, il C5, è di $2^{3/12} 440$ Hz ~ 523.3 Hz e l'ottava sopra al LA fondamentale, l'A5, ha frequenza 880 Hz, contando $s = 12$ semitoni dall'A4. L'intervallo *udibile* va da 20 Hz a 20 kHz, all'esterno del quale vi sono gli *ultrasuoni*, al disopra, e gli *infrasuoni* al di sotto. Moltiplicare un'armonica per un fattore A reale corrisponde ad alterare l'intensità del suono, il *volume*, amplificandolo se $|A| > 1$ o riducendolo se $|A| < 1$. Per emettere una singola nota ogni strumento musicale fa "suonare" insieme una particolare scelta di armoniche tra loro diverse e con frequenze multiple di una stessa fondamentale, ciascuna col proprio volume. Il gruppo di termini scelti, una combinazione lineare di armoniche, determina il *timbro* caratteristico dello strumento. Così, teoricamente, anche tutta la serie (9.1) corrisponde ad una nota con un certo timbro. In altri campi, più in generale, tale serie sarà la rappresentazione matematica di una qualche onda, come abbiamo detto prima, o di un segnale di qualche tipo da precisare a seconda delle applicazioni.

Riprendiamo dunque il problema della rappresentazione di una funzione T -periodica f come somma di una *serie trigonometrica*

$$(9.2) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x).$$

I primi contributi importanti in analisi armonica furono dati da **Joseph Fourier** nei suoi lavori *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* del 1807 e *Théorie analytique de la chaleur* del 1822, in cui risolve il problema della conduzione termica in una lastra metallica piana rappresentando la distribuzione di temperatura come somma di una serie trigonometrica. Ma già **D'alambert**, da cui prende il nome l'equazione della corda vibrante, e **Daniel Bernoulli** avevano congetturato la possibilità di rappresentare in quel modo ogni funzione periodica, aprendo tra l'altro la strada al concetto moderno di funzione. Mentre fino ad allora questo termine era riservato a non meglio precisate relazioni aventi una forma analitica esplicita, agli albori di questa teoria la funzione diventa una legge qualunque che associa un valore ad ogni punto di un intervallo, come qualunque può essere appunto la forma naturale che in un istante può assumere una corda posta in vibrazione.

Per dare significato alla (9.2) bisogna precisare in che senso una successione di somme del tipo

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x),$$

dette *polinomi trigonometrici* di grado n , può convergere per $n \rightarrow \infty$ a qualche funzione e possibilmente scoprire quale. Per determinarla, cosa possibile in casi molto rari, un metodo può essere quello di ricondurla al calcolo della somma di un'opportuna serie di potenze ricorrendo al Teorema di Abel, una volta riconosciuta la serie trigonometrica come la sua restrizione ad una circonferenza. Questo approccio in realtà l'abbiamo già applicato ad esempio alla serie (8.19) che, si scopre adesso, è proprio una serie trigonometrica. Che si possa o meno calcolarne la somma, ciò che bisogna fare di fronte ad una serie di questo tipo è studiarne il comportamento e le proprietà guardando ai coefficienti che la definiscono.

Il caso più semplice è quello in cui i coefficienti formano serie numeriche assolutamente convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$$

perché allora, essendo

$$(9.3) \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} |a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x| \leq |a_n| + |b_n|,$$

si può dire che la serie (9.2) è totalmente convergente nella norma uniforme ed ha per somma una funzione necessariamente continua (essendo continuo ogni polinomio trigonometrico). Possiamo spingerci oltre: facendo crescere l'ordine di infinitesimo dei coefficienti, non solo aumenta la "velocità" di convergenza, ma anche la regolarità della somma. Con riferimento al teorema di derivazione termine a termine, se nella serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin \omega_n x + nb_n \cos \omega_n x)$$

i coefficienti soddisfano

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < +\infty$$

allora la somma della serie (9.2) è una funzione di classe $C^1(\mathbf{R})$ e la serie delle derivate ha per somma, uniforme, la sua derivata. Ripetendo il ragionamento, o se si vuole per induzione, si può generalizzare questa osservazione passando alla derivata k -esima: se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |a_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |b_n| < +\infty$$

allora la somma della serie (9.2) è di classe $C^k(\mathbf{R})$ e le serie ottenute per derivazione fino all'ordine k convergono uniformemente alle corrispondenti derivate della somma.

Per garantire la continuità della somma non è necessario che la serie converga totalmente, basta la convergenza uniforme, ma non esistono criteri generali. Nel caso però di coefficienti positivi e decrescenti vi è una caratterizzazione che riguarda serie di soli coseni, immediata e ovvia, e una diversa, un po' più complicata da verificare, per serie di soli seni, precisamente:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{converge uniformemente} &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{converge uniformemente} &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0. \end{aligned}$$

Si noti che l'ultima condizione è più generale della richiesta che sia convergente la serie $\sum b_n$, come ben sappiamo dall'Analisi 1. Ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \log n}$$

converge uniformemente perché $nb_n = 1/\log n \rightarrow 0$, ma la serie dei soli coefficienti è notoriamente divergente.

Ma se si parte da una funzione continua e la si vuole riconoscere come somma di una serie trigonometrica, possiamo dire che questa converge ad f uniformemente? Più in generale, quali funzioni sono somma di una serie trigonometrica? Qual è il tipo di convergenza a seconda della funzione scelta? Formalmente, come vediamo tra poco, non è difficile costruirla in termini della f ; come i coefficienti di una serie di Taylor, così anche quelli della serie trigonometrica si possono calcolare direttamente conoscendo la funzione. Ma rimane il problema, tutt'altro che semplice, di stabilire poi se converge, in che senso e perché proprio a quella funzione. Ovviamente in questa sede ci limitiamo a dare qualche idea, tratteremo solo alcune proprietà di base rimanendo ad un livello molto elementare, ... ma non troppo.

Supponiamo che il tipo di convergenza della (9.2) permetta l'integrazione termine a termine su un intervallo limitato, operazione lecita, come sappiamo, nei casi più comuni di convergenza in norma, uniforme, in media, ecc. Allora possiamo ricavare la relazione che intercorre tra f e i coefficienti della serie. Si calcola in primo luogo l'integrale della funzione su un intervallo di ampiezza T , ad esempio $[0, T]$

$$\int_0^T f(x) dx = \int_0^T \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos \omega_n x dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin \omega_n x dx$$

da cui si ottiene il valore di a_0

$$(9.4) \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx,$$

visto che le funzioni $\cos \omega_n x$ e $\sin \omega_n x$ sono a media nulla. Se invece si moltiplica la f per $\cos \omega_k x$ e per $\sin \omega_k x$ e dopo si integra si ottiene rispettivamente

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \cos \omega_k x dx &= \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos \omega_k x dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos \omega_n x \cos \omega_k x dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin \omega_n x \cos \omega_k x dx = a_k \int_0^T \cos^2 \omega_k x dx = a_k \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \omega_k x \, dx &= \int_0^T \frac{a_0}{2} \operatorname{sen} \omega_k x \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos \omega_n x \operatorname{sen} \omega_k x \, dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \operatorname{sen} \omega_n x \operatorname{sen} \omega_k x \, dx = b_k \int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega_k x \, dx = b_k \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$(9.5) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega_n x \, dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \omega_n x \, dx \quad \forall n \geq 1.$$

Gli a_n e i b_n così trovati sono detti *coefficienti di Fourier* di f e la (9.2) con questi coefficienti prende il nome di *serie di Fourier* (trigonometrica) di f e si indica con $s(f, x)$. Si noti che i b_n sono tutti nulli se f è una funzione pari e analogamente sono nulli gli a_n nel caso dispari. In particolare i coefficienti di Fourier della funzione nulla (l'unico caso di funzione sia pari che dispari) sono tutti nulli e quindi lo è identicamente anche la relativa serie di Fourier.

Il procedimento con cui abbiamo ottenuto i coefficienti, e di conseguenza la serie, a partire da una funzione nota si basa sull'ipotesi fatta a priori che valesse un qualche tipo di convergenza in modo da garantire il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Tuttavia precisiamo che essi possono essere definiti anche direttamente, tramite le (9.4) e (9.5), a prescindere da questa ipotesi, basta che f sia assolutamente integrabile. Hanno perfettamente senso infatti se $f \in L^1[0, T]$ dato che

$$|a_n| \leq \|f \cos nx\|_1 \leq \|f\|_1 \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \|f \operatorname{sen} nx\|_1 \leq \|f\|_1,$$

quindi possiamo riferirci alla $s(f, x)$ come alla *serie di Fourier associata a f* indipendentemente dalla questione della convergenza. Se poi tale serie avrà per somma f o meno, e in che senso, è un altro problema. Il ragionamento fatto sopra per ottenerla dimostra che se una serie trigonometrica converge a f in $L^1[0, T]$ (o in L^p , o uniformemente) deve essere necessariamente la sua serie di Fourier e, a proposito, citiamo un teorema, senza dimostrarlo, che dice che possiamo anche allargarci alla convergenza puntuale, sempre che f appartenga a $L^1[0, T]$, ed è il seguente.

Teorema 9.1 - *Una serie trigonometrica che, ad eccezione eventualmente di un insieme finito di punti, converge puntualmente ad una funzione f assolutamente integrabile è necessariamente la serie di Fourier di f .*

Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, questo risultato, che potremmo dire di *unicità* della rappresentazione in serie trigonometrica, non vale più se i punti di non convergenza formano un insieme infinito, ma di misura nulla. **Menshov** costruì nel 1916 una serie trigonometrica convergente q.o. a 0, ma con i coefficienti non tutti nulli, i quali dunque non possono essere quelli di Fourier.

E se invece di partire dalla serie si parte dalla funzione? Si può sostenere in generale che la serie di Fourier di una certa funzione deve convergere in qualche senso a quella funzione? La risposta è negativa, nel 1926 **Kolmogorov** trovò una funzione di $L^1[0, T]$ la cui serie di Fourier non converge né rispetto alla norma di L^1 , né addirittura in alcun punto. Se però ci mettiamo in $L^p[0, T]$ con $p > 1$ vale la convergenza in norma e anche puntuale quasi ovunque. Comunque la convergenza puntuale in tutti i punti non vale in generale neanche se f è continua, tanto meno possiamo sperare in quella uniforme. Se la convergenza uniforme di una serie trigonometrica garantisce la continuità della sua somma, non per questo ogni funzione continua e periodica deve essere la somma nel senso uniforme di una serie trigonometrica, la propria serie di Fourier in questo caso. Su questo problema ci limitiamo soltanto a qualche cenno storico, dato il suo livello di difficoltà per noi eccessivo. Dopo che nel 1829 Dirichlet aveva dimostrato il teorema di convergenza puntuale per le funzioni continue a tratti,

ma con delle ipotesi aggiuntive che vedremo anche noi, nel 1876 **du Bois-Reymond** mostra l'esistenza di funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in un punto e non è stato difficile passare poi ad un insieme denso di punti di mancata convergenza. Come applicazione di un importante teorema di Analisi Funzionale del 1927 dovuto a Banach e **Steinhaus**, si è dimostrato che per ogni $x \in [0, T]$ esiste un insieme denso di funzioni di $C^0[0, T]$ la cui serie di di Fourier non converge in x . Nel 1920 **Luzin** pone la questione generale, precisando meglio una congettura dello stesso Fourier, di stabilire se la serie di Fourier di una funzione continua f converge a $f(x)$ puntualmente almeno quasi ovunque dovendo tener conto del risultato di du Bois-Reymond. Ma la congettura di Luzin, un vero rompicapo dell'Analisi, rimane senza risposta finché non viene provata da **Carleson** nel 1966, non solo per le funzioni continue, ma per tutte le funzioni di $L^2[0, T]$, risultato che fu poi esteso da **Fefferman** nel 1973 a tutti gli $L^p[0, T]$ con $p > 1$. Sembra quasi che con le serie di Fourier possa succedere di tutto, vediamo se riusciamo a fare un po' di ordine ☺.

Esempi

9.1 Si vuole determinare la serie di Fourier associata al prolungamento 2-periodico della funzione pari

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Dalle (9.4) e (9.5) con $\omega = \pi$ si ottengono i coefficienti di Fourier

$$a_0 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad b_n = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

e quindi anche la serie di Fourier di soli coseni

$$s(f, x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x.$$

Ma è lecito affermare che $s(f, x) = x^2$ per ogni $x \in [-1, 1]$? Certamente questa serie converge totalmente nella norma uniforme ad una funzione continua essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in \mathbf{R}} |a_n \cos n\pi x| = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

ma che la somma sia proprio x^2 lo possiamo far discendere dai teoremi che dimostremo più avanti. Si noti in particolare che per $x = \pi$ si ha

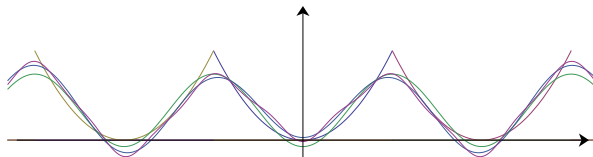


Figura 9.1: Approssimazione della funzione x^2 .

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

relazione che ci fornisce per altra via il valore già noto della somma della serie armonica di esponente 2.

Vediamo adesso un altro esempio, stavolta riguarda una funzione discontinua.

9.2 Vogliamo determinare la serie di Fourier associata al prolungamento 2-periodico della funzione dispari

$$f(x) = x, \quad x \in]-1, 1].$$

Abbiamo in questo caso $\omega = \pi$ e $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, mentre

$$b_n = \int_{-1}^1 x \operatorname{sen} n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n},$$

pertanto

$$s(f, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi x.$$

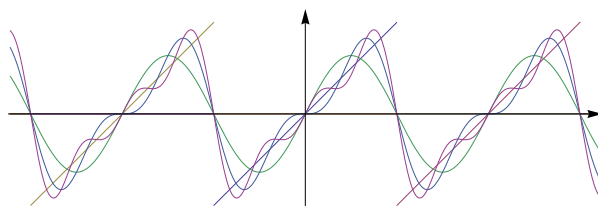


Figura 9.2: Approssimazione della funzione x .

Il calcolo di questa somma l'abbiamo già fatto nell'Esempio 8.19, $s(f, x) = x$ per $-1 < x < 1$, ma agli estremi, ovviamente, $s(f, 1) = s(f, -1) = 0$. Per $x = 1/2$ si conferma il valore, già noto per altra via, della somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

La perdita di regolarità della funzione nei due estremi e il “peggioramento” del tipo di convergenza della serie, non più uniforme (altro che in un intervallo $[a, b] \subset]-1, 1[$), ma puntuale, sono fatti strettamente correlati. In più, è stato osservato che in prossimità dei punti di salto la distanza tra il massimo e il minimo della successione delle ridotte si stabilizza su un valore di circa il 18% superiore al salto stesso, comportamento noto come *fenomeno di Gibbs*.

Col semplice cambio di variabile $y = 2\pi x/T = \omega x$ possiamo lavorare con le funzioni 2π -periodiche e quindi con serie trigonometriche del tipo

$$(9.6) \quad s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Un'ulteriore semplificazione può essere ottenuta passando alla forma esponenziale con le formule di Eulero

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Precisamente, posto per ogni $n \in \mathbf{Z}$

$$c_n = \begin{cases} a_0/2 & \text{se } n = 0 \\ (a_n - ib_n)/2 & \text{se } n > 0 \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2 & \text{se } n < 0, \end{cases}$$

la (9.6) diventa

$$(9.7) \quad s(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$$

che è molto più maneggevole e allo stesso tempo ci indica che questa teoria si addice in modo naturale alle funzioni periodiche $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$. La (9.7) va intesa come limite per $n \rightarrow \infty$ della successione dei polinomi trigonometrici

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad n \in \mathbf{N},$$

in un senso da specificare volta per volta, puntuale, uniforme, in qualche norma ecc. Va da sé che converrà tornare all'uso dei soli coseni o dei soli seni per funzioni pari o dispari rispettivamente.

Per calcolare i coefficienti di Fourier di una funzione f 2π -periodica si ragiona come prima, sempre che sia lecito integrare termine a termine. Moltiplichiamo la (9.7) per e^{-ikx} membro a membro immaginando f a primo membro e integriamo

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \delta_{nk} = 2\pi c_k$$

dove

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}.$$

Si ottengono così i coefficienti di Fourier

$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Ricordando che l'espressione

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

è un prodotto scalare tra funzioni, le relazioni

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = \delta_{nk}$$

possono essere interpretate dicendo che il *sistema trigonometrico*, l'insieme cioè delle funzioni $\varphi_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$, è ortonormale, da cui segue tra l'altro che ogni insieme finito di elementi φ_n è linearmente indipendente. I coefficienti di Fourier non sono altro che i prodotti scalari di f con gli elementi di questo sistema

$$\hat{f}(n) = \langle f, \varphi_n \rangle \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

e con essi si costruiscono la successione dei polinomi di Fourier di f

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

e la serie di Fourier di f

$$s(f, x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Come già spiegato, si tratta adesso di studiare che relazione intercorre tra s e f .

9.2 Proiezione su un sottospazio

Le considerazioni fatte alla fine del paragrafo precedente sembrano suggerire L^2 (che da ora in poi sta per $L^2[-\pi, \pi]$) come spazio naturale, sebbene, come già osservato, si potrebbe lavorare anche in L^1 , ma in questo paragrafo siamo interessati ad alcuni aspetti che potremmo definire “euclidei” per la presenza del prodotto scalare.

L'insieme dei polinomi trigonometrici di grado n forma un sottospazio vettoriale V_n di dimensione finita (precisamente $2n + 1$) di L^2 .

Problema 9.2 (della proiezione) - Dato un elemento $f \in L^2$, trovare il polinomio trigonometrico $P_n^* \in V_n$ di minima distanza da f tra tutti i polinomi $P_n \in V_n$. Se P_n^* esiste si chiama **proiezione ortogonale** di f su V_n .

In altre parole cerchiamo $P_n^* \in V_n$ tale che

$$\|f - P_n^*\|_2 = \min_{P_n \in V_n} \|f - P_n\|_2.$$

Teorema 9.3 - La proiezione esiste, è unica ed è il polinomio di Fourier di f .

Dimostrazione. Consideriamo un generico polinomio trigonometrico $P_n \in V_n$

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \varphi_k(x)$$

e cerchiamo di rendere minima la sua distanza da f . Ragionando, come sempre conviene, col quadrato della norma, si ottiene

$$\|f - P_n\|_2^2 = \langle f - P_n, f - P_n \rangle = \|f\|_2^2 + \|P_n\|_2^2 - \langle f, P_n \rangle - \langle P_n, f \rangle$$

dove

$$\|P_n\|_2^2 = \left\langle \sum_{h=-n}^n c_h \varphi_h, \sum_{k=-n}^n c_k \varphi_k \right\rangle = \sum_{h,k=-n}^n c_h \bar{c}_k \langle \varphi_h, \varphi_k \rangle = \sum_{h,k=-n}^n c_h \bar{c}_k \delta_{hk} = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2,$$

$$\langle f, P_n \rangle = \left\langle f, \sum_{k=-n}^n c_k \varphi_k \right\rangle = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k \langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \bar{c}_k$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|f - P_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \bar{c}_k - \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} c_k \\ (9.8) \quad &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k - \hat{f}(k)|^2 - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

Questa espressione risulta minima per $c_k = \hat{f}(k)$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$, quindi il polinomio trigonometrico P_n^* di minima distanza da f coincide col *polinomio di Fourier* associato ad f

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \varphi_k(x).$$

Inserito nella (9.8) al posto di P_n , ci permette di ottenere il valore della distanza di f da V_n

$$(9.9) \quad \|f - \hat{P}_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2.$$

L'unicità è ovvia conseguenza della stretta convessità della funzione $c_k \rightarrow |c_k - \hat{f}(k)|^2$. \square

Immediata conseguenza della (9.9), dove il I membro è non negativo, è la *disuguaglianza di Bessel*

$$(9.10) \quad \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dunque la serie a termini positivi

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

è convergente ed ha somma non superiore a $\|f\|_2^2$. Ne segue che il termine generale è infinitesimo

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0,$$

relazioni note col nome di *Teorema di Riemann-Lebesgue*.

Guardando alla (9.9), è chiaro che al crescere di n , aumentando la dimensione di V_n , si fa sempre più piccola la distanza di f da V_n . Sarebbe interessante poter affermare che

$$(9.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \hat{P}_n\|_2^2 = 0$$

perché avrebbe una rilevanza notevole. Intanto la disuguaglianza di Bessel (9.9) diventerebbe l'uguaglianza

$$(9.12) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2,$$

la quale, nota come l'*identità di Parseval*, ci fa ricordare il Teorema di Pitagora, altre condizioni ad essa equivalenti verranno trattate nel prossimo paragrafo. Ma vi sono vari altri modi tutti tra loro equivalenti per descriverla che ci riportano al concetto di *base* di uno spazio vettoriale, cosa che adesso, in dimensione infinita, richiede qualche precisazione. La (9.11) equivale ad affermare che il sistema trigonometrico $\{\varphi_n\}$, oltre che linearmente indipendente, è anche un insieme di generatori, quindi una base (infinita ma numerabile), di L^2 , nel senso che ogni elemento di L^2 è combinazione lineare (infinita), o meglio limite di combinazioni lineari, delle φ_n con le proiezioni ortogonali $\hat{f}(n) = \langle f, \varphi_n \rangle$ come coefficienti. Questa proprietà, che diremo di *completezza*, è effettivamente vera come vedremo nel prossimo paragrafo, per questo L^2 appare lo spazio più naturale per la convergenza delle serie di Fourier trigonometriche. Il fatto che in L^1 sia stato trovato un esempio di funzione che non è limite nella norma $\|\cdot\|_1$ della sua serie di Fourier significa che il sistema trigonometrico non è completo in L^1 .

Una conseguenza importante della disuguaglianza di Bessel riguarda la convergenza uniforme della serie di Fourier di una funzione continua con l'ipotesi aggiuntiva di avere derivata in L^2 (ricordiamo che la continuità da sola non basta). Questo risultato va considerato insieme alla condizione (9.3) che garantisce la convergenza totale, quindi uniforme, di una serie trigonometrica e ne è l'implicazione contraria: la serie di Fourier di una funzione continua converge totalmente? La risposta è affermativa, ma con un'ipotesi aggiuntiva sulla derivata. Facciamo attenzione al fatto che l'estensione T -periodica di una funzione continua inizialmente definita su $[0, T]$ non è detto che sia continua, a meno che $f(0) = f(T)$. Per questo, nel nostro contesto, da ora in poi intendiamo per continua ogni funzione $f \in C^0[0, T]$ tale che $f(0) = f(T)$.

Teorema 9.4 - Se $f \in C^0[0, 2\pi]$ ammette derivata $f' \in L^2$ allora la serie di Fourier di f converge ad f uniformemente.

Dimostrazione. I coefficienti di Fourier della derivata si possono calcolare in termini di quelli di f nel seguente modo

$$\hat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} [f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \hat{f}(n).$$

Per la disuguaglianza di Bessel la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}'(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 |\hat{f}(n)|^2$$

è convergente e poiché

$$|\hat{f}(n)| = n |\hat{f}(n)| \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \left(n^2 |\hat{f}(n)|^2 + \frac{1}{n^2} \right) \quad \forall n \in \mathbf{Z},$$

converge anche la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|,$$

quindi la serie di Fourier di f è totalmente convergente nella norma uniforme. \square

Questo teorema vale anche con $f' \in L^1$, ma non possiamo approfondire ulteriormente. Una situazione frequente a cui può essere applicato è quella delle funzioni continue e regolari a tratti secondo la seguente definizione.

Definizione 9.5 - Una funzione $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{C}$ è detta **continua a tratti** se è continua su $[0, T]$ eccetto, al più, un insieme finito $\{x_1, \dots, x_h\}$ di punti di discontinuità nei quali esistano finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) = f(x_i^-) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) = f(x_i^+).$$

È detta invece **regolare a tratti** se è continua a tratti e al di fuori dei punti di discontinuità è derivabile con derivata continua a tratti su $[0, T]$. Una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è detta **continua a tratti o regolare a tratti** se lo è la sua restrizione ad ogni intervallo limitato.

Ad esempio il prolungamento 2π -periodico della funzione continua e regolare a tratti

$$f(x) = |x| \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

è somma nel senso uniforme della sua serie di Fourier di soli coseni

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

ed ha per derivata la funzione di L^2

$$f'(x) = \text{sign}(x),$$

la quale è somma in L^2 , e anche nel senso puntuale ma non uniforme, della serie delle derivate

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)x}{2n-1}.$$

Naturalmente questa può essere ottenuta anche sviluppando la funzione $\text{sign}(x)$ direttamente.

Immediata conseguenza del Teorema 9.4 e della (9.12) è il seguente, lo citiamo per l'interesse che ha di per sé.

Corollario 9.6 (disuguaglianza di Poincaré) - Se $f \in C^0[a, b]$ con $f(a) = f(b)$ ammette derivata $f' \in L^2[a, b]$ allora

$$\|f\|_2^2 \leq C \|f'\|_2^2.$$

Dimostrazione. Se per $[a, b]$ scegliamo l'intervallo $[-\pi, \pi]$ siamo nelle ipotesi del Teorema 9.4 e basta applicare l'identità di Parseval ad entrambe le funzioni

$$(9.13) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 |\hat{f}(n)|^2 = \|f'\|_2^2$$

e in questo caso $C = 1$. Per a e b qualunque ci si riconduce al caso precedente col cambio di variabile

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

ottenendo

$$(9.14) \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

La costante che compare nella (9.14), detta *costante di Poincaré*, è ottimale nel senso che vi sono funzioni che realizzano l'uguaglianza, basta scegliere scegliere $f(x) = \sin x$ nella (9.13). □

9.3 Completezza del sistema trigonometrico in L^2

La completezza in L^2 del sistema trigonometrico, che ci accingiamo adesso a dimostrare, consiste nella proprietà che ogni $f \in L^2$ è la somma della sua serie di Fourier nel senso della convergenza in L^2 . In dimensione finita si direbbe che il sistema genera tutto lo spazio. Vogliamo dunque dimostrare che per ogni $f \in L^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$$(9.15) \quad \|f - \hat{P}_n\|_2 < \varepsilon.$$

Sfruttando l'ottimalità del polinomio di Fourier ottenuta nel § 9.2, ci basta dimostrare che l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso in L^2 , infatti, se per ogni $\varepsilon > 0$ ne esiste uno, P_n per qualche $n \in \mathbf{N}$, che dista da f meno di ε , si ha

$$\|f - \hat{P}_n\|_2 \leq \|f - P_n\|_2 < \varepsilon.$$

D'altra parte L^2 , come ogni L^p del resto, è stato definito nel § 8.7 come completamento di C^0 , dunque per costruzione possiamo affermare che C^0 è denso in L^2 , cioè per ogni $f \in L^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C^0$ tale che

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Il problema si riduce allora a far vedere che per ogni $g \in C^0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico P tale che

$$\|g - P\|_\infty < \varepsilon$$

perché in questo modo

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + C \|g - P\|_\infty < (1 + C)\varepsilon.$$

Identico ragionamento può essere applicato ad ogni L^p per $p \geq 1$, anche in questi spazi l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso, ma non essendo ottimale quello di Fourier per $p \neq 2$ non si arriva per questa via alla completezza altro che in L^2 . Rimane dunque da dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 9.7 - Per ogni funzione $g \in C^0[-\pi, \pi]$ esiste una successione di polinomi trigonometrici P_n tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - g\|_{\infty} = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione di polinomi trigonometrici

$$Q_n(x) = \alpha_n \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbf{N},$$

con gli $\alpha_n > 0$ scelti in modo tale che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) dx = 1.$$

Ogni Q_n è una funzione positiva pari, crescente da $-\pi$ dove assume valore nullo, a 0 in cui raggiunge il massimo α_n , poi decresce fino a 0 in π . Se dunque $0 < \delta < \pi$ si ha

$$Q_n(\delta) = \max_{\delta \leq |x| \leq \pi} Q_n(x)$$

e $Q_n \rightarrow 0$ uniformemente su $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ se $Q_n(\delta) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Verifichiamo allora che $Q_n(\delta) \rightarrow 0$. Per come abbiamo scelto gli α_n si ha

$$1 = \frac{\alpha_n}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n dx > \frac{\alpha_n}{\pi 2^n} \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^n \sin x dx = \frac{2\alpha_n}{\pi(n+1)},$$

da cui $\alpha_n < \pi(n+1)/2$. Quindi

$$Q_n(\delta) = \alpha_n \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^n < \frac{\pi(n+1)}{2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^n \rightarrow 0.$$

Ad ogni $g \in C^0[-\pi, \pi]$ associamo la successione di polinomi trigonometrici

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) Q_n(t) dt,$$

per cui

$$(9.16) \quad \begin{aligned} |P_n(x) - g(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(x-t) - g(x)) Q_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t) - g(x)| Q_n(t) dt. \end{aligned}$$

Poiché g è uniformemente continua, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|t| = |(x-t) - x| < \delta \Rightarrow |g(x-t) - g(x)| < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |g(x-t) - g(x)| Q_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt = \varepsilon,$$

mentre

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} |g(x-t) - g(x)| Q_n(t) dt \leq 2\|g\|_{\infty} Q_n(\delta) \rightarrow 0.$$

Passando quindi all'estremo superiore nella (9.16), $\|P_n - g\|_{\infty} \rightarrow 0$. □

Da qui discende l'identità di Parseval (9.12) grazie alla quale ogni funzione $f \in L^2$ è somma nel senso di L^2 della propria serie di Fourier. Vediamo alcune importanti condizioni ad essa equivalenti.

- 1° Se $f, g \in L^2$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier allora $f = g$ q.o., che è come dire che se una funzione di L^2 ha coefficienti di Fourier tutti nulli (se è ortogonale ad ogni elemento del sistema trigonometrico) allora è la funzione (quasi ovunque) nulla.
- 2° Se $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ la serie $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ converge in L^2 e, detta $f \in L^2$ la sua somma, si ha $c_n = \hat{f}(n)$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$.
- 3° Per ogni $f, g \in L^2$ si ha $\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$.

Riguardo la 2°, se viene a mancare la convergenza della serie dei quadrati dei coefficienti non si può escludere che la serie converga, ma se converge la sua somma non può appartenere a L^2 . Ad esempio non sta in L^2 la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{n}},$$

pur convergente puntualmente per il Criterio di Dirichlet, perché la serie dei quadrati dei coefficienti diverge. Tuttavia possiamo osservare che ha somma in L^1 perché la successione $(1/\sqrt{n})$ ha lo stesso andamento dei coefficienti di Fourier del prolungamento dispari della funzione $1/\sqrt{x}$ su $[0, \pi]$. In questo caso infatti, ricordando il valore degli integrali di Fresnel (6.13), si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} dx \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

La spiegazione la possiamo far discendere anche dal seguente teorema che citiamo senza dimostrazione.

Teorema 9.8 - Se (a_n) e (b_n) sono due successioni positive, decrescenti e infinitesime per $n \rightarrow \infty$ e le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

sono convergenti allora la serie trigonometrica (9.6) converge assolutamente e in L^1 ad una funzione $f \in L^1$, della quale è necessariamente, come sappiamo, la serie di Fourier.

Invece la serie trigonometrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{\log n}$$

converge puntualmente ad una funzione che certamente non appartiene a L^1 .

9.4 Convergenza puntuale

Il fatto che i polinomi trigonometrici siano densi anche in L^1 ci permette di estendere il Teorema di Riemann-Lebesgue.

Teorema 9.9 (di Riemann-Lebesgue) - Se $f \in L^1$ allora $\hat{f}(n) \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che ogni polinomio trigonometrico P_k soddisfa

$$\langle P_k, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} P_k(t) e^{-int} dt = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} : |n| > k.$$

Scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, sia P un polinomio trigonometrico tale che $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Se $k \in \mathbf{N}$ è il grado di P , per $|n| > k$ si ha

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - P(t)) e^{-int} dt \right| \leq \|f - P\|_1 < \varepsilon$$

che è la tesi. □

L'espressione

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$$

si chiama *nucleo di Dirichlet*. Moltiplicando membro a membro per $2i \operatorname{sen} t/2$ si ottiene

$$\begin{aligned} D_n(t) 2i \operatorname{sen} t/2 &= D_n(t) (e^{it/2} - e^{-it/2}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n (e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{i(k-\frac{1}{2})t}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}) = i \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t, \end{aligned}$$

da cui

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}.$$

Si osservi che

$$(9.17) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Il polinomio di Fourier di una funzione $f \in L^1$ può essere scritto in termini del nucleo di Dirichlet

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} e^{ikx} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \end{aligned}$$

tenuto conto che D_n è pari.

Supponiamo adesso che f sia continua a tratti su $[-\pi, \pi]$ secondo la Definizione 9.5. Vogliamo vedere sotto quali condizioni su f la sua serie di Fourier converge puntualmente. È naturale aspettarsi che la somma sia pari al valore di f nei punti di continuità, ma nei punti in cui f è discontinua coincide con la media tra il limite destro e il limite sinistro di f . Cerchiamo pertanto di stimare la differenza tra il polinomio di Fourier in un generico punto e la media dei limiti per poi passare al limite per $n \rightarrow \infty$. Per la (9.17) si ha

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt - \frac{f(x^+)}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt - \frac{f(x^-)}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2 \operatorname{sen} t/2} \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2 \operatorname{sen} t/2} \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, t) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, t) \left(\operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos nt + \cos \frac{t}{2} \operatorname{sen} nt \right) dt \end{aligned}$$

avendo posto

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2 \operatorname{sen} t/2} & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2 \operatorname{sen} t/2} & \text{se } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Ora, il Teorema (9.9) ci permette di passare al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\hat{P}_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) = 0$$

purché nel punto x la funzione $t \rightarrow F(x, t)$, continua a tratti con le stesse discontinuità della f , appartenga a L^1 . Per garantire questa proprietà si possono immaginare diverse condizioni sufficienti, più o meno restrittive. Ad esempio possiamo assumere che f sia regolare a tratti. In tal caso nel punto x può essere derivabile, oppure continua con derivate destra e sinistra, $f'_d(x)$ e $f'_s(x)$, oppure discontinua con limiti destro e sinistro finiti, $f(x^+)$ e $f(x^-)$, e con derivate destra e sinistra

$$f'_d(x^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{e} \quad f'_s(x^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t}$$

(per il calcolo del limite $2 \operatorname{sen} t/2$ può essere senz'altro sostituito con t). Con queste ipotesi $t \rightarrow F(x, t)$, regolare a tratti come f , è anche limitata nell'intorno di $(x, 0)$, quindi sta in L^1 e il Teorema di Riemann-Lebesgue è applicabile. Altrimenti possiamo ricordare la condizione di integrabilità per una funzione non limitata come $1/|t|^\alpha$, che è integrabile in un intorno di 0 se $\alpha < 1$. Si perviene così alla stessa conclusione, che è sempre l'appartenenza a L^1 , assumendo una sorta di hölderianità a destra e a sinistra per un certo $0 < \alpha < 1$

$$|f(x+t) - f(x^+)| \leq Ct^\alpha \quad \text{e} \quad |f(x-t) - f(x^-)| \leq Ct^\alpha, \quad 0 < t < \delta.$$

Anche in questo caso, presentando nelle vicinanze di $t = 0$ un andamento del tipo $1/|t|^{1-\alpha}$, è garantita l'assoluta integrabilità di F .

Bibliografia

- [1] F. Conti, *Calcolo, Teoria e applicazioni*, McGraw-Hill, 1993.
- [2] F. Conti, P. Acquistapace, A. Savojni, *Analisi Matematica, Teoria e Applicazioni*, McGraw-Hill, 2001.
- [3] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica, vol. 2*, Masson, 1994.
- [4] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1991.
- [5] P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica, vol. 2*, Liguori Editore, Napoli, 1995.
- [6] E. Giusti, *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, vol.2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1991.
- [7] E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo, *Problemi scelti di Analisi Matematica II*, Liguori Editore, Napoli, 1985.

