# Spaces of closure operations on rings and numerical semigroups

Dario Spirito

## Abstract

Un'*operazione di chiusura* è una mappa $c$ da un insieme parzialmente ordinato $\mathcal{P}$ in sé che verifica tre proprietà: è *estensiva* (ovvero $x \leq c(x)$ per ogni $x \in \mathcal{P}$), *preserva l'ordine* (se $x \leq y$ allora $c(x) \leq c(y)$) ed è *idempotente* ($c(c(x)) = c(x)$ per ogni $x \in \mathcal{P}$). In questa tesi, le operazioni di chiusura vengono studiate da un punto di vista globale, ovvero vengono studiati interi insiemi di operazioni di chiusura defintite su insiemi di ideali o di sottomoduli; in particolare, vengono studiate la cardinalità di alcuni insiemi di operazioni di chiusura e delle naturali strutture d'ordine e topologiche di cui questi insiemi possono essere dotate.

Nel primo capitolo, viene studiato l'insieme delle *operazioni star* su semigruppi numerici: in particolare, viene studiato il problema di stabilire, dato un intero positivo $n$, quali semigruppi hanno esattamente $n$ operazioni star. Viene dimostrato che per $n > 1$ esistono solo un numero finito di tali semigruppi, e viene data una stima su questo numero; questi risultati vengono dimostrati stimando il numero di operazioni star a partire dagli altri inverianti del semigruppo (molteplicità, grado di singolarità, numero di Frobenius). Viene poi determinato esplicitamente il numero di operazioni star dei semigruppi numerici di molteplicità 3, e questi risultati vengono parzialmente estesi all'insieme degli domini noetheriani residualmente razionali la cui chiusura integrale è un anello di valutazione discreta fissato (ma arbitrario).

Nel secondo capitolo viene studiato, da un punto di vista topologico, l'insieme delle *operazioni semistar* su un dominio d'integrità: in particolare, viene dimostrato che diversi sottospazi naturali (come, ad esempio, lo spazio delle operazioni semistar di tipo finito) sono spazi spettrali, ovvero sono omeomorfi allo spettro primo di un anello commutativo unitario (dotato della topologia di Zariski). Sono poi studiati i sottospazi delle operazioni semistar stabili, spettrali e valutative; i risultati su questi spazi sono quindi usati nello studio dei sottospazi dello spazio dei sovraanelli di un dominio d'integrità, in riguardo alle proprietà di essere uno spazio compatto, uno spazio spettrale e uno spazio procostruibile (ovvero chiuso nella topologia costruibile). Infine, vengono studiati lo spazio delle localizzazioni di un anello e alcune sue generalizzazioni (lo spazio dei primi di semigruppo, lo spazio dei sovraanelli piatti e lo spazio delle sottolocalizzazioni).

Nel terzo capitolo vegnono studiate le operazioni star su un dominio d'integrità; in particolare, viene affrontato il problema di estendere queste operazioni di chiusura a sovraanelli piatti del dominio di partenza. Usando alcune speciali famiglie di sovraanelli (le *famiglie di Jaffard*), viene dimostrato che lo spazio delle operazioni star di un dominio $D$ può essere rappresentato come prodotto (sia dal punto di vista topologico che dal punto di vista degli insiemi ordinati) dello spazio delle operazioni star di $T$, per $T$ che varia in una famiglia di Jaffard di $D$. Questi risultati vengono applicati allo studio delle operazioni star su domini di Prüfer, ottenendo (tra gli altri risultati) una rappresentazione del gruppo delle classi di $D$ relativo ad un'operazione star attraverso il gruppo delle classi di un sottoinsieme (esplicitamente determinato) di sovraanelli di valutazione di $D$.