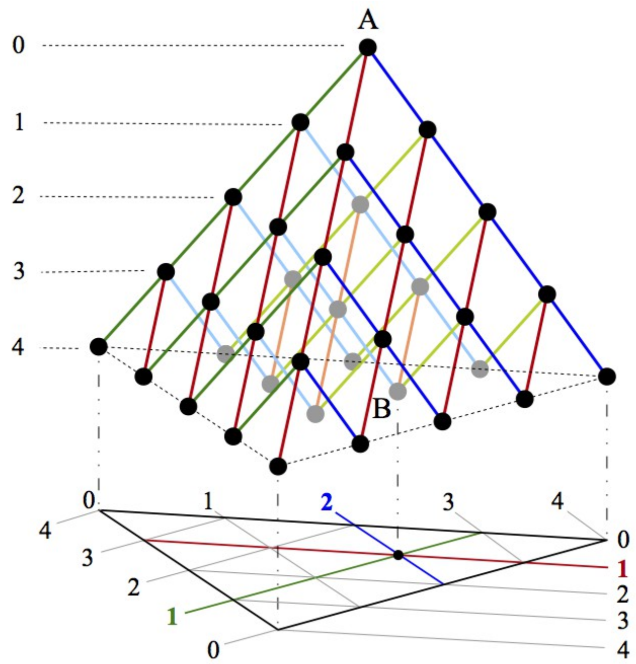
Laboratorio di Programmazione a.a. 2017-18

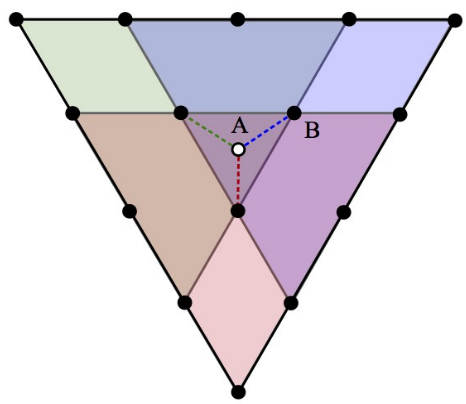
Problema 7

29 / 30 Novembre 2017

Descrizione

Il problema proposto è una variazione sul tema dei percorsi di Manhattan, basato questa volta su un reticolo ottenuto dalla ripetizione di un modulo i cui nodi sono disposti in corrispondenza ai vertici di un tetraedro (una piramide delimitata da quattro triangoli equilateri). La struttura è schematizzata a sinistra nella figura. Da ciascun nodo si diramano tre "canali", tutti di uguale lunghezza e disposti simmetricamente, che scendono verso l'osservatore (rosso), a sinistra allontanandosi un po' dall'osservatore (verde), a destra ancora allontanandosi (blu). Alcune coppie o terne di canali confluiscono in uno stesso nodo; in particolare scendendo di un certo numero di livelli attraverso uno stesso numero di canali rossi, uno stesso numero di canali blu e uno stesso numero di canali verdi, ancorché percorsi in un ordine diverso, si raggiunge lo stesso nodo. Per esempio, facendo riferimento alla figura, partendo dal nodo in alto A e percorrendo un tratto rosso, due blu e uno verde, indipendentemente dalla loro sequenza, si raggiunge sempre il nodo B.





Il primo spostamento restringe l'area raggiungibile alla base del reticolo

Immagina ora che una pallina venga collocata nel nodo più in alto (A) e sia lasciata libera di scendere attraverso i canali fino a raggiungere la base del reticolo (dopo aver percorso quattro canali nella situazione rappresentata in figura). Ad ogni nodo del suo percorso, incluso quello di partenza, la pallina potrà imboccare con la stessa probabilità uno qualsiasi dei tre canali per scendere al livello successivo. Ci si chiede con quale probabilità il suo percorso si concluderà in corrispondenza ad un certo nodo della base del reticolo (per esempio B in figura). I dati del problema sono quindi il numero *n* di livelli della struttura e le coordinate del nodo destinazione alla base. Il punto d'arrivo è identificato univocamente da tre numeri, corrispondenti ai tratti rossi, verdi e blu da percorrere, ma chiaramente due soli di questi parametri sono indipendenti in quanto il numero totale di tratti deve essere pari al numero di livelli, cioè *n*. Possiamo quindi scegliere di indicare i primi due: *i* (tratti rossi) e *j* (tratti verdi).

Per risolvere questo problema si possono seguire, in particolare, le due strade suggerite qui di seguito:

1. Se per primo viene imboccato un canale (poniamo) rosso con probabilità *p*, e se il nodo destinazione resta raggiungibile dalla nuova posizione in cui si viene a trovare la pallina, allora ci si riconduce ad un'istanza un po' più semplice dello stesso problema in cui la pallina deve scendere altri *n–1* livelli—e in cui le coordinate del nodo destinazione possono cambiare perché devono essere riferite alla nuova istanza del problema. Denotando con *q* la probabilità determinata nella nuova situazione, ovvero la soluzione dell'istanza più semplice del problema, si può concludere che la probabilità di raggiungere la destinazione individuata quando il primo tratto percorso è rosso vale *pq*. Chiaramente, restano da prendere in considerazione anche i casi in cui il primo tratto è verde o blu.

2. La probabilità di raggiungere una determinata destinazione è misurata dal rapporto fra il numero di percorsi diversi che consentono di raggiungerla diviso per il numero complessivo di percorsi possibili. Il primo numero non è altro che la soluzione del problema dei percorsi di Manhattan in tre dimensioni, corrispondenti alle tre direzioni rosso, verde e blu; il numero totale di percorsi è una potenza di tre, in quanto per ogni nodo ci sono tre alternative.

Definisci due versioni della procedura `prob-3d` che, dati tre interi non negativi n, i e j, restituisce la probabilità che una pallina, scendendo di n livelli, raggiunga il nodo destinazione individuato dalle coordinate i e j. Per realizzare la prima versione sviluppa i suggerimenti riportati al punto **1**; per la seconda versione puoi invece utilizzare il programma che hai già formalizzato per risolvere il **problema 5**. Verifica, infine, che a parità di argomenti le due versioni producano lo stesso risultato.

Esempi

`(prob-3d 1 0 1)`	$\longrightarrow \frac{1}{3}$	`(prob-3d 2 1 0)`	$\longrightarrow \frac{2}{9}$
`(prob-3d 3 1 1)`	$\longrightarrow \frac{2}{9}$	`(prob-3d 4 1 2)`	$\longrightarrow \frac{4}{27}$
`(prob-3d 6 2 2)`	$\longrightarrow \frac{10}{81}$	`(prob-3d 15 5 5)`	$\longrightarrow \frac{28028}{531441}$