



Progetto “Longest Increasing Subsequence” – Parte I

21 Aprile 2017

Descrizione

Data una sequenza s di n interi positivi, rappresentata da un array, il seguente programma in Java calcola la lunghezza della più lunga sottosequenza di s strettamente crescente (llis: *length of the longest increasing subsequence*). La procedura ricorsiva `llisRec` risolve un problema correlato per una “coda” della sequenza s che inizia con l’elemento di posizione i , imponendo l’ulteriore vincolo che gli elementi della sottosequenza debbano essere strettamente maggiori del valore di un terzo parametro t . I casi base corrispondono a una coda vuota ($i = n$). Se l’elemento x nella posizione iniziale i non soddisfa il vincolo $x > t$, allora non può far parte della sottosequenza e ci si riconduce direttamente all’analogo problema per una coda più corta (a partire dalla posizione $i+1$). Altrimenti x può far parte o meno della sottosequenza più lunga: se vi fa parte, i successivi elementi (da cercare nella coda che inizia in posizione $i+1$) devono essere maggiori x ; se invece non vi fa parte il vincolo aggiuntivo resta determinato da t ; si sceglierà poi l’opzione più favorevole in base ai risultati ottenuti ricorsivamente.

```
public static int llis( int[] s ) { // s[i] > 0 per i in [0,n-1], dove n = s.length
    return llisRec( s, 0, 0 );
}

public static int llisRec( int[] s, int i, int t ) {
    final int n = s.length;
    if ( i == n ) {
        return 0;
    } else if ( s[i] <= t ) {
        return llisRec( s, i+1, t );
    } else {
        return Math.max( 1+llisRec(s,i+1,s[i]), llisRec(s,i+1,t) );
    }
}
```

Scrivi un programma equivalente che applica la tecnica di *memoization* (top-down) per realizzare una versione più efficiente registrando i risultati di volta in volta calcolati ai fini di un eventuale riutilizzo. Verifica quindi che i risultati ottenuti siano coerenti con i valori calcolati dal programma riportato sopra.

Suggerimento.

- Poiché il terzo argomento di `llisRec` può variare in un ampio intervallo, non è opportuno utilizzare i valori di t direttamente come indici di array. Tuttavia è evidente che t è zero oppure è il valore di un elemento della sequenza s , nel qual caso si può rappresentare indirettamente attraverso la posizione di quella componente.
- Per trattare anche il caso $t = 0$ uniformemente rispetto agli altri, è possibile aggiungere alla sequenza (cioè ricostruire l’array con) una componente artificiale, per esempio in posizione n , il cui valore è zero.
- In conclusione si può rappresentare lo stato dell’elaborazione attraverso una matrice quadrata, i cui elementi sono accessibili attraverso due indici compresi nell’intervallo $[0,n]$: il primo che corrisponde direttamente al parametro i ; il secondo, j , che permette di determinare t leggendo l’elemento in posizione j nella sequenza estesa (con un elemento in più di posizione n e valore 0).