Automi Ibridi

Carla Piazza[1]

[1]Dipartimento di Matematica ed Informatica
Università di Udine
carla.piazza@dimi.uniud.it

Indice del Corso (Dis)Ordinato

- Automi Ibridi: Sintassi e Semantica
- Sistemi a stati finiti (breve ripasso)
- Il problema della Raggiungibilità
- Risultati di Indecidibilità
- Classi notevoli di Automi Ibridi: timed, rectangular, o-minimal, ...
- Tecniche di Decisione: (Bi)Simulazione, Cylindric Algebraic Decomposition, Teoremi di Selezione, Semantiche approssimate
- Equazioni Differenziali
- ...e tanto altro:
  - Logiche temporali
  - Composizione di Automi
  - Il caso Stocastico
  - Stabilità, Osservabilità, Controllabilità
  - Strumenti Software
  - Applicazioni

Equazioni differenziali

Definition (Equazioni Differenziali)

Un'equazione differenziale è un'equazione che stabilisce una relazione tra una funzione incognita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e le sue derivate
Un sistema di equazioni differenziali è un'insieme di equazioni che stabiliscono relazioni tra k funzioni incognite $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e le loro derivate

Example

$$X' = X \qquad \text{oppure} \qquad \frac{dX}{dT} = X(T)$$

che ha come soluzioni

- $X(T) = e^T$
- $X(T) = k * e^T$ con k costante

Classificazione delle Equazioni Differenziali

- ordinarie o alle derivate parziali (tipo di derivate)
- del primo ordine o di ordine n (grado delle derivate)
- in forma esplicita o implicita
- lineari o non lineari
- autonomi o non autonomi

In questa lezione useremo le notazioni:

- X per indicare una variabile/un vettore di variabili
- X' per indicare la derivata prima di X
- $X' = F(X, T)$ per indicare un'equazione/sistema di equazioni differenziali

Da ordine n a primo ordine

Osservazione

Da un'equazione di ordine n

$$F(X^{(n)}, X^{(n-1)}, \ldots, X', X) = 0$$

posso passare a un sistema di n equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} X' & = & Y_1 \\ Y_1' & = & Y_2 \\ \ldots & & \\ Y_{n-1}' & = & Y_n \\ F(Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1, X) = 0 & & \end{cases}$$

Da Integrali a Equazioni Differenziali

Un'equazione differenziale molto semplice

$$X' = F(T)$$

Si trova una soluzione integrando

$$X(T) = \int F(T)dT$$

È unica?

Da Integrali a Equazioni Differenziali

Un'equazione differenziale molto semplice

$$X' = F(T)$$

Si trova una soluzione integrando

$$X(T) = \int F(T) dT$$

È unica?

Da Integrali a Equazioni Differenziali

Un'equazione differenziale molto semplice

$$X' = F(T)$$

Si trova una soluzione integrando

$$X(T) = \int F(T)dT$$

È unica?

Esempio

$$X' = 4T^2 - 5T + 1$$

Una soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T + 3$$

Due soluzioni differiscono per una costante ovvero devo specificare $X(0) = X_0$

Esempio

$$X' = 4T^2 - 5T + 1$$

Una soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T + 3$$

Due soluzioni differiscono per una costante ovvero devo specificare $X(0) = X_0$

Esempio

$$X' = 4T^2 - 5T + 1$$

Una soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T + 3$$

Due soluzioni differiscono per una costante ovvero devo specificare $X(0) = X_0$

Esempio

$$X' = 4T^2 - 5T + 1$$

Una soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = 4 * \frac{1}{3}T^3 - 5 * \frac{1}{2}T^2 + T + 3$$

Due soluzioni differiscono per una costante ovvero devo specificare $X(0) = X_0$

Problema di Cauchy

Definition (Problema di Cauchy)

Trovare una soluzione di un'equazione differenziale di ordine n

$$F(X^{(n)}, X^{(n-1)}, \ldots, X'', X', X, T) = 0$$

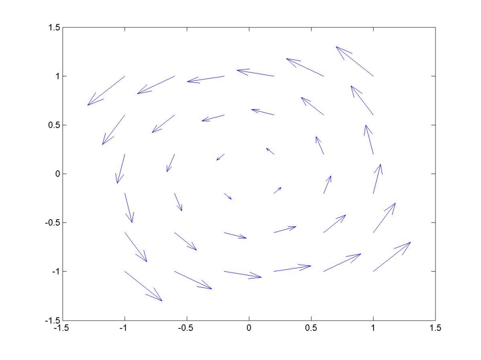
che soddisfi le condizioni iniziali

$$X^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \ldots, X'(t_0) = x_1, X(t_0) = x_0$$

Campo Vettoriale

Definition (Campo Vettoriale)

Un campo vettoriale è una funzione F che associa ad ogni punto in $\mathbb{R}^k$ (o in un suo sottoinsieme) un vettore (tangente)



Campi Vettoriale ed Equazioni Differenziali

Un campo vettoriale corrisponde ad un'equazione differenziale

- il campo vettoriale descrive le direzioni delle traiettorie nello spazio delle fasi
- il vettore $F(p)$ indica la direzione e l'intensità della derivata di una funzione incognita f nel punto p
- in un campo vettoriale la direzione e l'intensità della derivata dipende dal punto, ma non dal tempo, quindi si tratta di un'equazione autonoma

Domande

Dato un sistema di equazioni differenziali

- Quando esiste almeno una soluzione?
- Quando esiste una sola soluzione?
- Che proprietà hanno le soluzioni?
- Come le trovo/approssimo?

Concentriamoci su sistemi ordinari del primo ordine in forma esplicita e autonomi

$$\begin{cases} X_1' &= F_1(X_1, \ldots, X_n) \\ X_2' &= F_2(X_1, \ldots, X_n) \\ \ldots & \\ X_n' &= F_n(X_1, \ldots, X_n) \end{cases}$$

Non Esistenza

Osserviamo che:

- la soluzione di un'equazione differenziale è differenziabile e quindi continua
- esistono funzioni differenziabili che hanno derivata discontinua (e.g., $X(T) = T^2 sin(1/T)$)
- le derivate sono sempre funzioni di Darboux (soddisfano il teorema del valor medio)

Quindi il sistema

$$X' = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ 1 & X \geq 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni

Non Esistenza

Osserviamo che:

- la soluzione di un'equazione differenziale è differenziabile e quindi continua
- esistono funzioni differenziabili che hanno derivata discontinua (e.g., $X(T) = T^2 sin(1/T)$)
- le derivate sono sempre funzioni di Darboux (soddisfano il teorema del valor medio)

Quindi il sistema

$$X' = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ 1 & X \geq 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni

Non Esistenza

Osserviamo che:

- la soluzione di un'equazione differenziale è differenziabile e quindi continua
- esistono funzioni differenziabili che hanno derivata discontinua (e.g., $X(T) = T^2 sin(1/T)$)
- le derivate sono sempre funzioni di Darboux (soddisfano il teorema del valor medio)

Quindi il sistema

$$X' = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ 1 & X \geq 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni

Non Esistenza

Osserviamo che:

- la soluzione di un'equazione differenziale è differenziabile e quindi continua
- esistono funzioni differenziabili che hanno derivata discontinua (e.g., $X(T) = T^2 sin(1/T)$)
- le derivate sono sempre funzioni di Darboux (soddisfano il teorema del valor medio)

Quindi il sistema

$$X' = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ 1 & X \geq 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni

Esistenza

Theorem (Esistenza Locale)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$X' = F(X, T) \qquad X(t_0) = x_0$$

Se F è continua (in un intorno di (x_0, t_0)), allora esiste una soluzione locale del problema di Cauchy

Non è garantita l'unicità

Esistenza

Theorem (Esistenza Locale)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$X' = F(X, T) \qquad X(t_0) = x_0$$

Se F è continua (in un intorno di (x_0, t_0)), allora esiste una soluzione locale del problema di Cauchy

Non è garantita l'unicità

Pennello di Peano

$$X' = 3X^{2/3} \qquad X(0) = 0$$

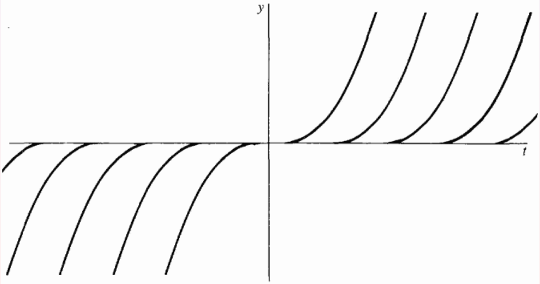
Una soluzione è

$$X(T) = 0$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = T^3$$

Combinando le due ottengo infinite soluzioni



Pennello di Peano

$$X' = 3X^{2/3} \qquad X(0) = 0$$

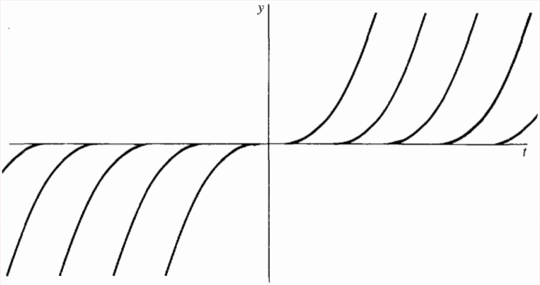
Una soluzione è

$$X(T) = 0$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = T^3$$

Combinando le due ottengo infinite soluzioni



Pennello di Peano

$$X' = 3X^{2/3} \qquad X(0) = 0$$

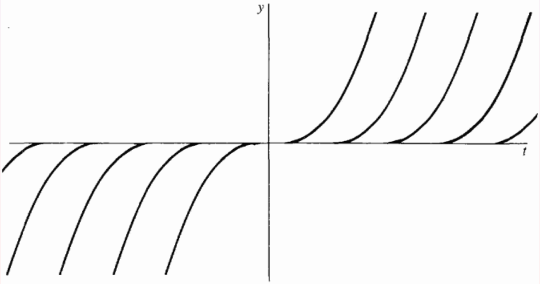
Una soluzione è

$$X(T) = 0$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = T^3$$

Combinando le due ottengo infinite soluzioni



Pennello di Peano

$$X' = 3X^{2/3} \qquad X(0) = 0$$

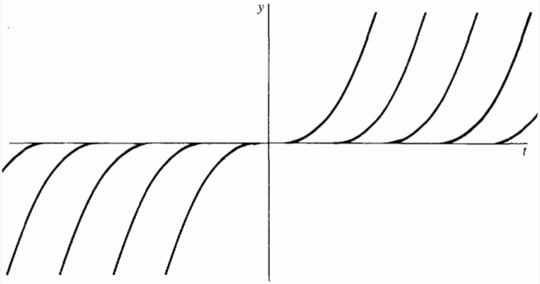
Una soluzione è

$$X(T) = 0$$

Un'altra soluzione è

$$X(T) = T^3$$

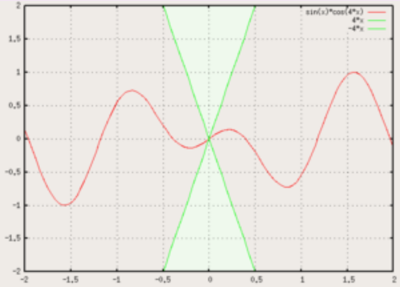
Combinando le due ottengo infinite soluzioni



Unicità

Definition (Funzioni Lipschitziane)

Una funzione f si dice lipschitziana se esiste k tale che
$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$



Unicità

Theorem (Esistenza e Unicità Locale)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$X' = F(X, T) \qquad X(t_0) = x_0$$

Se F è continua e lipschitziana (in un intorno di (x_0, t_0)), allora esiste ed è unica una soluzione locale del problema di Cauchy

Proprietà

Le soluzioni dei sistemi autonomi continui lipschitziani $X' = F(X)$ sono tali che:

- se $F(p) = 0$, allora p è un punto di equilibrio e $X(T) = p$ è una soluzione
- se una soluzione arriva in un punto di equilibrio, non si muove più
- se una soluzione passa due volte per lo stesso punto, allora ci passa infinite volte
- se due soluzioni si incrociano, non si separano più
- se traslo nel tempo una soluzione ottengo un'altra soluzione

Esempio: Lotka-Volterra

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} X' &= (a - bY)X \\ Y' &= (cX - d)Y \end{aligned}$$

Esempio: Lotka-Volterra

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} X' &= (a - bY)X \\ Y' &= (cX - d)Y \end{aligned}$$

I punti di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} 0 &= (a - bY)X \\ 0 &= (cX - d)Y \end{aligned}$$

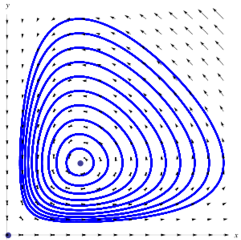
e sono $(0, 0)$ e $(d/c, a/b)$

Esempio: Lotka-Volterra

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} X' &= (a - bY)X \\ Y' &= (cX - d)Y \end{aligned}$$

Le traiettorie nello spazio delle fasi sono

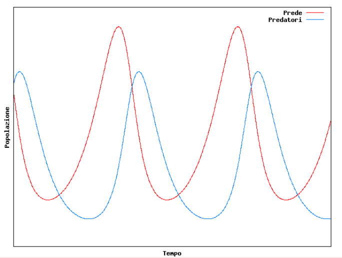


Esempio: Lotka-Volterra

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} X' &= (a - bY)X \\ Y' &= (cX - d)Y \end{aligned}$$

Le traiettorie nel tempo sono



Come si integrano/approssimano?

Esistono

- metodi di integrazione esatti per classi ristrette
- tecniche di analisi qualitativa
- metodi di integrazione numerica:
  - Eulero, Runge-Kutta, ...
  - sviluppo in serie di Taylor

Metodo di Eulero

$$X' = F(X, T) \qquad X(t_0) = x_0$$

Idea: approssimo $X(t_0 + \delta)$ con il valore della retta per x_0 avente coefficiente angolare $F(X(t_0), t_0)$

$$X(t_0 + \delta) \approx x_0 + F(x_0, t_0) * \delta$$

Problema: più δ è grande più l'approssimazione è grande
Soluzione: uso δ piccolo e itero

$$\begin{aligned}
&X(t_0) = x_0 \\
&X(t_0 + \delta) = X(t_1) \approx x_0 + F(x_0, t_0) * \delta = x_1 \\
&X(t_0 + 2\delta) = X(t_2) \approx x_1 + F(x_1, t_1) * \delta = x_2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Metodo di Eulero

$$X' = F(X, T) \qquad X(t_0) = x_0$$

Idea: approssimo $X(t_0 + \delta)$ con il valore della retta per x_0 avente coefficiente angolare $F(X(t_0), t_0)$

$$X(t_0 + \delta) \approx x_0 + F(x_0, t_0) * \delta$$

Problema: più δ è grande più l'approssimazione è grande
Soluzione: uso δ piccolo e itero

$$\begin{aligned}
&X(t_0) = x_0 \\
&X(t_0 + \delta) = X(t_1) \approx x_0 + F(x_0, t_0) * \delta = x_1 \\
&X(t_0 + 2\delta) = X(t_2) \approx x_1 + F(x_1, t_1) * \delta = x_2 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Metodo di Eulero

$$X' = F(X, T) \qquad X(t_0) = x_0$$

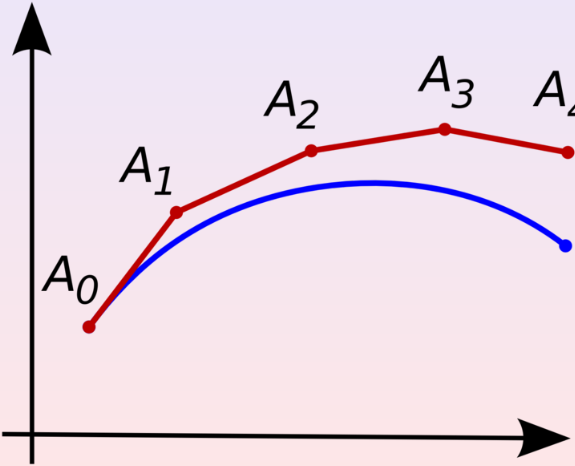
Idea: approssimo $X(t_0 + \delta)$ con il valore della retta per x_0 avente coefficiente angolare $F(X(t_0), t_0)$

$$X(t_0 + \delta) \approx x_0 + F(x_0, t_0) * \delta$$

Problema: più δ è grande più l'approssimazione è grande
Soluzione: uso δ piccolo e itero

$$\begin{aligned}
&X(t_0) = x_0 \\
&X(t_0 + \delta) = X(t_1) \approx x_0 + F(x_0, t_0) * \delta = x_1 \\
&X(t_0 + 2\delta) = X(t_2) \approx x_1 + F(x_1, t_1) * \delta = x_2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Esempio



Domande

- Posso stimare l'approssimazione?
- Posso migliorare/generalizzare il metodo?

Sviluppo in serie di Taylor

Theorem (Taylor con Resto di Lagrange)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* $\mathcal{C}^\infty$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(t - t_0)^{n+1}$$

con $\xi \in [t_0, t]$

Nel nostro caso se F è di classe $\mathcal{C}^\infty$:

- calcolo $X'(t_0) = F(x_0, t_0)$
- determino $X'' = F'(X, T) * X' = F'(X, T) * F(X, T)$
- calcolo $X''(t_0)$
- ...

Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$X' = X^2 \qquad X(0) = x_0$$

Approssimiamo la soluzione con lo sviluppo in serie di Taylor

- $X'(0) = x_0^2$
- $X'' = 2 * X * X' = 2 * X^3$ e quindi $X''(0) = 2 * x_0^3$
- $X''' = 6 * X^2 * X' = 6 * X^4$ e quindi $X'''(0) = 6 * x_0^4$

Quindi

$$X(T) \approx x_0 + x_0^2 * T + 2 * \frac{x_0^3}{2} T^2 + 6 \frac{x_0^4}{6} T^3$$

Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$X' = X^2 \qquad X(0) = x_0$$

Approssimiamo la soluzione con lo sviluppo in serie di Taylor

- $X'(0) = x_0^2$
- $X'' = 2 * X * X' = 2 * X^3$ e quindi $X''(0) = 2 * x_0^3$
- $X''' = 6 * X^2 * X' = 6 * X^4$ e quindi $X'''(0) = 6 * x_0^4$

Quindi

$$X(T) \approx x_0 + x_0^2 * T + 2 * \frac{x_0^3}{2} T^2 + 6 \frac{x_0^4}{6} T^3$$

Esempio

Consideriamo il problema di Cauchy

$$X' = X^2 \qquad X(0) = x_0$$

Approssimiamo la soluzione con lo sviluppo in serie di Taylor

- $X'(0) = x_0^2$
- $X'' = 2 * X * X' = 2 * X^3$ e quindi $X''(0) = 2 * x_0^3$
- $X''' = 6 * X^2 * X' = 6 * X^4$ e quindi $X'''(0) = 6 * x_0^4$

Quindi

$$X(T) \approx x_0 + x_0^2 * T + 2 * \frac{x_0^3}{2} T^2 + 6 \frac{x_0^4}{6} T^3$$

Osservazioni

- il metodo può essere implementato simbolicamente
- i polinomi mi permettono di approssimare arbitrariamente bene “qualsiasi” soluzione di equazione differenziale