

Le logiche del tempo

Angelo Montanari

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Università degli Studi di Udine

Corso SUPE
Udine, giugno - luglio 2025

Struttura del corso

Le **logiche del tempo** (le logiche temporali) quali utile strumento per discutere e formalizzare la nozione di tempo.

Struttura del corso:

- una breve introduzione
- logica e tempo: dalla sintesi alla dissociazione
- logica e tempo: la riconciliazione
- il tempo in informatica
- le logiche temporali

Una questione preliminare

Il tempo tra scienza e filosofia: **continuità o contrapposizione?**

Einstein (cito a memoria) ha affermato che il senso comune altro non è che l'insieme dei pregiudizi acquisiti nei primi 18 anni di vita.

Esempio. La fisica prerelativistica postulava l'esistenza di un tempo universale uguale per tutti gli osservatori.

Cercherò di evidenziare il **filo rosso** che lega la riflessione sul tempo in ambito scientifico e filosofico. In particolare, legame che intercorre tra alcune tematiche logico-filosofiche classiche e diverse problematiche di interesse per l'informatica.

Esempio. Leibniz si oppose al concetto di tempo assoluto di Newton ("Il tempo assoluto, vero e matematico fluisce di per se stesso e per la sua propria natura, in modo eguale senza relazione con alcuna cosa esterna" Principia, Newton): secondo Newton l'universo **ha un orologio** (gli istanti di tempo esistono indipendentemente dagli eventi), secondo Leibniz **è un orologio** (il tempo è derivato dagli eventi, non viceversa).

Cos'è il tempo?

“Cos'è il tempo allora? Se nessuno me lo chiede, lo so; se voglio spiegarlo a qualcuno che me lo chiede, non lo so” (S. Agostino, Confessioni XI, c. XIV, xvii).

Osservazione 1. (Appellandoci, più o meno legittimamente, a S. Agostino) rinunciamo programmaticamente a tentare di rispondere alla domanda: “cos'è il tempo?”, limitandoci ad assumerlo come un **utile strumento concettuale** per trattare un certo numero di problemi di rilievo in un dato ambito disciplinare.

Osservazione 2. Di fatto, **questioni classiche** relative alla natura del tempo riemergono, più o meno esplicitamente, nella ricerca contemporanea in logica temporale e informatica (il problema del “dividing instant”, le unità fondamentali: punti o intervalli, la natura discreta o densa del tempo, tempo lineare, ramificato, ciclico, etc.).

Tempo oggettivo e tempo soggettivo

Ogni concetto di tempo sorge nel contesto di una **specifica attività umana**, finalizzata ad uno dato scopo, ed è segnato, in modo inevitabile ed essenziale, da tale scopo (Lawrence, Levels of Language of Discourse about Time).

Alcuni esempi:

- il calendario gregoriano (date, orologi, etc.)
- la nozione di istante corrente (now) e la direzione del tempo (passato/presente/futuro)

Il **legame col linguaggio** naturale: uno studio appropriato del tempo non può prescindere da un'analisi delle caratteristiche e degli strumenti generali della comunicazione (linguistica).

Tempo, logica e linguaggio

Tempo, logica e linguaggio: la logica come strumento per l'analisi e la formalizzazione delle strutture sintattiche e semantiche del linguaggio naturale (buona parte della filosofia del '900 è caratterizzata da un approccio logico-linguistico ai problemi filosofici).

Lo studio del linguaggio (in particolare, lo studio del significato delle espressioni in linguaggio naturale) è essenziale per la comprensione del tempo.

Come catturare la dimensione temporale insita nel linguaggio naturale? La logica dei tempi verbali (**tense logic**).

Osservazione. I destini di linguaggio e logica temporale sembrano essere strettamente legati. L'interesse/disinteresse per l'uno e l'altra sembrano procedere di pari passo. Non a caso, la nozione di linguaggio (formale) occupa un posto centrale in informatica.

(Dal)la logica classica

La verità atemporale della logica classica e la verità della logica modale/temporale.

Esempio 1. “Se nessuno scapolo è un uomo felice, allora nessun uomo felice è scapolo” (Carnap). Si noti che la verità di tale enunciato dipende dal significato delle parole logiche “se”, “allora”, “non” ed “è”, ma non dipende dal significato di “scapolo”, “felice” e “uomo”.

Esempio 2. “Nessuno scapolo è sposato” (Quine). La verità dell'enunciato dipende dal significato attribuito a “scapolo” e “sposato”, o, meglio, dal sapere che hanno significati incompatibili.

Esempio 3. “I corpi cadono verso la terra con una accelerazione di 9,8 metri al secondo per secondo” (Carnap). La verità di tale enunciato dipende dall'informazione fattuale intorno al mondo fisico.

(al)la logica modale/temporale

Esempio 4. “Il presidente della repubblica è calvo”. La verità di tale affermazione può variare nel tempo (la verità di un'affermazione dipende dal momento in cui viene formulata).

Esempio 5. “Domani ci sarà una battaglia navale”. È il classico esempio di Aristotele. È possibile assegnare un valore di verità ad una tale affermazione?

Esempio 6. “Se è vero che sto tenendo una lezione sulle logiche del tempo, allora sarà sempre vero che ho tenuto una lezione sulle logiche del tempo”. Tale affermazione rimane vera sostituendo a “sto tenendo una lezione sulle logiche del tempo” una qualunque altra proposizione.

Alcune osservazioni

Osservazione 1. Non confondere la tradizionale distinzione tra verità analitiche e verità sintetiche/fattuali con la distinzione tra logiche classiche e logiche temporali.

Osservazione 2. Le proposizioni della logica temporale sono funzioni proposizionali con argomenti temporali (van Frassen), ossia non sono semplicemente vere o false, ma sono vere o false in un dato istante/intervallo temporale.

Osservazione 3. Il tentativo di fornire una caratterizzazione logica del linguaggio naturale (dai filosofi e teologi medievali a Prior) non può prescindere dal trattamento della dimensione temporale.

Fisica, logica, informatica e tempo

Qual è il legame che intercorre tra le nozioni di tempo in fisica, filosofia, logica (matematica) e informatica?

Affronteremo nell'ordine i seguenti punti:

- il tempo della **fisica**: un brevissimo cenno
- il tempo della filosofia e della **logica** (matematica): un viaggio attraverso i secoli
- il tempo dell'**informatica**: alcuni elementi fondamentali

Il tempo della fisica

Alcuni **snodi fondamentali**:

tempo percepito come strettamente collegato al movimento/cambiamento e descrivibile attraverso numeri

la meccanica newtoniana (le leggi della dinamica e la **simmetria temporale**: predizioni e postdizioni)

i paradossi di Zenone e l'analisi infinitesimale (l'infinita divisibilità del tempo / **tempo denso**)

la termodinamica (l'entropia e la **freccia del tempo**)

la relatività e la meccanica quantistica

Logica e tempo in una prospettiva storica

Un **problema metodologico**: è lecito (ri)formulare problemi classici (la battaglia navale di Aristotele, l'argomento vittorioso di Diodoro Crono, etc.) usando formalismi moderni, quando proprio l'assenza di un formalismo adeguato era uno dei maggiori problemi (il problema)?

Tre momenti fondamentali: sintesi, dissociazione e riconciliazione.

Il tempo è parte integrale della riflessione logica durante i periodi classico e medievale;

viene rimosso nel periodo rinascimentale;

viene reintrodotta a pieno titolo nel diciannovesimo e, soprattutto, nel ventesimo secolo.

Logica e tempo: dalla sintesi alla dissociazione

Alcune **tappe importanti**:

- movimento e tempo (Aristotele)
- il problema dei contingenti futuri (Aristotele)
- l'argomento vittorioso (Diodoro Crono)
- amplatio: termini che fanno riferimento ad entità che attualmente non esistono (Alberto di Sassonia)
- la durata del presente (Buridano)
- incipit/desinit (Sherwood)
- tempo e conseguenza logica (Ockham, Buridano)
- temporalis: connettivi e proposizioni temporali (Avicenna, Buridano)
- prescienza divina, determinismo e libero arbitrio (Anselmo, Ockham, Leibniz)

Movimento e tempo

Aristotele [384/383-322 avanti Cristo] mette in luce la stretta relazione che intercorre tra **tempo e movimento**, caratteristica distintiva della sostanza sensibile, oggetto di indagine della filosofia seconda, o fisica.

Il movimento è il passaggio dall'essere in potenza all'essere in atto. Caratteristica del movimento è la **continuità**. Nel continuo si distinguono **il prima e il poi**. "Il tempo è il numero del movimento secondo il prima e il poi" (Aristotele, Fisica).

Per Aristotele, il tempo è un **infinito potenziale**, in quanto non può esistere tutto insieme attualmente, ma si svolge e si accresce senza fine.

Tempo, verità e possibilità

Il famoso esempio della **battaglia navale** (problema degli **eventi futuri contingenti**), ovvero come vanno interpretate le due affermazioni (Aristotele, De Interpretatione):

“Domani ci sarà una battaglia navale”

“Domani non ci sarà una battaglia navale”

Possiamo sostenere che affermazioni come le precedenti sono vere o false già oggi? O, al contrario, dobbiamo affermare che il loro valore di verità è indeterminato e che quindi non si può affermare che esse possiedano oggi un effettivo valore di verità? Le risposte a tali questioni sono strettamente connesse alle nozioni modali di **necessità** e **possibilità** (i modi della verità).

Necessità e possibilità

Se assumiamo la verità della prima affermazione oggi, non ne segue che essa è **necessariamente** vera oggi?

Ancora, se domani dovessimo constatare che non vi è stata alcuna battaglia, sarebbe corretto affermare oggi una tale **possibilità**?

Sulla base di un'assunzione di **indeterminatezza**, Aristotele afferma che nessuna delle due affermazioni è oggi necessaria (necessariamente vera).

Al contrario, affermazioni relative al passato o al presente sono, per Aristotele, o necessariamente vere o necessariamente false.

In termini più formali (con gli strumenti di oggi)

Se denotiamo con la lettera proposizionale p la battaglia navale, le due affermazioni possono essere rappresentate come:

$$\text{TOMORROW } p \quad \text{e} \quad \text{TOMORROW } \neg p$$

rispettivamente. Se assumiamo tempo lineare (e logica a due valori), è possibile affermare:

$$\text{TOMORROW } p \vee \text{TOMORROW } \neg p$$

che è equivalente a:

$$\text{TOMORROW}(p \vee \neg p) (\equiv \text{TOMORROW true})$$

Affermazione vera (a condizione che esista un domani).

Se assumiamo che il tempo sia ramificato..

Tempo lineare e tempo ramificato

Come modellare gli eventi futuri contingenti (non determinismo) con le nozioni modali di necessità e possibilità?

Il **tempo ramificato**: “Se il determinista vede il tempo come una linea, l’indeterminista lo vede come un sistema di cammini ramificati” (Burgess, *The Unreal Future*).

Tempo e determinismo / non determinismo:
determinismo = tempo lineare vs. non determinismo = tempo ramificato

Logiche a tre valori

Lukasiewicz vede nella posizione di Aristotele a riguardo di eventi futuri contingenti un argomento in favore delle **logiche a tre valori** (vero, falso, indefinito / indeterminato).

Per un certo periodo, Prior (protagonista della riscoperta della logica temporale nel secolo scorso) condivide tale interpretazione ritenendola l'unica via possibile per costruire una **logica temporale non deterministica**.

Successivamente, Prior proporrà due diverse logiche temporali non deterministiche a due valori (vero/falso), l'una basata su idee di Ockham, l'altra su idee di Peirce.

L'argomento vittorioso di Diodoro Crono

L'argomento vittorioso di Diodoro Crono [340-280 avanti Cristo] fu interpretato nel mondo classico come un argomento utilizzato per provare la verità del **fatalismo**. Sfortunatamente solo le premesse e la conclusione dell'argomento sono note.

L'argomento vittorioso è un **trilemma**. Nella formulazione di Epitteto, Diodoro prova che le seguenti tre proposizioni non possono essere tutte vere:

P1: "Ogni proposizione vera circa il passato è necessaria" (tempo e modalità)

P2: "Una proposizione impossibile non può **seguire da** una possibile"

P3: "C'è una proposizione che è possibile, ma che non è né sarà vera" (modalità e tempo)

Significato dell'argomento vittorioso di Diodoro Crono

Diodoro usa tale incompatibilità, combinata con la plausibilità delle prime due proposizioni, per concludere la falsità della terza.

Assumendo la verità delle prime due proposizioni, Diodoro definisce possibilità e necessità nel seguente modo:

- il possibile è ciò che è o sarà vero
- il necessario è ciò che, essendo vero, non può essere falso

Recentemente, l'argomento vittorioso di Diodoro Crono è stato interpretato come (i) un argomento a favore del determinismo (ciò che è possibile prima o poi si realizzerà); (ii) un tentativo di chiarire le relazioni concettuali tra **tempo e modalità**.

Una volta di più, se assumiamo che il tempo sia ramificato..

Una possibile ricostruzione dell'argomento (Øhrstøm e Hasle) - 1

Assumiamo che il dominio del tempo sia discreto (ad esempio, l'insieme dei giorni).

Consideriamo le seguenti due affermazioni (proposizioni la cui verità può variare nel tempo).

q = Dion è qui

r = il profeta dice: Dion non sarà mai qui

Assumiamo che P3 sia vera per l'affermazione q , ossia che

$$\neg q \wedge \neg \text{FUTURE}(q) \wedge \text{POSS}(q)$$

Il terzo congiunto afferma la possibilità di q .

Una possibile ricostruzione dell'argomento (Øhrstøm e Hasle) - 2

Supponiamo ora che l'affermazione r sia vera (unicamente) nel giorno precedente a quello corrente (ieri).

Ne segue che la formula $PAST(r)$ è vera oggi (e in ogni giorno futuro) ed è falsa ieri (e in tutti i giorni precedenti). Da P1 concludiamo che $PAST(r)$ è necessariamente vera e dalla dualità di necessità e possibilità segue che non è possibile che non $PAST(r)$.

In modo più formale:

da $PAST(r)$ segue $NEC(PAST(r))$ che è equivalente a $\neg POSS(\neg(PAST(r)))$ (impossibilità di $\neg(PAST(r))$).

Una possibile ricostruzione dell'argomento (Øhrstøm e Hasle) - 3

Infine, dal significato di q e r , segue che per ogni giorno g , se q è vera in g , allora $\neg \text{PAST}(r)$ è vera in g . – questo è il passaggio critico

Ciò porta ad una contraddizione con $P2$, perché dal possibile (q) segue l'impossibile $\text{neg}(\text{PAST}(r))$.

Da cui segue (secondo Øhrstøm e Hasle) che, accettate le premesse $P1$ e $P2$, l'assunzione $P3$ va rigettata.

Lo studio del tempo nel medioevo

Le componenti principali della **logica nel medioevo**: suppositio terminorum (teoria dei termini), consequentia (teoria dell'implicazione), concetti modali e problemi filosofici relativi al legame tra logica e linguaggio

Obiettivo: sviluppare una **logica del linguaggio naturale**.

Il legame tra verità e tempo: **il valore di verità** di una proposizione può **variare nel tempo**.

I **tempi** che contribuiscono a determinare il valore di verità di una proposizione: il tempo presente (il tempo dell'espressione linguistica), il tempo nel quale l'evento cui si fa riferimento è accaduto o non è accaduto (tempus significantum) e il tempo del verbo della proposizione (tempus consignificatum).

Già stabilire cos'è il **tempo presente** non è banale.. Qual è la sua durata? Possiamo pensare ad un tempo senza durata?

Il problema dell'autoreferenzialità (e il tempo)

Nel testo *Sophismata*, Buridano [1295-1358] affronta il problema dell'autoreferenzialità in un caso che coinvolge il tempo (e i tempi verbali).

Si consideri l'affermazione (il sofisma): "Mi getterai nell'acqua del fiume" e si immagini il seguente scenario.

Socrate vuole attraversare il fiume e arriva ad un ponte che è custodito da Platone, che gli dice: "Se nella prima frase che pronuncerai, dirai la verità, ti consentirò di passare; altrimenti, ti getterò nell'acqua del fiume".

Buridano immagina che Socrate pronunci la frase: "Mi getterai nell'acqua del fiume".

Cosa dovrà fare Platone? Non sarà in grado di mantenere la sua promessa..

Il riferimento temporale dei termini (amplatio)

La questione dell'amplatio riguarda il riferimento temporale dei termini.

Nel *De Puritate Artis Logicae*, Burleigh [1275-1345] considera diverse alternative:

- Usare un verbo al presente solo per cose presenti.

- Usare un verbo al passato indifferentemente per cose presenti e passate.

- Usare un verbo al futuro indifferentemente per cose presenti e future.

Una concezione naïve di affermazioni temporalmente caratterizzate può risultare problematica.

Alcune affermazioni problematiche - 1

Assumiamo che le affermazioni della forma "A sarà B" vadano interpretate come: "esiste un tempo futuro nel quale vale "A è B" e quelle della forma "A è stato B" come "A è B" valeva in qualche tempo passato.

Tali interpretazioni non reggono se applicate ad un'affermazione quale: "Il giovane ragazzo diventerà un uomo famoso", in quanto "Il giovane ragazzo è un uomo famoso" non vale mai.

Tale affermazione va interpretata come: "Per una data persona x , x è ora un giovane ragazzo e x diventerà in futuro un uomo famoso".

Si noti come "giovane ragazzo" faccia riferimento al presente nonostante il verbo sia al futuro.

Alcune affermazioni problematiche - 2

Anche tale interpretazione non copre tutte le possibilità. Si pensi all'affermazione: "L'Anticristo sarà un oratore".

L'Anticristo ora non esiste e di conseguenza l'affermazione va interpretata come: "Per qualche persona x , è vero che x sarà l'Anticristo e x sarà un oratore".

Analogamente, l'affermazione: "Qualcosa di bianco era nero" può essere interpretata come: "Qualcosa che era stato bianco, era nero" o come: "Qualcosa che ora è bianco, era nero".

La teoria dell'amplatio di Walter Burleigh combina le due alternative interpretando l'affermazione: "A è stato B" come "Per qualche x , x è o è stato A e x è stato B".

La durata del presente

Che cos'è il tempo presente? Un punto nel tempo o ha una durata? Nel linguaggio naturale si parla del giorno presente, del mese presente, dell'anno presente..

La **granularità temporale**: le logiche del tempo stratificato, con operatori di contestualizzazione (dominio dei giorni, dominio dei mesi, dominio degli anni, ..) e operatori di proiezione (come passare da un dominio ad un altro).

A. Montanari, **Metric and Layered Temporal Logic for Time Granularity**. University of Amsterdam, ILLC dissertation series 1996-02.

Punti e intervalli temporali

Secondo Buridano possiamo affermare che una certa proposizione è vera nel tempo presente se esiste una parte del tempo presente nella quale essa è vera. Se tale parte è una parte **propria** del tempo presente ciò può risultare problematico.

Legame tra presente e passato (e tra presente e futuro): la parte iniziale del presente è passata rispetto alla parte finale (passato relativo) e, analogamente, la parte finale del presente è futura rispetto alla parte iniziale (futuro relativo).

Logiche temporali basate sui punti e **logiche temporali basate sugli intervalli**.

V. Goranko, A. Montanari, G. Sciavicco, **A Road Map of Interval Temporal Logics and Duration Calculi**. Journal of Applied Non Classical Logics, 14(1-2): 9-54, 2004.

Incipit/desinit o dei limiti temporali

La logica medievale ha dedicato particolare attenzione all'analisi delle problematiche poste dall'uso dei verbi "iniziare (incipit)" e "finire (desinit)", legate alla definizione di **limite temporale**, questioni in parte già presenti nella Fisica di Aristotele (Kilvington, Sophismata; Sherwood, Syncategoremata).

La questione riguarda affermazioni quali

"Socrate comincia a correre" e "Socrate comincia ad incanutire"

e le corrispondenti affermazioni relative non all'inizio, ma alla fine, come, ad esempio, "Socrate cessa di vivere".

Qual è il significato inteso di tali affermazioni?

Permanentia e successiva

Occorre distinguere tra stati/cose **permanenti** (che possono manifestarsi simultaneamente) e stati/cose **successivi** (che si manifestano uno dopo l'altro) [Pietro di Spagna 1277].

Come va compresa la frase: "Socrate comincia a correre"? Può essere interpretata come: "Ora Socrate non sta correndo, ma correrà immediatamente dopo" (Come si passa dallo stato di quiete allo stato di moto?).

E la frase: "Socrate comincia ad incanutire" può essere interpretata come: "Socrate è canuto e non lo era immediatamente prima".

Le due affermazioni sono trattate diversamente, perché riguardano stati/cose permanenti (l'essere canuti) e successivi (il correre).

A complicare la questione intervengono alcuni casi problematici come l'uso iterato di "incipit" e "desinit" e l'uso di espressioni quali "immediatamente prima" e "immediatamente dopo".

Il problema del dividing instant

Nel contesto di stati/cose successivi, si pone il problema del **dividing instant**, ancor oggi dibattuto nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale.

Occorre distinguere tra domini temporali discreti e densi. Nel primo caso ogni punto temporale ha un predecessore e un successore. Non così nel caso dei domini temporali densi.

James F. Allen, **Maintaining Knowledge about Temporal Intervals**. Communications of the ACM 26(11): 832-843, 1983.

Intervalli temporali semi-aperti

Nel caso di stati permanenti, le parti possono essere presenti nello stesso tempo (canuto e non canuto), a differenza delle parti di stati successivi.

Nel caso di stati successivi, occorre evitare sia la coesistenza di proprietà incompatibili (vita e morte) sia la presenza di buchi (gap) nei valori di verità (in ogni stato Socrate o è vivo o è morto).

Per Aristotele, in riferimento al cambiamento, una cosa non è in uno stato quando inizia ad essere in quello stato, mentre è in uno stato quando cessa di essere in tale stato. Con una terminologia moderna potremmo parlare di intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Nel caso di stati permanenti, si considerano intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra.

Termini categorematici e sincategorematici

Distinzione tra parole/termini significativi, che hanno un significato di per se stessi (termini categorematici) e termini consignificativi, che hanno un significato solo se congiunti ad altri termini significativi (termini sincategorematici).

Al primo insieme appartengono, in generale, sostantivi, verbi, aggettivi; ai secondi, connettivi e quantificatori (tutti, alcuni, ..).

In alcuni casi si parla anche di uso sincategorematico di alcune espressioni. Ad esempio, il verbo “iniziare” deve essere affiancato da un verbo all’infinito per diventare un predicato completo (“iniziare a correre”).

Anticipazioni

Nella soluzione proposta da Guglielmo di Sherwood [XIII secolo] ad alcuni “sofismi” relativi a incipit/desinit si prefigura la possibilità di distinguere tra tempo discreto e denso attraverso formule (assiomi) della logica temporale.

La distinzione tra permanentia e successiva anticipa la **caratterizzazione dei verbi** della linguistica contemporanea in (Vendler, *Linguistics and Philosophy*):

- stati (permanentia; ad esempio, “incanutire”)
- eventi istantanei (achievement; ad esempio, “il cervo è stato colpito da una freccia”)
- eventi non istantanei/processi (accomplishment; ad esempio, “disegnare un cerchio”)
- attività (successiva; ad esempio, “correre”)

Tempo e conseguenza logica

Guglielmo di Ockham [1285-1349] discute di **sillogismi e tempo**.

Nonostante il sillogismo:

Nessun A (attuale) è B

Qualche C (attuale) è B

Ne segue che qualche C non è A

sia di fatto valido, il seguente sillogismo temporale:

Nessun A (attuale) è B

Qualche C (attuale) è B

Ne segue che qualche C non era A

deve essere in generale rigettato, mentre il sillogismo temporale:

Nessun A (attuale) era B

Qualche C (attuale) era B

Ne segue che qualche C non è A

dovrebbe essere accettato come un sillogismo valido.

Consequentia ut nunc vs. consequentia simplex

Burleigh distingue tra consequentia ut nunc (as of now):

“Ogni uomo sta correndo, e quindi Socrate sta correndo”

e consequentia simplex (assoluta):

“Tutti gli esseri viventi stanno correndo e quindi tutti gli esseri umani stanno correndo”

La prima è valida in certi momenti (quando Socrate è vivo) e non in altri. La seconda sempre valida dal momento che l'insieme degli esseri viventi include quello degli esseri umani.

Legame tra consequentia ut nunc e implicazione materiale e tra consequentia simplex e implicazione stretta (formale). Implicazione stretta: è impossibile che l'antecedente sia vero e il conseguente falso. È un'implicazione materiale che richiede una relazione necessaria tra antecedente e conseguente.

Proposizioni atomiche e composte

Distinzione tra proposizioni atomiche e composte (molecolari).

5 tipi fondamentali di connettivi proposizionali: implicazione, congiunzione, disgiunzione, temporalis e causalis.

Causalis, che ha a che fare in senso lato con la causalità (Paolo di Venezia [1369-1429]) :

“dato che sei un uomo, non sei un asino”

“dato che c'è il sole, c'è la luce”

Altre aggiunte in seguito: localis e rationalis.

Le proposizioni temporali: temporalis

Temporalis: due o più proposizioni atomiche collegate da un avverbio di tempo. Già Boezio [480-524] si era occupato di temporalis.

Avicenna [980-1037] esplorò i legami tra temporalis e implicazione:

“ogni volta che c'è il sole, allora è giorno”

“non è mai vero che se c'è il sole allora è notte”

Differenza tra le espressioni “Se .. (allora)” e “Ogni volta che ..”. La prima è molto forte, la seconda è debole (implicazione materiale, non implicazione stretta) e “quando” sta nel mezzo.

Avicenna vede i temporalis come una forma di implicazione più debole dell'implicazione della forma “Se .. allora”.

L'avverbio “mentre”

Ockham rifiuta l'idea di ridurre i temporalis all'implicazione e preferisce, piuttosto, legarli alla congiunzione. Si consideri l'affermazione:

“p mentre q”

Una condizione per la verità di tale affermazione è che sia p che q siano entrambi veri in qualche tempo passato, presente o futuro.

Alcuni esempi :

“Socrate sta correndo, mentre Platone sta discutendo”

“Socrate stava correndo, prima che Platone discutesse”

“Socrate stava correndo, dopo che Platone discusse”

Buridano ritiene solo la prima un esempio appropriato di temporalis.

Tra congiunzione e implicazione

In certe frasi, sembra che una delle due affermazioni implichi l'altra.

L'affermazione:

“Socrate starà correndo, mentre Platone starà discutendo”

può essere letta come:

“Ogni qualvolta Platone starà discutendo, Socrate starà correndo”

ossia: “per ogni tempo futuro x , se Platone discute in x , allora Socrate corre in x ”.

Burleigh ha esplorato anche il legame tra temporalis e modalità: affinché “ p mentre q ” sia possibile, occorre che sia “ p ” che “ q ” siano possibili (non necessariamente il viceversa).

Libero arbitrio e preconnoscenza divina

Come conciliare la preconnoscenza divina, dalla quale sembra seguire la necessità del futuro, e la libertà di scelta degli esseri umani?

Boezio di Dacia: come conciliare la conoscenza divina di eventi futuri e la natura non necessaria, ma contingente di tali eventi?

Legame col problema della battaglia navale di Aristotele (problema degli eventi contingenti futuri).

Possibili soluzioni di Riccardo di Lovenham [circa 1380]:

- negare la libertà umana (fatalismo)
- negare la conoscenza divina della verità circa il futuro
- assumere che la verità circa il futuro contingente non sia stata ancora decisa
- trovare un modo di comporre consistentemente preconnoscenza divina e libero arbitrio

Futuri possibili e futuro vero

La quarta soluzione è stata elaborata da più autori, a partire da Anselmo di Canterbury [1033-1109] per proseguire con Guglielmo di Ockham [1287-1347] e arrivare a Leibniz [1646-1711].

Distinzione tra affermazioni contingenti come:

“Domani ci sarà una rivoluzione”

e affermazioni necessarie come (anche questa necessità può essere messa in questione..):

“Domani il sole sorgerà”

Se domani ci sarà effettivamente una rivoluzione parleremo di necessità successiva (necessità fattuale), mentre quella della seconda affermazione è una necessità antecedente (l'affermazione è costretta ad essere vera).

Necessità successiva e antecedente

In riferimento alla preconnoscenza divina, la necessità va interpretata come una necessità successiva.

La necessità antecedente è una necessità causale.

Per Anselmo, la conoscenza divina è una conoscenza senza tempo: 'non c'è un prima e un dopo in Dio, ma tutte le cose sono presenti in Lui subito'.

Tommaso d'Aquino ha una posizione simile: "L'eternità di Dio è senza tempo e simultanea con tutte le parti del tempo".

Per Guglielmo di Ockham, "Dio conosce tutti i futuri contingenti, ma tale conoscenza non comporta la loro necessità e gli esseri umani possono scegliere fra possibilità alternative".

La profezia di Giona circa la distruzione di Ninive: tutte le profezie a riguardo dei futuri contingenti sono condizionali.

Leibniz e i mondi possibili

Leibniz distingue necessità assoluta e necessità ipotetica che possono essere assimilate rispettivamente alla necessità antecedente e alla necessità successiva.

Per riferirsi ai futuri alternativi, Leibniz parla di mondi possibili e definisce le modalità in relazione a tali mondi (la semantica dei mondi possibili):

ciò che è necessario è ciò che è vale in tutti i mondi/futuri possibili e ciò che è possibile è ciò che è vale in almeno un mondo/futuro possibile.

È questo il punto di vista della logica modale contemporanea.

Logica medievale, rinascimento e tempo

Prior riassume la posizione dei **logici medievali** nei confronti del tempo nelle seguenti due affermazioni:

- le distinzioni temporali sono un tema rilevante per la riflessione logica
- ciò che è vero in un dato istante è in molti casi falso in un altro istante e viceversa

Nel passaggio dalla scolastica all'**umanesimo rinascimentale** viene meno l'interesse per la disciplina della dialettica, per gli studi e le dispute logici, percepiti come astratti e senza costrutto.

Non c'è spazio per il tempo

L'assenza della logica (temporale) nell'età rinascimentale:

- la logica e la disciplina della retorica (Valla, Agricola)
- la logica umanistica, l'arte dell'argomentazione, che rifiuta il linguaggio "artificiale" (oggi diremmo formale/logico) dei logici scolastici (Vives, Ramus)
- la logica come metodologia e la sua separazione dal linguaggio (Bacone)
- verità (logica) senza tempo (Leibniz, Kant, Frege)

Osservazione. La logica medievale sconta l'assenza di un formalismo adeguato.

Verità (logica) senza tempo

Per Frege la verità in logica è completamente atemporale:
il tempo in cui viene fatta una certa affermazione è considerato parte del pensiero che si vuole esprimere.

Se qualcuno vuole dire oggi la stessa cosa che ha detto ieri, deve sostituire il termine oggi con il termine ieri.

Non c'è spazio per una concezione delle proposizioni come funzioni nella variabile tempo.

La riconciliazione di logica e tempo

La **(ri)scoperta** della logica temporale:

- logica, linguaggio e tempo (Boole)
- tempo e modalità (Peirce)
- tempo e logica trivalente (Lukasiewicz)
- una struttura a tre punti dei tempi verbali: tempo dell'evento, tempo di riferimento e tempo dell'affermazione nella frase: "io avrò visto Giovanni" (Reichenbach)
- (sistemi formali/calcoli per) la logica dei tempi verbali (Prior)
- determinismo, libero arbitrio e tempo ramificato (Prior)
- l'enfasi sul tempo corrente della logica dei tempi verbali e la relatività ristretta (Prior)

Logica e tempo in letteratura

Presente, passato e futuro.

“The rule is jam tomorrow and jam yesterday, but never jam today
.. It's jam every other day: today isn't any other day, you know”
[Lewis Carroll, Alice in Wonderland, 1865].

Il tempo ramificato.

Una versione letteraria dell'idea del tempo ramificato si trova in racconto di Borges del 1941 intitolato “The Garden of Forking Paths” [in Ficciones, J.L. Borges, 1962].

La visione di Pierce

Importanza dell'asimmetria temporale tra passato e futuro.

Il presente è lo stato delle cose esistente .. il passato è quella parte del tempo che ha a che fare con la memoria .. il futuro è quella parte del tempo che ha a che fare la volontà” [Pierce].

Ruolo della continuità temporale.

“Il tempo, come forma universale del cambiamento, non può esistere se non vi è qualcosa che subisce un cambiamento e per subire un cambiamento continuo nel tempo deve esserci una continuità nelle qualità che cambiano” [Pierce 1892].

Distinzione tra l'istante (il tempo matematico) e il momento (un elemento di durata infinitesimale che può essere utilizzato per descrivere matematicamente un cambiamento graduale).

“Non c'è un arco di tempo presente così breve da non contenere qualcosa per la conferma del quale dobbiamo aspettare [del tempo]” [Pierce].

Tempo e modalità

Tre modi di essere: (i) l'essere di ciò che è possibile, (ii) l'essere di ciò che effettivamente è o è stato e (iii) l'essere necessario delle leggi, che governano i fatti in futuro.

Per i nominalisti le leggi sono solo delle rappresentazioni mentali..

Possiamo influenzare il futuro, non il passato. La verità o la falsità si possono affermare di ciò che è o è stato, ma non del futuro, che può essere necessario o possibile.

Rifiuto del determinismo. La nozione di indeterminatezza, da non intendersi come una degenerazione di una perfetta determinatezza, ma come lo stato primordiale, di cui definitezza e determinatezza sono approssimazioni (sperimentali, epistemologiche e metafisiche).

Gli statistici possono prevedere in modo accurato il numero di suicidi a New York il prossimo anno, ma non possono dire oggi quali persone si suicideranno.

Logica e realtà

Legame tra logica e realtà: le asserzioni diventano vere in rapporto alla realtà (rappresentano fatti).

Tale corrispondenza tra logica e realtà deve necessariamente prendere sul serio la dimensione temporale.

“Domani Jane sceglie di andare a Copenhagen” può essere interpretata come “Domani Jane necessariamente sceglie di andare a Copenhagen” o come “Domani Jane può scegliere di andare a Copenhagen”.

Il futuro è la regione del necessario e del possibile. Non vi sono alternative intermedie.

Il sistema/modello di Pierce

Distinzione tra futuro contingente e necessario.

Pierce non distingue tra futuro vero e altri futuri possibili. Per lui, nessuna affermazione circa il futuro contingente è vera.

La formula:

$$\neg(F(x)p \wedge F(x)\neg p)$$

deve valere per qualsiasi p , mentre la formula:

$$F(x)p \vee F(x)\neg p$$

non vale se la vediamo come una coppia di affermazioni sul futuro contingente.

La formula $F(x)p$ è vera solo se ci riferiamo al futuro necessario (è necessariamente vero che dopo x unità di tempo vale p).

Il contributo di Łukasiewicz

Łukasiewicz propone un'interpretazione dell'esempio della battaglia navale che muove dal rifiuto/superamento della logica a due valori (logica bivalente).

Egli contesta il determinismo logico che caratterizza assunzioni quali: "se A è B al tempo t, allora è vero in ogni tempo t' prima di t che A è B al tempo t" (l'affermazione può essere generalizzata rimuovendo il vincolo "t' prima di t").

Łukasiewicz rifiuta il principio della bivalenza e introduce un terzo valore di verità (indeterminato) che va usato nel caso di proposizioni che riguardano il futuro contingente.

Si noti che il valore della disgiunzione di due proposizioni indeterminate è indeterminato.

È interessante osservare come Prior non si riconosca nell'interpretazione dell'esempio di Aristotele data da Łukasiewicz .

Reichenbach: la struttura a tre punti dei tempi verbali

Negli anni '40 del secolo scorso, Reichenbach propose una descrizione dei tempi verbali destinata ad avere un forte impatto sulla linguistica (e non solo), che distingue (i) il tempo dell'espressione (S), (ii) il tempo dell'evento (E) e (iii) il tempo/punto di riferimento (R).

Si consideri la frase: “io avrò visto Giovanni” (futuro anteriore). In tale frase, S precede E che a sua volta precede R.

Una struttura analoga si applica alla frase: “io avevo visto Giovanni” (trapassato prossimo), nella quale E precede R e R precede S.

Non sempre i tre tempi sono distinti. Nel futuro semplice (“io vedrò Giovanni”) S ed R coincidono e precedono E, mentre nel passato remoto (“io vidi Giovanni”) E ed R coincidono e precedono S.

Nel passato prossimo (“io ho visto Giovanni”), S ed R coincidono e sono preceduti da E, mentre nel presente (“io vedo Giovanni”) i 3 tempi coincidono.

Il diagramma di Jespersen

La struttura proposta da Reichenbach era stata in qualche misura anticipata da Jespersen, che aveva proposto di distinguere, muovendo dal passato verso il futuro, (i) before-past (trapassato prossimo) PPp, (ii) past (passato remoto) Pp, (iii) after-past ("the letter was to cause anxiety") PFp, (iv) present (presente) p, (v) before-future (futuro anteriore) FPp, (vi) future (futuro semplice) Fp e (vii) after-future ("I shall be going to see John") FFp, dove p è una generica affermazione. In realtà, PFp e FPp sono più generali dell'after-past e del before-future, rispettivamente.

Nel diagramma di Jespersen manca il passato prossimo.

Quest'assenza viene giustificata nel seguente modo: "besides the purely temporal element, it [the present perfect] contains the element of result.. it represents the present state as the outcome of past events, and may therefore be called a retrospective variety of the present" [The Philosophy of Grammar, Jespersen, 1924].

La critica di Prior a Reichenbach

Prior critica il modello a 3 tempi proposto da Reichenbach ritenendolo al tempo stesso sia troppo semplice sia troppo complesso. La sua critica si rivolge, in particolare, alla netta distinzione tra punto di riferimento e punto dell'evento.

Si consideri, ad esempio, la seguente frase, un po' artificiale, ma grammaticalmente corretta: "I shall have been going to see John" che può essere tradotta con: "Io sarò andato a trovare Giovanni" (FPFp).

Essa sembra richiedere due punti di riferimento, per un totale di 4 punti così ordinati: prima S poi R2 poi E poi R1, dove R1 e R2 sono 2 punti di riferimento distinti (ed R1 viene raggiunto prima di R2).

Non viene esclusa la possibilità di dover introdurre un numero superiore di punti di riferimento e si contesta la distinzione tra tempo dell'espressione e tempo di riferimento (il primo altro non è che il primo tempo di riferimento).

Prior: la moderna logica del tempo

Prior ha gettato le basi della moderna logica del tempo negli anni '50 e '60, mostrandone lo stretto legame con la logica modale.

L'idea di sviluppare un calcolo che includa operatori temporali analoghi agli operatori modali.

Consapevolezza dell'importanza della distinzione proposta da McTaggart tra A-serie e B-serie.

Le A-serie sono basate sulle nozioni di passato, presente e futuro.

Le B-serie sono basate sulla relazione prima-dopo.

Per McTaggart le seconde presuppongono le prime e non viceversa.

Prior: passato, presente e futuro

Prior afferma di credere nella realtà della distinzione fra passato, presente e futuro.

I tempi (sarà, fu) sono concetti primitivi.

Solo gli oggetti presenti esistono.

Presente e realtà sono lo stesso concetto: “il presente è semplicemente il reale in relazione con due tipi particolari di irrealtà, vale a dire il passato e il futuro.” [Prior 1972].

Nella sua ricerca Prior ha affrontato il problema di caratterizzare dal punto di vista logico l'esistenza e la non esistenza degli oggetti nel tempo, in particolare in riferimento agli “esistenti non permanenti”.

Il tempo in informatica

Il tempo entra in gioco esplicitamente in una grande varietà di **aree** dell'informatica:

- sistemi per l'**elaborazione del linguaggio naturale** e **sistemi conversazionali** (traduzione automatica, generazione automatica di sommari, riconoscimento del parlato, ..)
- sistemi di **pianificazione** in intelligenza artificiale (ad esempio, la pianificazione del comportamento di un robot finalizzato al conseguimento di un certo obiettivo, in un dato ambiente, date certe condizioni iniziali)
- **specifica, verifica e sintesi** dei sistemi reattivi (sistemi per la produzione e la distribuzione di energia, programmi per il monitoraggio di sistemi remoti, sistemi distribuiti e mobili, ..)

Il tempo dell'informatica

La chiave di comprensione del tempo dell'informatica è la nozione di **algoritmo**.

Esempio. Quanti sono i possibili ordinamenti di n oggetti distinti (permutazioni)?

Un programma per il calcolo del fattoriale di un intero $n \geq 1$:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

```
procedure FATTORIALE(n)
  begin k := 1; i := 1;
    while i ≤ n do
      begin k := k · i; i := i + 1 end;
    return k
  end;
```


Computazioni e tempo discreto

Ogni algoritmo deve possedere le seguenti proprietà:

- (i) deve essere finitamente descrivibile
- (ii) deve consistere di un insieme di passi discreti, ciascuno dei quali deve essere eseguibile automaticamente

Una **computazione** è una successione, finita o infinita, di stati di esecuzione dell'algoritmo, dove stato = valore delle variabili (ogni stato di esecuzione dell'algoritmo per il calcolo del fattoriale è caratterizzato dal valore delle variabili k ed i).

Computazioni e **tempo discreto** (passi/stati/istanti).

Problemi (semi)decidibili e tempo indefinito

Problemi decidibili e indecidibili.

Un problema si dice **semi-decidibile** se esiste un “algoritmo” che, qualora la risposta sia positiva, è in grado di fornirla correttamente, mentre nel caso in cui la risposta sia negativa può o fornire la risposta corretta o non terminare la propria esecuzione (e, quindi, non fornire alcuna risposta).

Temp indefinito: non è possibile fissare una durata massima per le esecuzioni terminanti; se fosse possibile, il problema risulterebbe decidibile.

Esempi di problema semi-decidibile:

- il problema della terminazione (della Macchina di Turing)
- il problema di stabilire se un polinomio a coefficienti interi in un qualsiasi numero di variabili ammetta radici intere (decimo problema di Hilbert)

Tempo e complessità computazionale

Problemi trattabili e intrattabili.

Come misurare la complessità di un problema (e di un algoritmo):
tempo, spazio, energia.

Limiti superiori (bubble sort) e inferiori (calcolo del massimo di un insieme di numeri) alla complessità di un problema.

Complessità temporale e spaziale di un problema / algoritmo.

Esempio. Stabilire se due numeri interi, rappresentati in binario, sono uguali o meno:

- complessità temporale: lineare nella dimensione dell'input (al più un numero di operazioni di confronto pari al numero di cifre dell'intero più piccolo)
- complessità spaziale: costante (non occorre memorizzare l'input)

Complessità temporale vs. complessità spaziale

Modello di calcolo di riferimento: la **macchina di Turing** (per semplicità, assumiamo un alfabeto binario, al quale va aggiunto il simbolo vuoto)

- numero (finito) di stati della macchina: k
- input di lunghezza n
- tempo (= numero di passi) massimo: $t(n)$
- spazio (= numero di celle) massimo: $s(n)$

Legame tra complessità temporale e spaziale.

E' facile vedere che $t(n) \geq s(n)$ (il numero di celle utilizzate mai eccede il numero di passi compiuti).

E' anche possibile mostrare che $t(n) \leq k \cdot s(n) \cdot 3^{s(n)}$ (numero di possibili configurazioni diverse della macchina di Turing su uno spazio massimo utilizzato di dimensione $s(n)$).

PTIME vs. PSPACE

Problemi trattabili: la classe dei problemi PTIME, ossia dei problemi che possono essere risolti in un numero di passi polinomiale nella dimensione dell'input (complessità asintotica che ignora il grado e le costanti del polinomio)

La classe dei problemi PSPACE: problemi che possono essere risolti utilizzando uno spazio di dimensione polinomiale nella dimensione dell'input

PTIME è meglio di PSPACE

(ma LOGSPACE è meglio di PTIME:

$\text{LOGSPACE} \subseteq \text{PTIME} \subseteq \text{PSPACE}$ e $\text{LOGSPACE} \subset \text{PSPACE}$)

Trade off spazio/tempo: problemi e situazioni in cui l'avere poca memoria obbliga a perdere tempo (ordinamento di un file di dati in memoria secondaria).

Programmi reattivi e tempo infinito

Programmi imperativi (che terminano) e **programmi reattivi** (non terminanti).

Esempio. Un programma reattivo: gestione in mutua esclusione di una risorsa critica condivisa (ad esempio, una stampante).

```
local y: integer where  $y = 1$   
  l0: loop forever do  
    l1: non critical;  
P1:: l2: request y;  
    l3: critical;  
    l4: release y  
  ||  
  m0: loop forever do  
    m1: non critical;  
P2:: m2: request y;  
    m3: critical;  
    m4: release y
```

Specifica di proprietà di programmi reattivi

Ogni **computazione** (infinita) del programma deve soddisfare due proprietà fondamentali:

1. **accessibilità**: ogni richiesta di accedere alla regione critica da parte di P1 o di P2 deve essere prima o poi (in un tempo **arbitrariamente lungo**, ma **finito**) soddisfatta;
2. **mutua esclusione**: P1 e P2 non possono **mai** trovarsi contemporaneamente all'interno della regione critica.

Tali proprietà possono essere specificate usando la **logica temporale** (Pnueli, Turing Award).

Verifica di proprietà di programmi reattivi

Come possiamo padroneggiare **nondeterminismo** e **infinito** che entrano in gioco quando vogliamo specificare il comportamento atteso di un sistema reattivo (a stati finiti)?

Programmi reattivi e **nondeterminismo**: dato lo stato corrente del programma ad un certo punto della computazione, può accadere che vi siano più possibili stati successivi. In tal caso, il programma sceglie non deterministicamente uno di essi quale stato successivo della computazione (**tempo ramificato**).

Il comportamento di un programma è descritto da numero **infinito** di computazioni. Ogni computazione è **infinita** (**tempo infinito**).

Esempio. Con riferimento al programma per la gestione della mutua esclusione, come è possibile verificare finitamente se una data computazione (non) rispetta il requisito di accessibilità?

Algoritmi di verifica

Come possiamo verificare che una specifica non contenga richieste contraddittorie (**verifica della soddisfacibilità** di una formula della logica temporale)?

Come possiamo verificare che un programma soddisfi le proprietà richieste, ossia che tutte le possibili computazioni del programma rispettino le condizioni volute (**verifica del modello**)?

Decidibilità e algoritmi per la verifica della soddisfacibilità e per la verifica del modello.

Il ruolo fondamentale della **periodicità** (cicli di un grafo).

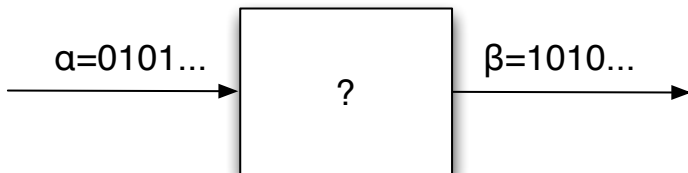
Trade-off **espressività** e **complessità computazionale**.

Il problema della sintesi

Il problema della sintesi fu proposto originariamente da Church durante il “Summer Institute of Symbolic Logic” del 1957.

Esso consiste nella sintesi di una macchina a stati finiti (un circuito) che realizza una trasformazione bit-bit di una sequenza infinita (di input) α in una corrispondente sequenza infinita (di output) β in modo che la coppia (α, β) soddisfi una specifica espressa in un'opportuna logica temporale.

Obiettivo: data una specifica della relazione input-output tra α e β , costruire una macchina corrispondente:



Un semplice esempio

La specifica (logica) del comportamento atteso:

$$\forall t (\alpha(t) = 1 \rightarrow \beta(t) = 1)$$

se, in un dato istante t , l'input è 1, allora anche l'output è 1

$$\neg \exists t \beta(t) = \beta(t+1) = 0$$

non ci sono due occorrenze consecutive di 0 nella sequenza di output

$$\exists^\omega t \alpha(t) = 0 \rightarrow \exists^\omega t \beta(t) = 0$$

se la sequenza di input contiene un numero infinito di occorrenze di 0, allora anche la sequenza di output contiene un numero infinito di occorrenze di 0.

Una procedure risolutiva:

se l'input è 1, produce l'output 1;

se l'input è 0, produce l'output 1 se l'output precedente, sull'input 0, era 0; altrimenti, produce l'output 0.

Sistemi ibridi, distribuiti e multiagente

Tempo e sistemi ibridi.

Come specificare e verificare il comportamento di sistemi ibridi che integrano componenti continue e componenti discrete? Logiche del **tempo denso**.

Tempo e sistemi distribuiti.

Come modellare l'interazione fra le componenti di un sistema distribuito, le cui componenti evolvono in larga misura in modo indipendente? Assenza di un orologio universale e meccanismi di **comunicazione asincrona**.

Tempo e sistemi multiagente.

Come determinare le responsabilità dei singoli attori di un sistema multiagente al verificarsi di una data situazione? Estensione delle logiche temporali con **operatori per il passato** (espressività vs. succintezza).

Una breve ricapitolazione

Il tempo è una **dimensione essenziale** di una molteplicità di discipline (e della vita umana).

In informatica incontriamo un grande insieme di problemi noti, riformulati in nuovi contesti, e di problemi nuovi, che richiedono nuovi strumenti (concettuali), nei quali la componente temporale ha un ruolo essenziale: c'è ancora **molto spazio per il tempo**.

Le **logiche temporali**, nella loro grande varietà sono state, e rimangono, uno strumento estremamente utile. Nell'ultima parte del corso ci concentreremo sulla logica del tempo lineare (Linear Temporal Logic, abbreviata LTL).

Bibliografia essenziale

J. van Benthem, The Logic of Time (2nd edition), Springer, 1983.

S. Demri, V. Goranko, M. Lange, Temporal Logics in Computer Science: Finite-State Systems. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2016.

V. Goranko, Temporal Logic, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2024.

A. Montanari, A., Policriti, Temporal Logic. From Ancient Ideas to Artificial Intelligence, by P. Ohrstrom and P. F.V. Hasle (book review), Journal of Symbolic Logic, vol.62, no.3, September 1997, pp. 1044-1046.

P. Ohrstrom and P.F.V. Hasle, Temporal Logic. From Ancient Ideas to Artificial Intelligence, Kluwer Academic Publishers, 1995.