Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 settembre 2009

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \to q) \wedge \neg r \equiv (\neg p \to r) \to \neg r \wedge q$. **V** **F** 1pt

2. Se F e G sono i ridotti della β-formula H allora $\neg F \wedge \neg G \equiv \neg H$. **V** **F** 1pt

3. Se F è insoddisfacibile allora $G \to F$ è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

4. L'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0,1,2,3,4\}$, $p^I = \{0,2,3\}$, $q^I = \{0,1\}$ e $r^I = \{(0,0),(0,2),(1,2),(1,3),(1,4),(3,0),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$. Allora $I \models \forall x \forall y (r(x,y) \to \neg q(x) \vee p(y))$. **V** **F** 1pt

6. $\neg \exists x\, p(x) \to q(a) \equiv \exists x (p(x) \vee q(a))$. **V** **F** 1pt

7. $\forall x (p(x) \wedge \neg q(x)) \to \neg \exists y (\neg p(y) \vee q(y))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α β γ δ 1pt

8. Se F è una formula predicativa soddisfacibile, allora ogni tableau (sistematico o meno) per F è aperto. **V** **F** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka di formule predicative cui appartengono $\exists x (p(x) \wedge \neg r(x,x))$ e $\forall x (p(x) \to r(x,x))$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x (p(x) \to \exists y (r(x,y) \wedge \neg p(y))), \forall x (\neg p(x) \to \exists y (r(x,y) \wedge p(y))), \forall x \forall y (r(x,y) \to \neg r(y,x))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x (p(x) \to r(x, f(x))), \exists x (p(x) \wedge q(x)), \forall x \forall y (r(x,y) \to \neg q(x) \vee r(y,y)), \forall x \neg r(x,x)\}.$$

12. Sia $\{b, p, c, g, m, i\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari, e m e i sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bobi", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto", $m(x, y)$ come "x morde y", $i(x, y)$ come "x insegue y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bobi è un cane che non morde il suo padrone; 3pt

(ii) ogni cane che insegue tutti i gatti ne morde qualcuno. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux mostrate che 5pt

$$\forall x(q(x) \to \neg p(x) \vee \exists y\, r(x, y)), \exists x(q(x) \wedge p(x)), \forall x(\exists y\, r(y, x) \to r(x, c)) \models \exists x\, r(x, c).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to q \wedge \neg(r \wedge s)) \wedge \neg(t \vee \neg u)\big) \wedge w.$$

Soluzioni

1. **V** come si verifica ad esempio con le tavole di verità.

2. **V** $H \equiv F \vee G$ (Lemma 3.7 delle dispense), e quindi $\neg H \equiv \neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$, utilizzando, tra l'altro, il Lemma 2.23.2.

3. **F** Se $G = F$ è insoddisfacibile, $G \to F$ è addirittura valida.

4. **V** Lemma 3.24 delle dispense.

5. **F** $I, \sigma[x/1, y/4] \not\models r(x, y) \to \neg q(x) \vee p(y)$.

6. **V** $\neg\exists x\, p(x) \to q(a) \equiv \exists x\, p(x) \vee q(a) \equiv \exists x(p(x) \vee q(a))$ per i Lemmi 2.23.3 e 6.41 delle dispense.

7. β Si tratta di un'implicazione.

8. **V** Discende immediatamente dal Teorema di correttezza (Teorema 8.27 delle dispense).

9. **F** Se Γ è un insieme di Hintikka che contiene il primo enunciato allora $p(a) \wedge \neg r(a, a) \in \Gamma$ per qualche costante a. Perciò $p(a) \in \Gamma$ e $\neg r(a, a) \in \Gamma$. Se il secondo enunciato è in Γ anche $p(a) \to r(a, a) \in \Gamma$, e perciò $\neg p(a) \in \Gamma$ oppure $r(a, a) \in \Gamma$. Entrambe le possibilità implicano che Γ contenga una coppia complementare di letterali, contro la definizione di insieme di Hintikka.

10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati dell'insieme. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 2\}, \quad r^I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$$

ha queste caratteristiche, come pure

$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n, m) \,:\, n < m \,\}.$$

11. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione soddisfa i quattro enunciati dell'insieme, che indichiamo con F, G, H e K. Supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione di questo tipo, con l'intento di arrivare ad una contraddizione.

Da $I \models G$ segue l'esistenza di $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $d_0 \in q^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \to r(x, f(x))$, da cui possiamo dedurre $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$.

Da $I \models H$ segue in particolare $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models r(x, y) \to \neg q(x) \vee r(y, y)$, e quindi $d_0 \notin q^I$ oppure $(f^I(d_0), f^I(d_0)) \in r^I$. La prima alternativa contraddice quanto già ottenuto e perciò $(f^I(d_0), f^I(d_0)) \in r^I$. Ciò però contraddice $I \models K$, che implica in particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \neg r(x, x)$. Abbiamo dunque raggiunto una contraddizione e la dimostrazione è completa.

12. (i) $c(b) \wedge \neg m(b, p(b))$;
(ii) $\forall x\big(c(x) \wedge \forall y(g(y) \to i(x, y)) \to \exists y(g(y) \wedge m(x, y))\big)$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per essa. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo; in diversi casi applichiamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$\underline{\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)}$$

$$\underline{\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big)}, \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)$$

$$s, \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)), \underline{\neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)}$$

$$s, \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)), \neg(\neg p \wedge (q \to r)), \underline{s \to r}$$

$$s, \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)), \neg(\neg p \wedge (q \to r)), \neg s$$

$$\otimes$$

$$s, \underline{\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r))}, \neg(\neg p \wedge (q \to r)), r$$

$$s, \neg p, \underline{\neg(\neg p \wedge (q \to r))}, r \qquad s, \underline{q \wedge \neg r}, \neg(\neg p \wedge (q \to r)), r$$

$$s, q, \neg r, \neg(\neg p \wedge (q \to r)), r$$

$$\otimes$$

$$s, \neg p, p, r \qquad s, \neg p, \underline{\neg(q \to r)}, r$$

$$\otimes$$

$$s, \neg p, q, \neg r, r$$

$$\otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula è insoddisfacibile.

14. Per dimostrare la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 8.47 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso che abbia alla radice i tre enunciati a sinistra di $\models$ e la negazione dell'enunciato alla destra del simbolo. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(q(x) \to \neg p(x) \vee \exists y\, r(x,y))$, $\forall x(\exists y\, r(y,x) \to r(x,c))$, $\neg\exists x\, r(x,c)$ e $\neg\exists y\, r(y,b)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$F, \underline{\exists x(q(x) \wedge p(x))}, G, H$$

$$F, \underline{q(a) \wedge p(a)}, G, H$$

$$\underline{F}, q(a), p(a), G, H$$

$$F, \underline{q(a) \to \neg p(a) \vee \exists y\, r(a,y)}, q(a), p(a), G, H$$

$$F, \neg q(a), q(a), p(a), G, H \qquad\qquad F, \underline{\neg p(a) \vee \exists y\, r(a,y)}, q(a), p(a), G, H$$

$$\otimes$$

$$F, \neg p(a), q(a), p(a), G, H \qquad\qquad F, \underline{\exists y\, r(a,y)}, q(a), p(a), G, H$$

$$\otimes$$

$$F, r(a,b), q(a), p(a), \underline{G}, H$$

$$F, r(a,b), q(a), p(a), G, \underline{\exists y\, r(y,b) \to r(b,c)}, H$$

$$F, r(a,b), q(a), p(a), G, \underline{K}, H \qquad\qquad F, r(a,b), q(a), p(a), G, r(b,c), \underline{H}$$

$$F, r(a,b), q(a), p(a), G, K, \neg r(a,b), H \qquad\qquad F, r(a,b), q(a), p(a), G, r(b,c), H, \neg r(b,c)$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

15.

$$[\langle \neg\big((p \to q \wedge \neg(r \wedge s)) \wedge \neg(t \vee \neg u)\big) \wedge w\rangle]$$

$$[\langle \neg\big((p \to q \wedge \neg(r \wedge s)) \wedge \neg(t \vee \neg u)\big), w\rangle]$$

$$[\langle \neg(p \to q \wedge \neg(r \wedge s)), w\rangle, \langle t \vee \neg u, w\rangle]$$

$$[\langle p, \neg(q \wedge \neg(r \wedge s)), w\rangle, \langle t, w\rangle, \langle \neg u, w\rangle]$$

$$[\langle p, \neg q, w\rangle, \langle p, r \wedge s, w\rangle, \langle t, w\rangle, \langle \neg u, w\rangle]$$

$$[\langle p, \neg q, w\rangle, \langle p, r, s, w\rangle, \langle t, w\rangle, \langle \neg u, w\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge \neg q \wedge w) \vee (p \wedge r \wedge s \wedge w) \vee (t \wedge w) \vee (\neg u \wedge w).$$