

Prova scritta di Elementi di Logica Matematica

18 luglio 2006

Cognome

Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la risposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

- | | | | | | | |
|---|--|----------|----------|----------|----------|-----|
| 1. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg p) \equiv p \wedge \neg q \rightarrow \neg r$. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |
| 2. Se $\neg F \models G$ e $H \models F$ allora $\neg F \models G \wedge \neg H$. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |
| 3. La formula $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee \neg s \vee \neg(p \wedge s)$ è in forma normale disgiuntiva. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |
| 4. Se I è l'interpretazione di dominio \mathbb{N} con $f^I(n) = n + 1$ e $p^I = \{n : n \text{ è pari}\}$ allora $I \models \forall x(p(x) \rightarrow \neg p(f(x)))$. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |
| 5. $\exists x(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \forall x p(x) \rightarrow \exists x q(x)$. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |
| 6. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\neg p(x), \forall x(p(x) \rightarrow r(x, f(x))), \forall x r(x, f(y))$ | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr></table> | 0 | 1 | 2 | 3 | 1pt |
| 0 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 7. $\neg \exists x \forall y(p(y) \rightarrow r(x, y) \vee r(y, f(x)))$ è una α -formula, una β -formula, una γ -formula o una δ -formula? | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">α</td><td style="padding: 2px 5px;">β</td><td style="padding: 2px 5px;">γ</td><td style="padding: 2px 5px;">δ</td></tr></table> | α | β | γ | δ | 1pt |
| α | β | γ | δ | | | |
| 8. Se Γ è un insieme di Hintikka di formule predicative tale che $\neg \exists x(p(x) \rightarrow r(x, a)) \in \Gamma$ allora $\neg p(a) \notin \Gamma$. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |
| 9. Se un tableau (non necessariamente sistematico) per l'enunciato F è chiuso allora F è insoddisfacibile. | <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td style="padding: 2px 5px;">V</td><td style="padding: 2px 5px;">F</td></tr></table> | V | F | 1pt | | |
| V | F | | | | | |

SECONDA PARTE

10. Dimostrare che 4pt

$$p(b) \wedge p(c), \forall x(p(x) \rightarrow \exists y r(x, y)) \not\models r(b, b) \vee r(c, c).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

11. Dimostrare che 4pt

$$p(c), \forall x(\exists y r(x, y) \rightarrow \neg p(x)) \models \neg r(c, c).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

- 12.** Sia $\{F, p, c, g, m, i\}$ un linguaggio dove F è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari, e m e i sono simboli di relazione binari. Interpretando F come “Fido”, $p(x)$ come “il padrone di x ”, $c(x)$ come “ x è un cane”, $g(x)$ come “ x è un gatto”, $m(x, y)$ come “ x morde y ”, $i(x, y)$ come “ x insegue y ”, traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:
- (i) Fido è un cane che non insegue il suo padrone; 3pt
- (ii) qualche cane che insegue tutti i gatti non morde il suo padrone. 3pt
- 13.** Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt
- $$(p \wedge r \rightarrow \neg q \vee s) \wedge \neg(p \wedge q \rightarrow s)$$
- è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un’interpretazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)
- 14.** Usando il metodo dei tableaux mostrare la validità di 5pt
- $$\forall x(\neg p(x) \rightarrow \exists y r(x, y)) \wedge \neg \forall x p(x) \rightarrow \exists x \exists y r(x, y).$$
- (Utilizzate il retro del foglio)
- 15.** Usando l’algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettere in forma normale disgiuntiva la formula 2pt
- $$\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee \neg s) \wedge \neg(t \rightarrow u)).$$

Soluzioni

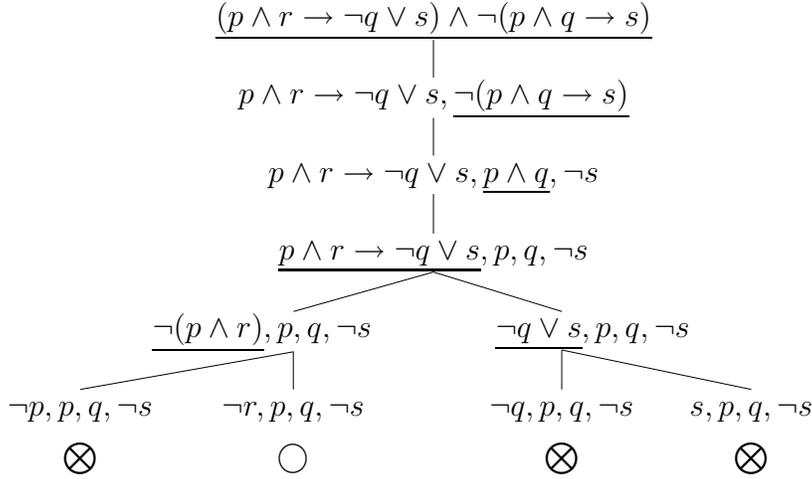
1. **F** Qualunque interpretazione tale che $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(r) = \mathbf{F}$ soddisfa la formula a destra del simbolo di equivalenza logica, ma non quella a sinistra.
2. **V** Sia I un'interpretazione che soddisfa $\neg F$. Allora $I \models G$ per la prima conseguenza logica. D'altra parte I non può soddisfare H (perché abbiamo $H \models F$) e quindi soddisfa $\neg H$. Perciò $I \models G \wedge \neg H$.
3. **F** È una disgiunzione il cui ultimo disgiunto non è una congiunzione di letterali.
4. **V** Si verifica direttamente: interpretata in I la formula asserisce che se un numero naturale è pari allora il suo successore non è pari.
5. **V** Si può verificare combinando una dopo l'altra alcune equivalenze logiche fondamentali:

$$\begin{aligned} \exists x(\neg p(x) \vee q(x)) &\equiv \exists x \neg p(x) \vee \exists x q(x) \\ &\equiv \neg \forall x p(x) \vee \exists x q(x) \\ &\equiv \forall x p(x) \rightarrow \exists x q(x) \end{aligned}$$

6. **1** La seconda formula è l'unico enunciato.
7. γ È la negazione di una formula esistenziale.
8. **V** Se Γ è un insieme di Hintikka e $\neg \exists x(p(x) \rightarrow r(x, a)) \in \Gamma$ allora si ha anche $\neg(p(a) \rightarrow r(a, a)) \in \Gamma$. Da ciò segue $p(a) \in \Gamma$ e perciò $\neg p(a) \notin \Gamma$.
9. **V** È l'enunciato del teorema di correttezza per i tableaux predicativi.
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfa i primi due enunciati ma non il terzo. La seguente interpretazione ha queste caratteristiche:

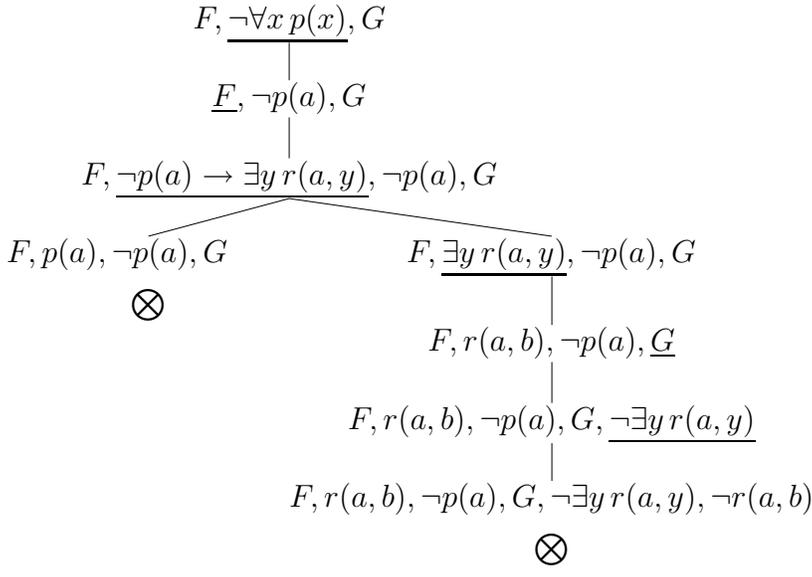
$$D^I = \{0, 1\}, \quad b^I = 0, \quad c^I = 1, \quad p^I = \{0, 1\}, \quad r^I = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

11. Sia I un'interpretazione che soddisfa $p(c)$ e $\forall x(\exists y r(x, y) \rightarrow \neg p(x))$. Vogliamo mostrare che $I \models \neg r(c, c)$.
Dato che $I \models p(c)$ si ha $c^I \in p^I$. D'altra parte $I \models \forall x(\exists y r(x, y) \rightarrow \neg p(x))$ implica che $I, \sigma[x/c^I] \models \exists y r(x, y) \rightarrow \neg p(x)$. Per quanto visto prima $I, \sigma[x/c^I] \not\models \neg p(x)$ e perciò deve essere $I, \sigma[x/c^I] \models \exists y r(x, y)$. In particolare $I, \sigma[x/c^I][y/c^I] \models r(x, y)$, cioè $(c^I, c^I) \in r^I$. Questo significa precisamente che $I \models r(c, c)$, come volevamo.
12. (i) $c(F) \wedge \neg i(F, p(F))$;
(ii) $\exists x(c(x) \wedge \forall y(g(y) \rightarrow i(x, y)) \wedge \neg m(x, p(x)))$.
13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per essa. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

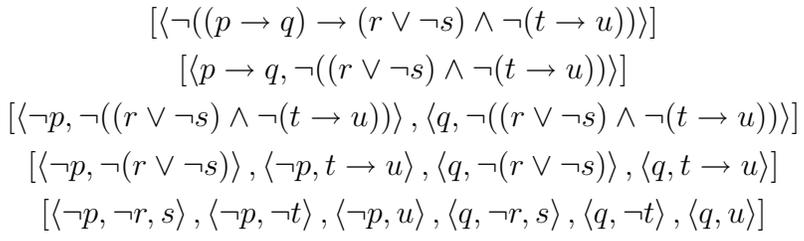


Il tableau è aperto e i letterali dell'etichetta della sua (unica) foglia marcata con \circ ci permettono di definire un'interpretazione che soddisfa la formula: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

14. Per dimostrare la validità dell'enunciato in esame costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano F e G rispettivamente le formule $\forall x(\neg p(x) \rightarrow \exists y r(x, y))$ e $\neg \exists x \exists y r(x, y)$. Saltiamo i primi due passaggi e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.



- 15.



La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge u) \vee (q \wedge \neg r \wedge s) \vee (q \wedge \neg t) \vee (q \wedge u).$$