

# Prova scritta di Elementi di Logica Matematica

14 settembre 2005

Cognome

Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la risposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

## PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1.  $p \rightarrow (\neg p \vee q \rightarrow q)$  è valida. 

V	F
---	---

 1pt
2. Se  $A(a)$  è insoddisfacibile allora  $\forall x A(x)$  è insoddisfacibile. 

V	F
---	---

 1pt
3. Se  $A \equiv B$  e  $A \vee \neg C$  è valida allora  $C \models B$ . 

V	F
---	---

 1pt
4.  $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y r(x, y)) \wedge p(c)$  è una  $\alpha$ -formula, una  $\beta$ -formula, una  $\gamma$ -formula o una  $\delta$ -formula? 

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
----------	---------	----------	----------

 1pt
5. Considerate le seguenti quattro formule:  
 $\neg p(c), \forall x p(x), \forall x \exists y r(x, y), \forall x \exists y r(x, y) \rightarrow p(x)$ .  
Quante sono formule chiuse? 

0	1	2	3	4
---	---	---	---	---

 1pt
6.  $\forall x r(x) \wedge \forall x q(x) \equiv \forall x(r(x) \wedge q(x))$ . 

V	F
---	---

 1pt
7. Se, applicando il metodo dei tableau ad una formula predicativa insoddisfacibile, non si procede con sistematicità è possibile che il tableau non si chiuda. 

V	F
---	---

 1pt
8. Esiste un insieme di Hintikka  $U$  di formule predicative tale che  $\forall x p(x) \in U, \forall x(p(x) \rightarrow r(a, x)) \in U$  e  $\neg r(a, a) \in U$ . 

V	F
---	---

 1pt
9. Se  $I$  è l'interpretazione di dominio  $\{0, 1, 2\}$  con  $r^I = \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$  allora  $I \models \forall x \exists y r(x, y)$ . 

V	F
---	---

 1pt

## SECONDA PARTE

10. Dimostrate che 4pt  
 $\exists x q(x), \forall x(q(x) \rightarrow \exists y p(y, x)), \forall x \forall y(q(x) \wedge r(y) \rightarrow \neg p(y, x)) \models \neg \forall y r(y)$ .  
(Utilizzate il retro del foglio)
11. Dimostrate che la formula 4pt  
 $\exists x(p(x) \wedge \forall y r(x, y)) \wedge \neg \forall x(\forall y r(y, x) \rightarrow p(x)) \wedge \exists x(q(x) \wedge \neg r(x, x))$   
è soddisfacibile.  
(Utilizzate il retro del foglio)

- 12.** Sia  $\{c, q, s, a\}$  un linguaggio dove  $c$ ,  $q$  e  $s$  sono simboli predicativi unari e  $a$  è un simbolo predicativo binario. Interpretando  $c(x)$  come “ $x$  è un critico”,  $q(x)$  come “ $x$  è un quadro”,  $s(x)$  come “ $x$  è una scultura” e  $a(x, y)$  come “ $x$  apprezza  $y$ ”, traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:
- (i) se un critico apprezza tutti i quadri allora non apprezza qualche scultura; 3pt
- (ii) qualche quadro è apprezzato da tutti i critici; 3pt
- (iii) nessun critico apprezza ogni quadro e ogni scultura. 3pt
- 13.** Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare la validità di 5pt  
 $\exists x((p(x) \vee q(x)) \wedge \forall y \neg r(y, x)) \rightarrow \neg \forall x(p(x) \rightarrow r(a, x)) \vee \exists x(q(x) \wedge \neg r(b, x)).$   
 (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)
- 14.** Usando l’algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la 2pt  
 formula  

$$(\neg p \rightarrow q \wedge r) \wedge (s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w)).$$
  
 (Utilizzate lo spazio qui sotto)

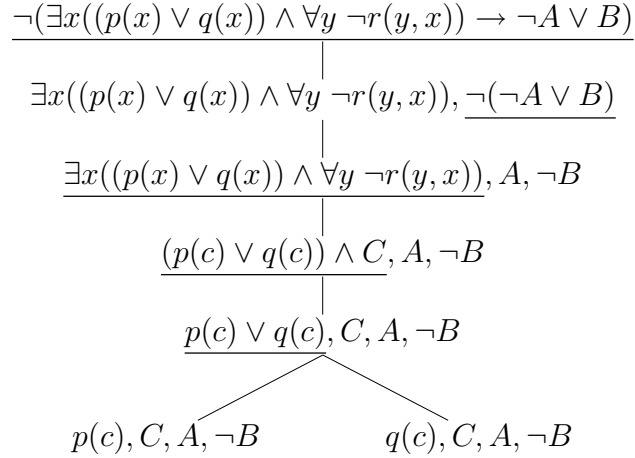
## Soluzioni

1. **V** (si può verificare con la tavola di verità, oppure osservare che se  $p$  è vera e  $\neg p \vee q$  è vera deve essere vera anche  $q$ )
2. **V** (se un'interpretazione soddisfa  $\forall x A(x)$  allora soddisfa anche  $A(a)$ )
3. **V** (se  $I \models C$  la validità di  $A \vee \neg C$  implica che  $I \models A$  e quindi, dato che  $A \equiv B$ , che  $I \models B$ )
4.  $\alpha$  (è una congiunzione)
5. **3** (solo l'ultima formula ha una variabile libera (la  $x$ ))
6. **V** (è un caso particolare di una delle equivalenze logiche fondamentali studiate, e si può verificare facilmente a mano)
7. **V** (un esempio è stato visto a lezione ed è sul testo: questa è la ragione per cui si introduce il concetto di tableau costruito con sistematicità)
8. **F** (se le prime due formule (che sono  $\gamma$ -formule) appartengono ad un insieme di Hintikka  $U$  si deve avere  $p(a) \in U$  e  $p(a) \rightarrow r(a, a) \in U$ ; allora deve appartenere a  $U$  anche almeno una tra  $\neg p(a)$  e  $r(a, a)$ ; ma  $\neg p(a) \notin U$  per quanto già ottenuto, e quindi deve essere  $r(a, a) \in U$ : ciò fa sì che non possa essere  $\neg r(a, a) \in U$ )
9. **V** (si verifica immediatamente usando la definizione di soddisfazione)
10. Sia  $I$  un'interpretazione qualsiasi che soddisfa le tre formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo nell'ordine con  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Dato che  $I \models A_1$  esiste  $d_1 \in D^I$  tale che  $d_1 \in q^I$ . Siccome  $I \models A_2$  si ha  $v_{\sigma_I[x \leftarrow d_1]}(q(x) \rightarrow \exists y p(y, x)) = V$  e quindi  $v_{\sigma_I[x \leftarrow d_1]}(\exists y p(y, x)) = V$ . Perciò esiste  $d_2 \in D^I$  tale che  $(d_2, d_1) \in p^I$ .  
 Supponiamo ora per assurdo che  $I \models \forall y r(y)$ : in particolare dovrebbe essere  $d_2 \in r^I$ . Visto che  $d_1 \in q^I$  e  $d_2 \in r^I$  si può sfruttare  $I \models A_3$ , che in particolare implica che  $v_{\sigma_I[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}(q(x) \wedge r(y) \rightarrow \neg p(y, x)) = V$ , per concludere  $(d_2, d_1) \notin p^I$ , in contraddizione con quanto ottenuto in precedenza. Allora deve essere  $I \not\models \forall y r(y)$ , e quindi  $I \models \neg \forall y r(y)$ , come volevamo.
11. Un'interpretazione che soddisfa la formula è la seguente:  

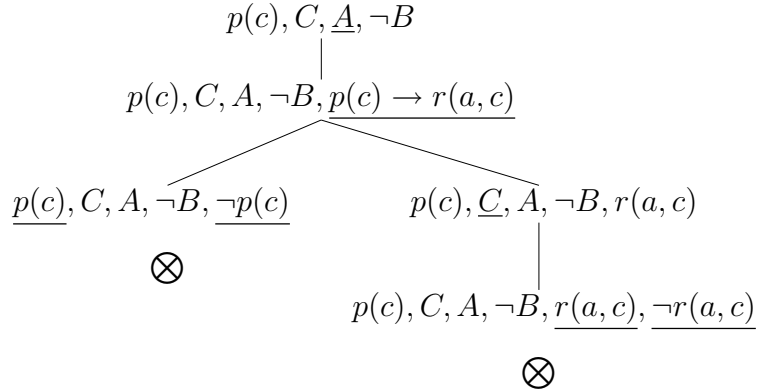
$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad p^I = \{0\}, \quad q^I = \{2\},$$

$$r^I = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (2, 1)\}.$$
12. (i)  $\forall x(c(x) \wedge \forall y(q(y) \rightarrow a(x, y)) \rightarrow \exists y(s(y) \wedge \neg a(x, y)))$ ;  
 (ii)  $\exists x(q(x) \wedge \forall y(c(y) \rightarrow a(y, x)))$ ;  
 (iii)  $\neg \exists x(c(x) \wedge \forall y(q(y) \vee s(y) \rightarrow a(x, y)))$ .

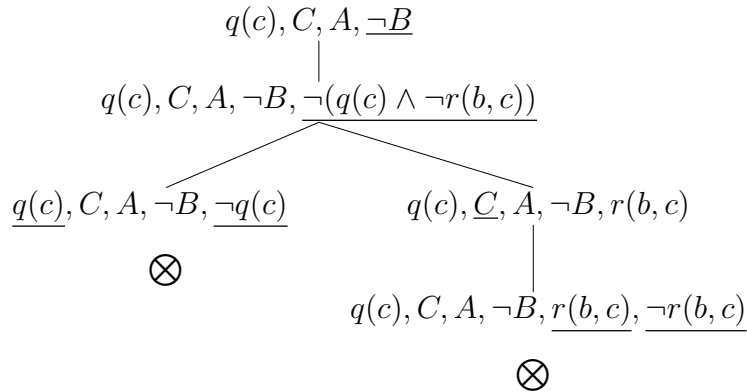
13. Per dimostrare la validità della formula in esame costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  rispettivamente le formule  $\forall x(p(x) \rightarrow r(a, x))$ ,  $\exists x(q(x) \wedge \neg r(b, x))$  e  $\forall y \neg r(y, c)$ . In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.



Per ragioni di spazio proseguiamo separatamente i due rami. Ecco il ramo di sinistra:



Ed ecco quello di destra:



14.

$$\begin{aligned} & [ \langle (\neg p \rightarrow q \wedge r) \wedge (s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w)) \rangle ] \\ & [ \langle \neg p \rightarrow q \wedge r, s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w) \rangle ] \\ & [ \langle p, s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w) \rangle, \langle q \wedge r, s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w) \rangle ] \\ & [ \langle p, \neg(s \vee \neg t) \rangle, \langle p, \neg(u \rightarrow \neg w) \rangle, \langle q, r, s \vee \neg t \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg w) \rangle ] \\ & [ \langle p, \neg s, t \rangle, \langle p, u, w \rangle, \langle q, r, \neg(s \vee \neg t) \rangle, \langle q, r, \neg(u \rightarrow \neg w) \rangle ] \\ & [ \langle p, \neg s, t \rangle, \langle p, u, w \rangle, \langle q, r, \neg s, t \rangle, \langle q, r, u, w \rangle ]. \end{aligned}$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge \neg s \wedge t) \vee (p \wedge u \wedge w) \vee (q \wedge r \wedge \neg s \wedge t) \vee (q \wedge r \wedge u \wedge w).$$

# Prova scritta di Elementi di Logica Matematica

14 settembre 2005

Cognome

Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la risposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

## PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1.  $\neg q \rightarrow (p \vee q \rightarrow p)$  è valida. 

V	F
---	---

 1pt
2. Se  $A(a)$  è valida allora  $\exists x A(x)$  è valida. 

V	F
---	---

 1pt
3. Se  $A \vee \neg B$  è valida e  $B \equiv C$  e allora  $C \models A$ . 

V	F
---	---

 1pt
4.  $\exists x(p(x) \wedge \forall y r(x, y)) \vee \neg p(c)$  è una  $\alpha$ -formula, una  $\beta$ -formula, una  $\gamma$ -formula o una  $\delta$ -formula? 

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
----------	---------	----------	----------

 1pt
5. Considerate le seguenti quattro formule:  
 $\neg p(c), \exists x p(x), \exists y \forall x r(x, y), \forall x(\exists y r(x, y) \rightarrow p(x))$ .  
Quante sono formule chiuse? 

0	1	2	3	4
---	---	---	---	---

 1pt
6.  $\exists x p(x) \vee \exists x q(x) \equiv \exists x(p(x) \vee q(x))$ . 

V	F
---	---

 1pt
7. Se, applicando il metodo dei tableau ad una formula predicativa insoddisfacibile, si procede con sistematicità è possibile che il tableau non si chiuda. 

V	F
---	---

 1pt
8. Esiste un insieme di Hintikka  $U$  di formule predicative tale che  $\forall x p(x) \in U, \forall x(r(x, a) \rightarrow \neg p(x)) \in U$  e  $r(a, a) \in U$ . 

V	F
---	---

 1pt
9. Se  $I$  è l'interpretazione di dominio  $\{0, 1, 2\}$  con  $r^I = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$  allora  $I \models \forall x \exists y r(y, x)$ . 

V	F
---	---

 1pt

## SECONDA PARTE

10. Dimostrate che 4pt  
 $\exists x p(x), \forall x(p(x) \rightarrow \exists y r(x, y)), \forall x \forall y(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \neg r(x, y)) \models \neg \forall y q(y)$ .  
(Utilizzate il retro del foglio)
11. Dimostrate che la formula 4pt  
 $\exists x(p(x) \wedge \neg r(x, x)) \wedge \exists x(q(x) \wedge \forall y r(x, y)) \wedge \neg \forall x(\forall y r(y, x) \rightarrow q(x))$   
è soddisfacibile.  
(Utilizzate il retro del foglio)

- 12.** Sia  $\{f, q, s, a\}$  un linguaggio dove  $f$ ,  $q$  e  $s$  sono simboli predicativi unari e  $a$  è un simbolo predicativo binario. Interpretando  $f(x)$  come “ $x$  è un film”,  $q(x)$  come “ $x$  è un quiz”,  $s(x)$  come “ $x$  è uno studente” e  $a(x, y)$  come “ $x$  apprezza  $y$ ”, traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:
- (i) qualche film è apprezzato da tutti gli studenti; 3pt
- (ii) se uno studente apprezza tutti i film allora non apprezza qualche quiz; 3pt
- (iii) nessuno studente apprezza ogni film e ogni quiz. 3pt
- 13.** Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare la validità di 5pt
- $$\forall x(p(x) \rightarrow r(x, a)) \wedge \neg \exists x(q(x) \wedge \neg r(x, b)) \rightarrow \forall x(p(x) \vee q(x) \rightarrow \exists y r(x, y)).$$
- (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)
- 14.** Usando l’algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt
- $$\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \vee \neg(t \vee u \rightarrow \neg w).$$
- (Utilizzate lo spazio qui sotto)

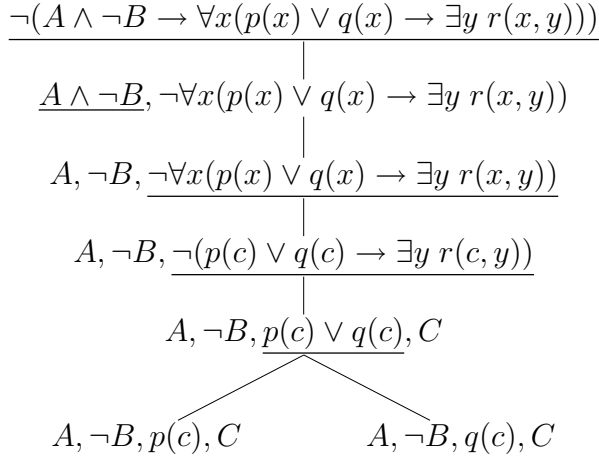
## Soluzioni

1. **V** (si può verificare con la tavola di verità, oppure osservare che se  $q$  è falsa e  $p \vee q$  è vera deve essere vera anche  $p$ )
2. **V** (se un'interpretazione soddisfa  $A(a)$  allora soddisfa anche  $\exists x A(x)$ )
3. **V** (se  $I \models C$ , dato che  $B \equiv C$ , si ha  $I \models B$ ; la validità di  $A \vee \neg B$  implica che  $I \models A$ )
4.  **$\beta$**  (è una disgiunzione)
5. **4** (nessuna formula ha variabili libere)
6. **V** (è un caso particolare di una delle equivalenze logiche fondamentali studiate, e si può verificare facilmente a mano)
7. **F** (il concetto di tableau costruito con sistematicità viene introdotto appunto per garantire la chiusura di tutti i tableau costruiti a partire da formule insoddisfacibili)
8. **F** (se le prime due formule (che sono  $\gamma$ -formule) appartengono ad un insieme di Hintikka  $U$  si deve avere  $p(a) \in U$  e  $r(a, a) \rightarrow \neg p(a) \in U$ ; allora deve appartenere a  $U$  anche almeno una tra  $\neg r(a, a)$  e  $\neg p(a)$ ; ma  $\neg p(a) \notin U$  per quanto già ottenuto, e quindi deve essere  $\neg r(a, a) \in U$ : ciò fa sì che non possa essere  $r(a, a) \in U$ )
9. **F** (si verifica immediatamente usando la definizione di soddisfazione)
10. Sia  $I$  un'interpretazione qualsiasi che soddisfa le tre formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo nell'ordine con  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Dato che  $I \models A_1$  esiste  $d_1 \in D^I$  tale che  $d_1 \in p^I$ . Siccome  $I \models A_2$  si ha  $v_{\sigma_I[x \leftarrow d_1]}(p(x) \rightarrow \exists y r(x, y)) = V$  e quindi  $v_{\sigma_I[x \leftarrow d_1]}(\exists y r(x, y)) = V$ . Perciò esiste  $d_2 \in D^I$  tale che  $(d_1, d_2) \in r^I$ .  
 Supponiamo ora per assurdo che  $I \models \forall y q(y)$ : in particolare dovrebbe essere  $d_2 \in q^I$ . Visto che  $d_1 \in p^I$  e  $d_2 \in q^I$  si può sfruttare  $I \models A_3$ , che in particolare implica che  $v_{\sigma_I[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}(p(x) \wedge q(y) \rightarrow \neg r(x, y)) = V$ , per concludere  $(d_1, d_2) \notin r^I$ , in contraddizione con quanto ottenuto in precedenza. Allora deve essere  $I \not\models \forall y q(y)$ , e quindi  $I \models \neg \forall y q(y)$ , come volevamo.
11. Un'interpretazione che soddisfa la formula è la seguente:
 
$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad p^I = \{0\}, \quad q^I = \{1\},$$

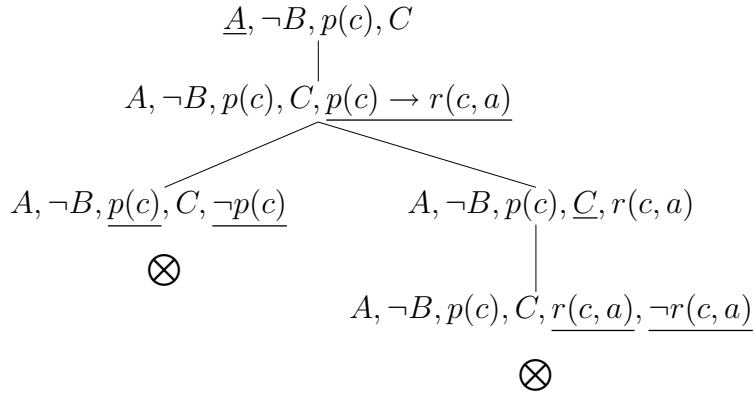
$$r^I = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 2)\}.$$
12. (i)  $\exists x(f(x) \wedge \forall y(s(y) \rightarrow a(y, x)))$ ;  
 (ii)  $\forall x(s(x) \wedge \forall y(f(y) \rightarrow a(x, y)) \rightarrow \exists y(q(y) \wedge \neg a(x, y)))$ ;  
 (iii)  $\neg \exists x(s(x) \wedge \forall y(f(y) \vee q(y) \rightarrow a(x, y)))$ .



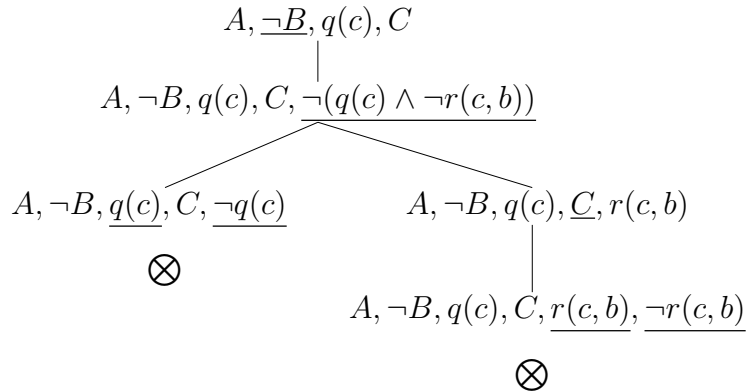
13. Per dimostrare la validità della formula in esame costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  rispettivamente le formule  $\forall x(p(x) \rightarrow r(x, a))$ ,  $\exists x(q(x) \wedge \neg r(x, b))$  e  $\neg \exists y r(c, y)$ . In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.



Per ragioni di spazio proseguiamo separatamente i due rami. Ecco il ramo di sinistra:



Ed ecco quello di destra:



14.

$$\begin{aligned} & \langle [\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \vee \neg(t \vee u \rightarrow \neg w)] \rangle \\ & \langle [\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg(r \rightarrow \neg s)), \neg(t \vee u \rightarrow \neg w)] \rangle \\ & \langle [\neg(\neg p \wedge q), \neg(t \vee u \rightarrow \neg w)], [r \rightarrow \neg s, \neg(t \vee u \rightarrow \neg w)] \rangle \\ & \langle [p, \neg q, \neg(t \vee u \rightarrow \neg w)], [\neg r, \neg s, \neg(t \vee u \rightarrow \neg w)] \rangle \\ & \langle [p, \neg q, t \vee u], [p, \neg q, w], [\neg r, \neg s, t \vee u], [\neg r, \neg s, w] \rangle \\ & \langle [p, \neg q, t, u], [p, \neg q, w], [\neg r, \neg s, t, u], [\neg r, \neg s, w] \rangle . \end{aligned}$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee \neg q \vee t \vee u) \wedge (p \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee t \vee u) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee w).$$