

Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 settembre 2004

Prima Parte: **F V F F V γ V V F**

7. L'insieme di formule in esame è insoddisfacibile. Per dimostrarlo supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione che rende vera ognuno dei suoi membri.

Dato che $I \models \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I \models p(d_0) \wedge \neg q(d_0)$.

Dato che $I \models \forall x(p(x) \Rightarrow \forall y r(x, y))$ abbiamo che $I \models \forall y r(d_0, y)$ e quindi $I \models r(d_0, c)$.

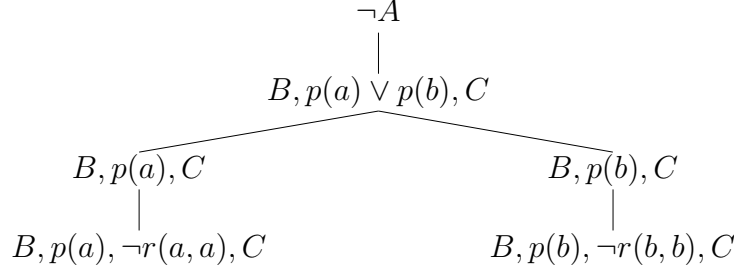
D'altra parte, dato che $I \models \forall x(q(x) \vee \neg r(x, c))$, abbiamo $I \models \neg r(d_0, c)$.

Questa situazione è impossibile e la nostra dimostrazione è completa.

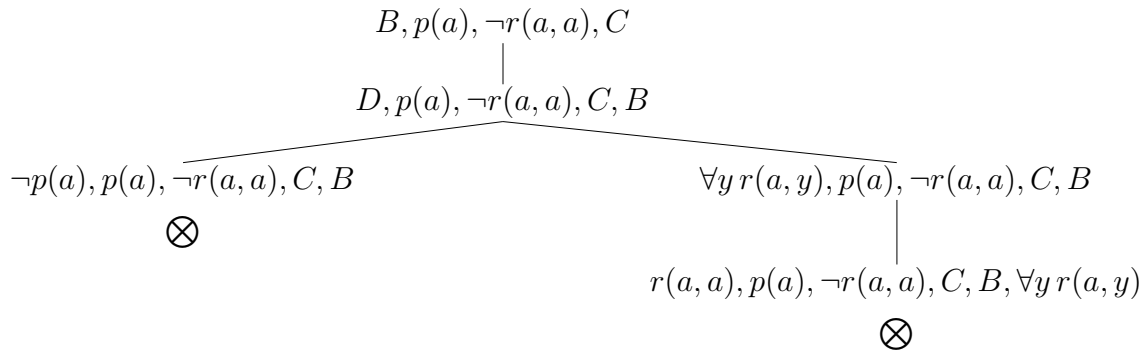
8. Un'interpretazione che non soddisfa la formula sotto esame è la seguente:
 $D^I = \{0\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \emptyset$, $r^I = \emptyset$.

Quindi la formula non è valida.

9. (i) $\forall x(m(x) \Rightarrow \exists y(s(y) \wedge \neg u(x, y) \wedge a(x, y)))$;
(ii) $\exists x(s(x) \wedge \forall y(m(y) \wedge u(y, x) \Rightarrow a(y, x)))$;
(iii) $\forall x(\neg m(x) \Rightarrow \forall y(s(y) \Rightarrow a(x, y)) \vee \forall y(s(y) \Rightarrow \neg a(x, y)))$.
10. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con A la formula di partenza e con B e C le formule $\forall x(p(x) \Rightarrow \forall y r(x, y))$ e $\neg \exists z r(z, z)$. Il tableau inizia nel seguente modo:



Per ragioni di spazio sviluppiamo solo il ramo di sinistra (quello di destra è analogo, con b al posto di a), indicando con D la formula $p(a) \Rightarrow \forall y r(a, y)$.



Il tableau mostra che A è valida.

11.

$$\begin{aligned} & [\langle (p \Rightarrow q \vee \neg r) \vee \neg(s \Rightarrow \neg t) \Rightarrow u \wedge (v \Rightarrow \neg w) \rangle] \\ & [\langle \neg((p \Rightarrow q \vee \neg r) \vee \neg(s \Rightarrow \neg t)) \rangle, \langle u \wedge (v \Rightarrow \neg w) \rangle] \\ & [\langle \neg(p \Rightarrow q \vee \neg r), s \Rightarrow \neg t \rangle, \langle u, v \Rightarrow \neg w \rangle] \\ & [\langle p, \neg(q \vee \neg r), s \Rightarrow \neg t \rangle, \langle u, \neg v \rangle, \langle u, \neg w \rangle] \\ & [\langle p, \neg q, r, s \Rightarrow \neg t \rangle, \langle u, \neg v \rangle, \langle u, \neg w \rangle] \\ & [\langle p, \neg q, r, \neg s \rangle, \langle p, \neg q, r, \neg t \rangle, \langle u, \neg v \rangle, \langle u, \neg w \rangle] \end{aligned}$$