Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
9 settembre 2004

Prima Parte: **F V** β **V V F V F**

7. Un'interpretazione per l'insieme di formule sotto esame è la seguente: $D^I = \{0,1\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \{0\}$. Quindi $\{\exists x\, p(x), \forall x(\neg p(x) \vee q(x)), \exists x\, \neg q(x)\}$ è soddisfacibile.

8. Per dimostrare che

$$\forall x\, \forall y(r(x,y) \wedge p(x) \Rightarrow \neg p(y)) \models \forall x(p(x) \Rightarrow \neg r(x,x))$$

fissiamo un'interpretazione I tale che $I \models \forall x\, \forall y(r(x,y) \wedge p(x) \Rightarrow \neg p(y))$.

Sia $d \in D^I$ arbitrario tale che $I \models p(d)$. Se fosse $I \models r(d,d)$ avremmo che $I \models r(d,d) \wedge p(d)$. La nostra ipotesi implica che $I \models r(d,d) \wedge p(d) \Rightarrow \neg p(d)$, e quindi $I \models \neg p(d)$, cioè $I \not\models p(d)$, che è una contraddizione. Perciò $I \models \neg r(d,d)$.

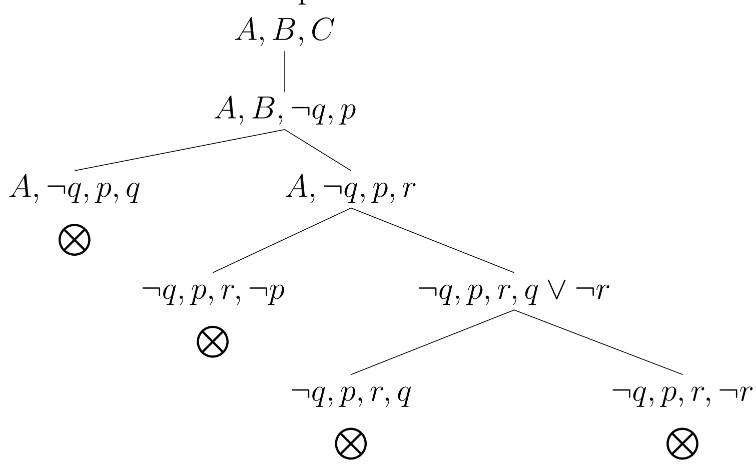
Per l'arbitrarietà di d abbiamo $I \models \forall x(p(x) \Rightarrow \neg r(x,x))$.

9. (i) $\forall x(c(x) \wedge b(x) \Rightarrow \exists y(c(y) \wedge b(y) \wedge f(x,y)))$;

(ii) $\forall x(g(x) \wedge b(x) \Rightarrow \forall y(c(y) \wedge b(y) \Rightarrow i(y,x)))$;

(iii) $\exists x(c(x) \wedge b(x) \wedge \exists y(c(y) \wedge \neg b(y) \wedge f(x,y)) \wedge \forall z(g(z) \Rightarrow i(x,z)))$.

10. Sviluppiamo un tableau con l'insieme di formule alla radice. Indichiamo con A, B e C le tre formule di partenza.



Il tableau mostra che l'insieme di formule è insoddisfacibile.

11.

$$\langle [(p \Rightarrow \neg q \wedge r) \Rightarrow \neg(s \wedge \neg t \Rightarrow \neg(u \vee v))] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \Rightarrow \neg q \wedge r), \neg(s \wedge \neg t \Rightarrow \neg(u \vee v))] \rangle$$
$$\langle [p, \neg(s \wedge \neg t \Rightarrow \neg(u \vee v))], [\neg(\neg q \wedge r), \neg(s \wedge \neg t \Rightarrow \neg(u \vee v))] \rangle$$
$$\langle [p, s \wedge \neg t], [p, u \vee v], [\neg(\neg q \wedge r), s \wedge \neg t], [\neg(\neg q \wedge r), u \vee v] \rangle$$
$$\langle [p, s], [p, \neg t], [p, u, v], [q, \neg r, s \wedge \neg t], [q, \neg r, u \vee v] \rangle$$
$$\langle [p, s], [p, \neg t], [p, u, v], [q, \neg r, s], [q, \neg r, \neg t], [q, \neg r, u, v] \rangle$$