Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
16 marzo 2004 (primo testo)

Prima Parte: **VVV** α ($\neg p$ e $\neg(q \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p))$) **FVVF**

9. Sia A la formula $\forall x \exists y(\neg p(x,y) \land p(y,x))$.

(i) Sia I un'interpretazione con $D^I = \{W, Z\}$ e supponiamo per assurdo che $I \models A$. Abbiamo dunque che

$$I \models \exists y(\neg p(W,y) \land p(y,W)) \quad \text{e} \tag{1}$$

$$I \models \exists y(\neg p(Z,y) \land p(y,Z)) \tag{2}$$

Dato che $\neg p(W,W) \land p(W,W)$ è insoddisfacibile, da (1) segue

$$I \models \neg p(W,Z) \land p(Z,W).$$

Similmente, partendo da (2), si ottiene $I \models \neg p(Z,W) \land p(W,Z)$.
Le ultime due formule sono in contraddizione tra loro e questo completa la dimostrazione.

(ii) Una soluzione si ottiene scegliendo come dominio $\{W, Z, U\}$ e ponendo $p^I = \{(W,Z),(Z,U),(U,W)\}$.
Un'altra soluzione si ottiene scegliendo come dominio $\mathbb{Z}$ (l'insieme dei numeri interi) e ponendo $p^I = \{\,(n,m) : n < m\,\}$.

10. Dimostriamo che la formula è valida: sia I un'interpretazione arbitraria e supponiamo per assurdo che I non soddisfi la formula: allora I soddisfa $\forall x \forall y(r(y,x) \Rightarrow \neg r(x,y))$ (*) e $\neg \forall x \neg r(x,x)$ (**).

(**) implica che per qualche d_0 nel dominio deve essere $I \models r(d_0,d_0)$. Applicando (*) a d_0 si ottiene $I \models r(d_0,d_0) \Rightarrow \neg r(d_0,d_0)$. Allora I deve soddisfare anche $\neg r(d_0,d_0)$, che è assurdo.

11. (i) $\exists x(p(x,b) \land \exists y\, c(x,y))$

(ii) $\exists x(p(x,b) \land \forall y(\neg c(a,y) \Rightarrow c(x,y)))$

(iii) $\exists x(p(x,a) \land c(x,b)) \Rightarrow \forall y(c(y,a) \Rightarrow c(b,y))$

12. Siano A la formula di partenza, B la formula $\forall x(\exists y\, r(x,y) \Rightarrow r(x,x))$, C la formula $\neg \exists z\, r(z,z)$, D la formula $\exists y\, r(a,y) \Rightarrow r(a,a)$ e E la formula $\neg \exists y\, r(a,y)$.

Il tableau (con qualche passaggio condensato) è nella pagina seguente.

$$\neg A$$

$$B, \exists y\, r(a, y), C$$

$$B, r(a, b), C$$

$$D, r(a, b), \neg r(a, a), B, C$$

- $E, r(a, b), \neg r(a, a), B, C$
  - $\neg r(a, b), r(a, b), \neg r(a, a), B, C, E$
  - $\otimes$
- $r(a, a), r(a, b), \neg r(a, a), B, C$
  - $\otimes$

13.

$$[\langle (\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(r \vee (\neg s \wedge t))\rangle]$$
$$[\langle (\neg p \Rightarrow q), \neg(r \vee (\neg s \wedge t))\rangle]$$
$$[\langle (\neg p \Rightarrow q), \neg r, \neg(\neg s \wedge t)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg r, \neg(\neg s \wedge t)\rangle\,, \langle q, \neg r, \neg(\neg s \wedge t)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg r, s\rangle\,, \langle p, \neg r, \neg t\rangle\,, \langle q, \neg r, s\rangle\,, \langle q, \neg r, \neg t\rangle]$$