Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 luglio 2004 (secondo testo)

Prima Parte: **F V V V V** β ($\neg(p \Rightarrow q)$ e $\neg r$) **F V**

8. Sia A la formula $\exists x\ \exists y\ \forall z(\neg p(x,z) \land p(z,y))$. Dimostriamo che A non è soddisfacibile ragionando per assurdo. Sia I un'interpretazione tale che $I \models A$: devono esistere $d_0, d_1 \in D^I$ tali che $I \models \forall z(\neg p(d_0,z) \land p(z,d_1))$. In particolare $I \models \neg p(d_0,d_0) \land p(d_0,d_1)$ e $I \models \neg p(d_0,d_1) \land p(d_1,d_1)$. Dalla prima di queste due formule discende che $I \models p(d_0,d_1)$, mentre la seconda implica che $I \models \neg p(d_0,d_1)$. Abbiamo dunque raggiunto una contraddizione, e questo completa la dimostrazione.

9. Dimostriamo che l'insieme di formule dato non ha come conseguenza logica $\forall x(\neg q(x) \Rightarrow p(x))$. A questo scopo è sufficiente definire un'interpretazione che soddisfi tutte le formule dell'insieme ma non soddisfi $\forall x(\neg q(x) \Rightarrow p(x))$.

La seguente interpretazione I soddisfa a queste condizioni: $D^I = \{0,1\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \emptyset$, $r^I = \{(0,0)\}$.

10. (i) $\forall x(f(x) \Rightarrow \exists y((s(y,I) \lor s(y,F)) \land \neg a(y,x)))$

(ii) $\neg\exists x(s(x,F) \land \forall y(f(y) \Rightarrow a(x,y)))$

(iii) $\exists x(s(x,I) \land \forall y(f(y) \land a(x,y) \Rightarrow \neg a(F,y)))$

11. Siano A la formula di partenza, B la formula $\forall x\ \forall y(r(y,x) \Rightarrow r(x,y))$, C la formula $\neg\exists x\ r(x,a)$, D la formula $\forall y\ r(y,b)$ e E la formula $\forall y(r(y,b) \Rightarrow r(b,y))$. Il tableau (con qualche passaggio condensato) è:

$$\neg A$$

$$\exists x\ \forall y\ r(y,x), B, C$$

$$D, B, C$$

$$r(a,b), E, \neg r(b,a), D, B, C$$

$$r(a,b), r(a,b) \Rightarrow r(b,a), \neg r(b,a), D, B, C, E$$

$$r(a,b), \neg r(a,b), \neg r(b,a), D, B, C, E \qquad\qquad r(a,b), r(b,a), \neg r(b,a), D, B, C, E$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

12.

$$
\begin{gathered}
[\langle \neg\big(\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg(r \vee \neg s \Rightarrow \neg t \vee u)\big)\rangle] \\
[\langle \neg(p \vee q), \neg\neg(r \vee \neg s \Rightarrow \neg t \vee u)\rangle] \\
[\langle \neg p, \neg q, r \vee \neg s \Rightarrow \neg t \vee u\rangle] \\
[\langle \neg p, \neg q, \neg(r \vee \neg s)\rangle, \langle \neg p, \neg q, \neg t \vee u\rangle] \\
[\langle \neg p, \neg q, \neg r, s\rangle, \langle \neg p, \neg q, \neg t\rangle, \langle \neg p, \neg q, u\rangle]
\end{gathered}
$$