

Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
16 marzo 2004 (primo testo)

Prima Parte: **VVV** α ($\neg p$ e $\neg(q \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p))$) **FVVF**

9. Sia A la formula $\forall x \exists y (\neg p(x, y) \wedge p(y, x))$.

(i) Sia I un'interpretazione con $D^I = \{W, Z\}$ e supponiamo per assurdo che $I \models A$. Abbiamo dunque che

$$(1) \quad I \models \exists y (\neg p(W, y) \wedge p(y, W)) \quad \text{e}$$

$$(2) \quad I \models \exists y (\neg p(Z, y) \wedge p(y, Z))$$

Dato che $\neg p(W, W) \wedge p(W, W)$ è insoddisfacibile, da (1) segue

$$I \models \neg p(W, Z) \wedge p(Z, W).$$

Similmente, partendo da (2), si ottiene $I \models \neg p(Z, W) \wedge p(W, Z)$.

Le ultime due formule sono in contraddizione tra loro e questo completa la dimostrazione.

(ii) Una soluzione si ottiene scegliendo come dominio $\{W, Z, U\}$ e ponendo $p^I = \{(W, Z), (Z, U), (U, W)\}$.

Un'altra soluzione si ottiene scegliendo come dominio \mathbb{Z} (l'insieme dei numeri interi) e ponendo $p^I = \{(n, m) : n < m\}$.

10. Dimostriamo che la formula è valida: sia I un'interpretazione arbitraria e supponiamo per assurdo che I non soddisfi la formula: allora I soddisfa $\forall x \forall y (r(y, x) \Rightarrow \neg r(x, y))$ (*) e $\neg \forall x \neg r(x, x)$ (**).

(**) implica che per qualche d_0 nel dominio deve essere $I \models r(d_0, d_0)$.

Applicando (*) a d_0 si ottiene $I \models r(d_0, d_0) \Rightarrow \neg r(d_0, d_0)$. Allora I deve soddisfare anche $\neg r(d_0, d_0)$, che è assurdo.

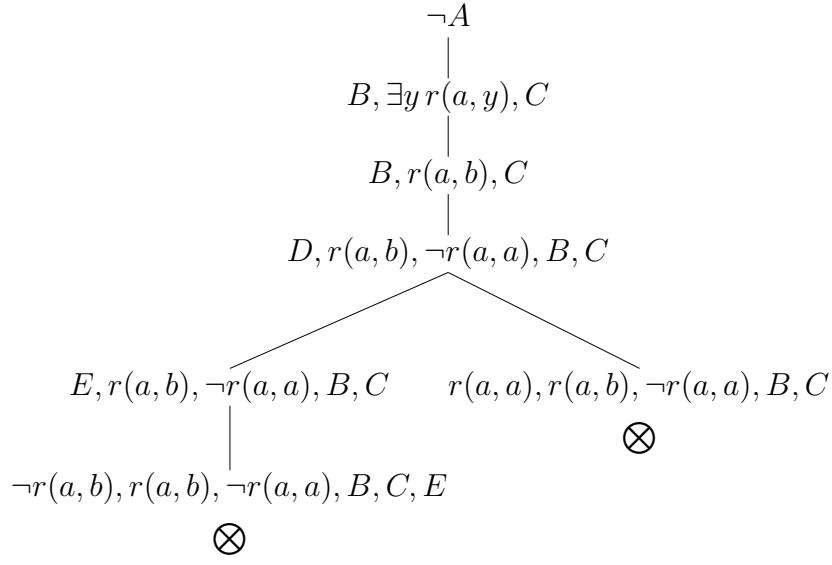
11. (i) $\exists x (p(x, b) \wedge \exists y c(x, y))$

(ii) $\exists x (p(x, b) \wedge \forall y (\neg c(a, y) \Rightarrow c(x, y)))$

(iii) $\exists x (p(x, a) \wedge c(x, b)) \Rightarrow \forall y (c(y, a) \Rightarrow c(b, y))$

12. Siano A la formula di partenza, B la formula $\forall x (\exists y r(x, y) \Rightarrow r(x, x))$, C la formula $\neg \exists z r(z, z)$, D la formula $\exists y r(a, y) \Rightarrow r(a, a)$ e E la formula $\neg \exists y r(a, y)$.

Il tableau (con qualche passaggio condensato) è nella pagina seguente.



13.

$$\begin{aligned}
& [\langle (\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(r \vee (\neg s \wedge t)) \rangle] \\
& [\langle (\neg p \Rightarrow q), \neg(r \vee (\neg s \wedge t)) \rangle] \\
& [\langle (\neg p \Rightarrow q), \neg r, \neg(\neg s \wedge t) \rangle] \\
& [\langle p, \neg r, \neg(\neg s \wedge t) \rangle, \langle q, \neg r, \neg(\neg s \wedge t) \rangle] \\
& [\langle p, \neg r, s \rangle, \langle p, \neg r, \neg t \rangle, \langle q, \neg r, s \rangle, \langle q, \neg r, \neg t \rangle]
\end{aligned}$$