Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
6 aprile 2004 (primo testo)

Prima Parte: **F** β ($\neg(p \wedge q)$ e r) **FFVVVF**

7.

$$\{\forall x\ \neg(p(x) \Rightarrow \exists y(r(a,y) \wedge p(y))), \neg(p(a) \Rightarrow \exists y(r(a,y) \wedge p(y))),$$
$$p(a), \neg\exists y(r(a,y) \wedge p(y)), \neg(r(a,a) \wedge p(a)), \neg r(a,a)\}$$

8. Dimostriamo che la formula è insoddisfacibile. Sia I un'interpretazione qualsiasi e supponiamo per assurdo che

$$I \models \exists x\ \forall y\ r(x,y) \wedge \exists x\ \forall y\ \neg r(y,x).$$

Dato che $I \models \exists x\ \forall y\ r(x,y)$ e $I \models \exists x\ \forall y\ \neg r(y,x)$, esistono elementi d_0 e d_1 del dominio di I tali che $I \models \forall y\ r(d_0,y)$ (*) e $I \models \forall y\ \neg r(y,d_1)$ (**). In particolare (*) implica che $I \models r(d_0,d_1)$, mentre (**) implica che $I \models \neg r(d_0,d_1)$. Questa contraddizione completa la dimostrazione.

9. (i) $\forall x(c(x) \Rightarrow \neg\exists y(g(y) \wedge a(x,y)))$

(ii) $\forall x(c(x) \vee g(x) \Rightarrow \exists y\ p(y,x))$ oppure

$$\forall x(c(x) \Rightarrow \exists y\ p(y,x)) \wedge \forall x(g(x) \Rightarrow \exists y\ p(y,x)),$$

che è logicamente equivalente alla precedente.

(iii) $\forall x(c(x) \wedge \neg\exists y p(y,x) \Rightarrow \forall z\ \neg a(z,x))$

10. Il tableau per A ha un solo ramo aperto, la cui foglia è etichettata dall'insieme di letterali $\{p, s, q, \neg r\}$. Quindi un'interpretazione che soddisfa A (in realtà l'unica) è v definita da $v(p) = V$, $v(q) = V$, $v(r) = F$, $v(s) = V$.

11.

$$\langle[(\neg p \Rightarrow \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(q \vee r \Rightarrow p \wedge \neg s) \wedge \neg(r \wedge s)]\rangle$$
$$\langle[\neg p \Rightarrow \neg q \wedge \neg r], [\neg(q \vee r \Rightarrow p \wedge \neg s)], [\neg(r \wedge s)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg q \wedge \neg r], [q \vee r], [\neg(p \wedge \neg s)], [\neg r, \neg s)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg q], [p, \neg r], [q, r], [\neg p, s)], [\neg r, \neg s)]\rangle$$