Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 settembre 2004

Prima Parte: **F V F F V** γ **V V F**

7. L'insieme di formule in esame è insoddisfacibile. Per dimostrarlo supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione che rende vera ognuno dei sue membri.

Dato che $I \models \exists x(p(x) \land \neg q(x))$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I \models p(d_0) \land \neg q(d_0)$.

Dato che $I \models \forall x(p(x) \Rightarrow \forall y\ r(x,y))$ abbiamo che $I \models \forall y\ r(d_0,y)$ e quindi $I \models r(d_0,c)$.

D'altra parte, dato che $I \models \forall x(q(x) \lor \neg r(x,c))$, abbiamo $I \models \neg r(d_0,c)$.

Questa situazione è impossibile e la nostra dimostrazione è completa.

8. Un'interpretazione che non soddisfa la formula sotto esame è la seguente: $D^I = \{0\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \emptyset$, $r^I = \emptyset$.

Quindi la formula non è valida.

9. (i) $\forall x(m(x) \Rightarrow \exists y(s(y) \land \neg u(x,y) \land a(x,y)))$;

(ii) $\exists x(s(x) \land \forall y(m(y) \land u(y,x) \Rightarrow a(y,x)))$;

(iii) $\forall x(\neg m(x) \Rightarrow \forall y(s(y) \Rightarrow a(x,y)) \lor \forall y(s(y) \Rightarrow \neg a(x,y)))$.

10. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con A la formula di partenza e con B e C le formule $\forall x(p(x) \Rightarrow \forall y\, r(x,y))$ e $\neg\exists z\, r(z,z)$. Il tableau inizia nel seguente modo:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg A & \\
 & | & \\
 & B, p(a) \lor p(b), C & \\
 \swarrow & & \searrow \\
B, p(a), C & & B, p(b), C \\
| & & | \\
B, p(a), \neg r(a,a), C & & B, p(b), \neg r(b,b), C
\end{array}
$$

Per ragioni di spazio sviluppiamo solo il ramo di sinistra (quello di destra è analogo, con b al posto di a), indicando con D la formula $p(a) \Rightarrow \forall y\, r(a,y)$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & B, p(a), \neg r(a,a), C & \\
 & | & \\
 & D, p(a), \neg r(a,a), C, B & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg p(a), p(a), \neg r(a,a), C, B & & \forall y\, r(a,y), p(a), \neg r(a,a), C, B \\
\otimes & & | \\
 & & r(a,a), p(a), \neg r(a,a), C, B, \forall y\, r(a,y) \\
 & & \otimes
\end{array}
$$

Il tableau mostra che A è valida.

11.

$$[\langle (p \Rightarrow q \vee \neg r) \vee \neg (s \Rightarrow \neg t) \Rightarrow u \wedge (v \Rightarrow \neg w) \rangle]$$
$$[\langle \neg ((p \Rightarrow q \vee \neg r) \vee \neg (s \Rightarrow \neg t)) \rangle , \langle u \wedge (v \Rightarrow \neg w) \rangle]$$
$$[\langle \neg (p \Rightarrow q \vee \neg r), s \Rightarrow \neg t \rangle , \langle u, v \Rightarrow \neg w \rangle]$$
$$[\langle p, \neg (q \vee \neg r), s \Rightarrow \neg t \rangle , \langle u, \neg v \rangle , \langle u, \neg w \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, r, s \Rightarrow \neg t \rangle , \langle u, \neg v \rangle , \langle u, \neg w \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, r, \neg s \rangle , \langle p, \neg q, r, \neg t \rangle , \langle u, \neg v \rangle , \langle u, \neg w \rangle]$$