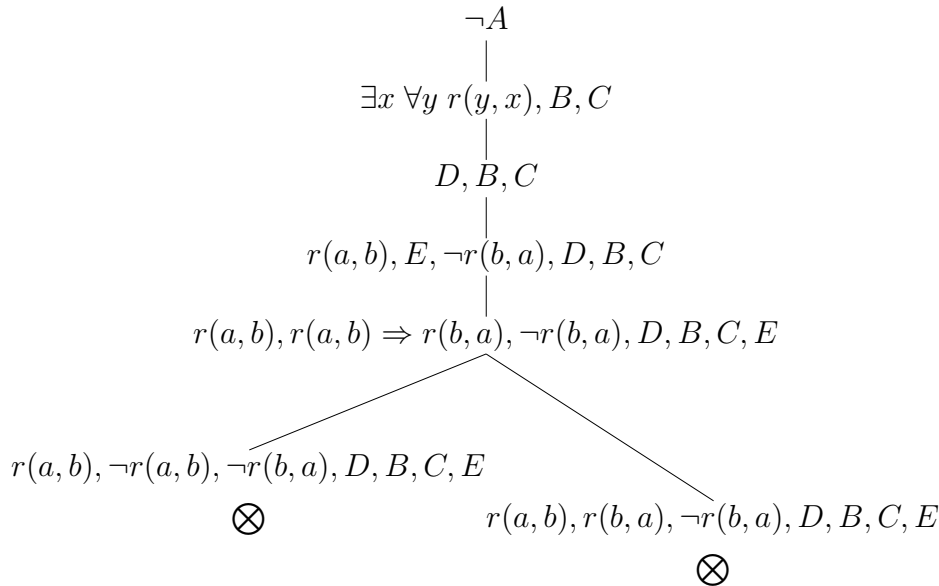


Soluzioni della prova scritta di Elementi di Logica Matematica
14 luglio 2004 (secondo testo)

Prima Parte: **F V V V V** β ($\neg(p \Rightarrow q)$ e $\neg r$) **F V**

8. Sia A la formula $\exists x \exists y \forall z (\neg p(x, z) \wedge p(z, y))$. Dimostriamo che A non è soddisfacibile ragionando per assurdo. Sia I un'interpretazione tale che $I \models A$: devono esistere $d_0, d_1 \in D^I$ tali che $I \models \forall z (\neg p(d_0, z) \wedge p(z, d_1))$. In particolare $I \models \neg p(d_0, d_0) \wedge p(d_0, d_1)$ e $I \models \neg p(d_0, d_1) \wedge p(d_1, d_1)$. Dalla prima di queste due formule discende che $I \models p(d_0, d_1)$, mentre la seconda implica che $I \models \neg p(d_0, d_1)$. Abbiamo dunque raggiunto una contraddizione, e questo completa la dimostrazione.
9. Dimostriamo che l'insieme di formule dato non ha come conseguenza logica $\forall x (\neg q(x) \Rightarrow p(x))$. A questo scopo è sufficiente definire un'interpretazione che soddisfi tutte le formule dell'insieme ma non soddisfi $\forall x (\neg q(x) \Rightarrow p(x))$.
 La seguente interpretazione I soddisfa a queste condizioni: $D^I = \{0, 1\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \emptyset$, $r^I = \{(0, 0)\}$.
10. (i) $\forall x (f(x) \Rightarrow \exists y ((s(y, I) \vee s(y, F)) \wedge \neg a(y, x)))$
 (ii) $\neg \exists x (s(x, F) \wedge \forall y (f(y) \Rightarrow a(x, y)))$
 (iii) $\exists x (s(x, I) \wedge \forall y (f(y) \wedge a(x, y) \Rightarrow \neg a(F, y)))$
11. Siano A la formula di partenza, B la formula $\forall x \forall y (r(y, x) \Rightarrow r(x, y))$, C la formula $\neg \exists x r(x, a)$, D la formula $\forall y r(y, b)$ e E la formula $\forall y (r(y, b) \Rightarrow r(b, y))$. Il tableau (con qualche passaggio condensato) è:



12.

$$\begin{aligned} & [\langle \neg(\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg(r \vee \neg s \Rightarrow \neg t \vee u)) \rangle] \\ & [\langle \neg(p \vee q), \neg\neg(r \vee \neg s \Rightarrow \neg t \vee u) \rangle] \\ & [\langle \neg p, \neg q, r \vee \neg s \Rightarrow \neg t \vee u \rangle] \\ & [\langle \neg p, \neg q, \neg(r \vee \neg s) \rangle, \langle \neg p, \neg q, \neg t \vee u \rangle] \\ & [\langle \neg p, \neg q, \neg r, s \rangle, \langle \neg p, \neg q, \neg t \rangle, \langle \neg p, \neg q, u \rangle] \end{aligned}$$