Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
21 settembre 2004

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta.

1. Se U è un insieme di Hintikka di formule proposizionali tale che $\neg(p \vee q \Rightarrow r) \in U$ e $\neg q \in U$, allora:

$\neg p \in U$;	**V** | **F**	1pt
$r \notin U$.	**V** | **F**	1pt

2. $\forall x\, A \Rightarrow B \leftrightarrow \forall x(A \Rightarrow B)$, se x non è libera in B. **V** | **F** 1pt

3. Ogni formula proposizionale è logicamente equivalente ad una disgiunzione di congiunzioni di formule atomiche. **V** | **F** 1pt

4. Se I è un'interpretazione tale che per qualche simbolo di costante a si ha $I \models p[a]$ allora $I \models \exists x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

5. $\neg\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x, y))$ è una α-formula, una β-formula, una γ-formula o una δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

6. Siano A e B formule valide. Allora (le conclusioni corrette possono essere nessuna, una o più d'una):

$A \models B$;	**V** | **F**	1pt
$\neg A \models C$ per ogni formula C;	**V** | **F**	1pt
se $D \models \neg B$ allora D è soddisfacibile.	**V** | **F**	1pt

SECONDA PARTE

7. L'insieme di formule 4pt

$$\left\{\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)), \forall x(p(x) \Rightarrow \forall y\, r(x, y)), \forall x(q(x) \vee \neg r(x, c))\right\}$$

è soddisfacibile? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

8. La formula 4pt

$$\forall x \forall y(p(x) \wedge q(y) \Rightarrow r(x, y)) \wedge \neg\exists x(\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \Rightarrow \forall x(\exists y r(x, y) \vee \exists y r(y, x))$$

è valida? Giustificate la vostra risposta. (Utilizzate il retro del foglio)

9. Sia $\{m, s, u, a\}$ un linguaggio dove m e s sono simboli di relazione unari, e u e a sono simboli di relazione binari. Interpretando $m(x)$ come "x è un musicista", $s(x)$ come "x è uno strumento", $u(x, y)$ come "x suona y", $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) ogni musicista ama uno strumento che non suona; 3pt

(ii) qualche strumento è amato da tutti i musicisti che lo suonano; 3pt

(iii) chi non è musicista non ama nessuno strumento, oppure li ama tutti. 3pt

10. Utilizzate il metodo dei tableau per mostrare che la formula 5pt

$$\forall x(p(x) \Rightarrow \forall y\, r(x, y)) \wedge (p(a) \vee p(b)) \Rightarrow \exists z\, r(z, z)$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

11. Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(p \Rightarrow q \vee \neg r) \vee \neg(s \Rightarrow \neg t) \Rightarrow u \wedge (v \Rightarrow \neg w).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)