# Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
## 14 luglio 2004

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

### PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta e riempite gli spazi vuoti.

**1.** $\neg(p \vee (q \Rightarrow r))$ è una $\alpha$-formula o una $\beta$-formula? $\boxed{\alpha \mid \beta}$ 1pt
I suoi ridotti sono ...................... e ...................... 1pt

**2.** Siano $A, B, C$ formule tali che $A \models B$ e $C$ è valida. Allora (le conclusioni corrette possono essere nessuna, una o più d'una):
$B \Rightarrow \neg C \models \neg A$; **V** | **F** 1pt
$A \vee \neg C \models B$. **V** | **F** 1pt

**3.** Se $U$ è un insieme di Hintikka di formule proposizionali, $p \Rightarrow q \wedge r \in U$ e $p \in U$ allora $q \in U$. **V** | **F** 2pt

**4.** Se la formula $A$ è valida allora per ogni formula $B$, $\neg(B \Rightarrow A)$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

**5.** $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$ è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

**6.** $p \Rightarrow q \wedge p$ è logicamente equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$. **V** | **F** 1pt

**7.** $\forall x\, p(x) \Rightarrow \forall x\, q(x) \leftrightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$. **V** | **F** 1pt

### SECONDA PARTE

**8.** La formula 4pt

$$\exists x\, \forall y\, r(x,y) \wedge \exists x\, \forall y\, \neg r(y,x)$$

è soddisfacibile? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

**9.** L'insieme di formule 4pt

$$\{\exists x\, p(x), \exists x\, q(x), \forall x(\neg p(x) \Rightarrow r(x,x)), \forall x(q(x) \Rightarrow \neg r(x,x))\}$$

ha come conseguenza logica $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

**10.** Sia $\{W, L, h, p, f\}$ un linguaggio dove $W$ e $L$ sono simboli di costante, $h$ è un simbolo di relazione unario, e $p$ e $f$ sono simboli di relazione binari. Interpretando $W$ e $L$ come "Windows" e "Linux", $h(x)$ come "$x$ è un hardware", $p(x, y)$ come "$x$ è un programma per $y$", $f(x, y)$ come "$x$ funziona su $y$", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) su ogni hardware c'è un programma per Linux o Windows che non funziona; 3pt

(ii) nessun programma per Windows funziona su tutti gli hardware; 3pt

(iii) qualche programma per Linux funziona solo su hardware su cui Windows non funziona. 3pt

**11.** Utilizzate il metodo dei tableau per dimostrare che la formula 5pt

$$\forall x\, \forall y (r(x, y) \Rightarrow r(y, x)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(x, y) \Rightarrow \exists x\, r(c, x)$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

**12.** Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \vee q \Rightarrow r \vee \neg s) \Rightarrow \neg(t \wedge u).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)

# Prova scritta di Elementi di Logica Matematica
## 14 luglio 2004

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Ogni esercizio è composto da alcune domande, e per ogni domanda è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto. L'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale.

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

**PRIMA PARTE**

Barrate la risposta che ritenete corretta e riempite gli spazi vuoti.

**1.** $p \vee q \Rightarrow p$ non è logicamente equivalente a $\neg p \Rightarrow \neg q$. **V** | **F** 1pt

**2.** $p \wedge (p \Rightarrow \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (p \Rightarrow r)$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

**3.** Siano $A, B, C$ formule tali che $A$ è valida e $B \models C$. Allora (le conclusioni corrette possono essere nessuna, una o più d'una):

$\neg A \vee B \models C$; **V** | **F** 1pt

$C \Rightarrow \neg A \models \neg B$. **V** | **F** 1pt

**4.** Se la formula $A$ è insoddisfacibile allora per ogni formula $B$, $\neg(A \Rightarrow B)$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

**5.** $\neg((p \Rightarrow q) \wedge r))$ è una $\alpha$-formula o una $\beta$-formula? $\alpha$ | $\beta$ 1pt

I suoi ridotti sono ..................... e ...................... 1pt

**6.** $\exists x\, p(x) \Rightarrow \exists x\, q(x) \leftrightarrow \exists x(p(x) \Rightarrow q(x))$. **V** | **F** 1pt

**7.** Se $U$ è un insieme di Hintikka di formule proposizionali, $p \vee q \Rightarrow r \in U$ e $\neg r \in U$ allora $\neg p \in U$. **V** | **F** 2pt

**SECONDA PARTE**

**8.** La formula 4pt

$$\exists x\, \exists y\, \forall z(\neg p(x,z) \wedge p(z,y))$$

è soddisfacibile? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

**9.** L'insieme di formule 4pt

$$\{\exists x\, p(x), \exists x\, \neg q(x), \forall x(p(x) \Rightarrow r(x,x)), \forall x(q(x) \Rightarrow \neg r(x,x))\}$$

ha come conseguenza logica $\forall x(\neg q(x) \Rightarrow p(x))$? Giustificate la vostra risposta. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

**10.** Sia $\{I, F, f, s, a\}$ un linguaggio dove $I$ e $F$ sono simboli di costante, $f$ è un simbolo di relazione unario, e $s$ e $a$ sono simboli di relazione binari. Interpretando $I$ e $F$ come "Italia" e "Francia", $f(x)$ come "$x$ è un film", $s(x, y)$ come "$x$ è uno spettatore del paese $y$", $a(x, y)$ come "$x$ ama $y$", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) ogni film non è amato da uno spettatore italiano o francese; 3pt

(ii) nessuno spettatore francese ama tutti i film; 3pt

(iii) qualche spettatore italiano ama solo film che la Francia non ama. 3pt

**11.** Utilizzate il metodo dei tableau per dimostrare che la formula 5pt

$$\exists x\, \forall y\, r(y, x) \land \forall x\, \forall y (r(y, x) \Rightarrow r(x, y)) \Rightarrow \exists x\, r(x, a)$$

è valida. (Svolgete questo esercizio sul retro del foglio)

**12.** Usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(p \lor q) \Rightarrow \neg(r \lor \neg s \Rightarrow \neg t \lor u)\big).$$

(Utilizzate lo spazio qui sotto)