ESAME 16 GIUGNO 2022

1. Si enunci il Teorema di Myhill-Nerode e si dimostri formalmente la parte (2) $\rightarrow$ (3). Si definiscano le principali relazioni necessarie (ad esempio R_L)

2. Si dimostri (partendo dalle funzioni di base e usando opportunamente le regole di composizione e ricorsione primitiva) che la funzione $f(x) = 2^x \cdot x!$ è primitiva ricorsiva.

3. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se A è produttivo, allora non è ricorsivamente enumerabile.

4. Si dica (motivando la risposta) se $\{x \in \mathbb{N} : (\forall y < x)(\varphi_x(y)\downarrow)\}$ è estensionale

5. Si dia con precisione la definizione di riduzione tra problemi impiegata nello studio delle classi di complessità computazionale

6. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi A_i (fissato un certo $i \in \mathbb{N}$) e A siano (o meno) regolari o liberi dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0,1,2\}^* : \ |v| \leq i \wedge \sharp(0,v) + \sharp(1,v) = \sharp(2,v) \ \right\}$$

   Mentre $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ (ove $\sharp(c,v)$ indica il numero di occorrenze del carattere c nella stringa v).

7. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) = 9y)\} \\ C & = & \{\langle x,y \rangle : W_x \subseteq E_y\} \end{array}$$

ESAME 14 LUGLIO 2022

1. Si definisca la nozione di grammatica di tipo 1, si dia la corrispondente definizione di linguaggio generato $L(G)$ e si mostri che il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si enunci e dimostri il Teorema relativo all' "Halting Problem" (e il lemma necessario per la sua dimostrazione).

3. Si definisca la classe P e si dica formalmente cosa significhi essere P completo. Si fornisca un esempio di problema P completo.

4. Si dice se la seguente funzione è ricorsiva e/o primitiva ricorsiva

$$\begin{cases} f(x,0) & = & 0 \\ f(0,y) & = & 0 \\ f(x+1,y+1) & = & y + f(x,y) \end{cases}$$

   Quanto vale $f(100,10)$?

5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se, una volta fissato un numero intero i, il seguente insieme A_i sia (o meno) regolare o libero dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0\}^* : \ v \text{ è la codifica unaria di un numero primo minore di } i \ \right\}$$

   Nel caso A_i fosse regolare si fornisca l'automa minimo per A_7.

   Si studi dunque l'insieme $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$.

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq 3)(\varphi_x(2y+1) = y^2)\} \\ C & = & \{x : W_x \cap E_x \text{ è ricorsivo}\} \\ D & = & \{x : (\forall y > x)(\varphi_y(x) \downarrow \wedge \varphi_y(x) > 2y)\} \end{array}$$

ESAME 13 SETTEMBRE 2022

1. Si elenchino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto e si dimostri che non sono chiusi per intersezione.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se A è produttivo, allora (1) non è r.e. e (2) $\bar{A}$ è infinito

3. Si definiscano con precisione le classi $NTIME(f(n))$, NP e $NEXPTIME$. Si mostri dunque che $NP \subseteq EXPTIME$

4. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme è o meno estensionale:
$$A = \{x : \varphi_x(2x) \uparrow \vee (\exists y > x)(\varphi_y(x) = x)\}$$

5. Si collochi il seguente linguaggio nella gearchia di Chomsky (in particolare, se non fosse regolare o CF lo si dimostri formalmente, se fosse regolare si fornisca l'automa minimo, se fosse CF una grammatica che lo genera):
$$B = \left\{0^{2m}1^n0^{3m} : m, n \in \mathbb{N}\right\} \circ \{1^n : n \in \mathbb{N}\}$$

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):
$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : (\exists y > x)(\varphi_x(y^2) = 2(y!))\} \\ D & = & \{x : |W_x| \text{ è un numero primo}\} \end{array}$$

Traccia della soluzione:
4) La seconda condizione (in or) è sempre verificata (pensate alla tecnica del padding). Dunque $A = \mathbb{N}$, estensionale.
5) B non è regolare. Per applicare il PL, dato $n \in \mathbb{N}$ usate ad esempio $z = 0^{2n}1^n0^{3n}$. B è CF (trovate la grammatica).
6) C è r.e. completo. Per r.e. pensate a una computazione con dove-tail che cerca y, per la completezza nella riduzione usate $2(\sqrt{b}!)$. D è produttivo cosí come il suo complementare. Per le riduzioni usate ad esempio $b \leq 1 \wedge a \in K$ e $b \leq 1 \vee a \in K$.

ESAME SPECIALE 16/11/2022 (Tempo: 2 ore)

1. Si dia la definizione di grammatica e in particolare la definizione per le grammatiche CF, di tipo 1 e di tipo 0. Si illustri il diagramma di Venn dei linguaggi generati con le tre tipologie di grammatiche.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se un insieme A è produttivo, allora (1) A non è r.e. e (2) $\bar{A}$ è infinito

3. Si collochi il seguente linguaggio nella gerarchia di Chomsky (in particolare, se non fosse regolare o CF lo si dimostri formalmente, se fosse regolare si fornisca un automa che lo accetta, se fosse CF si fornisca una grammatica che lo genera):

$$B = \{v \in \{0, 1, 2\}^* : v \text{ inizia con 2 e contiene lo stesso numero di 0 e 1}\}$$

   (ad esempio elementi di B sono: $2, 222010101, 200221120122210, \ldots$)

4. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : \varphi_x(0) = 100 \wedge \varphi_x(1) = 10 \wedge \varphi_x(2) = 1\} \\ D & = & \{x : |W_x| \leq 10\} \end{array}$$

ESAME 17 GENNAIO 2023

1. Si enunci e dimostri il teorema relativo alla equivalenza tra i linguaggi accettati dai formalismi DFA e NFA
2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se A è produttivo, allora $\bar{A}$ è infinito.
3. Si dica (motivando la risposta) se $\{x \in \mathbb{N} : (\forall y < x)(\varphi_x(y) \downarrow)\}$ è estensionale
4. Si dimostri che $NP \subseteq PSPACE$
5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi A_i (fissato un certo $i \in \mathbb{N}$) e infine l'insieme A siano (o meno) regolari o liberi dal contesto.

   $$A_i = \left\{0^a 1^b 2^c : a \leq i, b \leq i, c = a + b\right\}$$

   Mentre $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$
6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

   $$\begin{array}{lcl} B & = & \{x : (\forall y \leq 1000)(\varphi_x(y^2) = y + 1)\} \\ C & = & \{x : E_x = K\} \end{array}$$

ESAME 16 FEBBRAIO 2023

1. Si enunci e dimostri il pumping lemma per i linguaggi regolari
2. Si mostri che
$$A = \left\{1^a 0^b 1^b : a > 0, b \geq 0\right\}$$
non è regolare
3. Si dica con precisione cosa significa essere r.e. completo e si mostri che K lo è
4. Si completi l'enunciato e lo si dimostri: $SPACE(f(n)) \subseteq TIME(\qquad)$
5. Si dimostri che il seguente linguaggio è regolare
$$B = \left\{1^a 0^b 1^c : a > 0, b \geq 0, c \geq 0, a \,\texttt{mod}\, 3 = b \,\texttt{mod}\, 2\right\}$$
6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):
$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : (\forall y > 1000)(\varphi_x(y)\uparrow)\} \\ D & = & \{x : (\forall y > 1000)(\varphi_y(x)\uparrow)\} \\ E & = & \{x : K \subseteq W_x\} \end{array}$$

ESAME 17 MAGGIO 2023

1. Si enunci e si dimostri il principale risultato di equivalenza tra automi a stati finiti deterministici e non-deterministici
2. Si elenchino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto e si dimostri che non sono chiusi per intersezione.
3. Si dica con precisione cosa significa essere produttivo e si dimostri (in una riga, usando la definizione appena data) che un insieme produttivo non può essere ricorsivamente enumerabile
4. Si dimostri che il seguente linguaggio non è regolare

$$A = \left\{1^a 0^b 1^c 0^d 1^e : a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e > 0, b = 2 \cdot d\right\}$$

5. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \varphi_x(0) = 1 \wedge \varphi_x(1) = 10 \wedge \varphi_x(2) = 100\} \\ C & = & \{x : W_x = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}\} \end{array}$$

   Per chiarezza, l'insieme nella definizione di C è l'insieme dei numeri primi.

6. Si definiscano le classi di complessità P ed NP e si dimostri che $P \subseteq NP$.

ESAME 15 GIUGNO 2023

1. Si enunci e si dimostri il principale risultato di equivalenza tra automi a stati finiti deterministici e non-deterministici

2. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva:

$$\begin{cases} f(0,y) &= 1 \\ f(x,0) &= 1 \\ f(x+1,y+1) &= 2\cdot f(x,y) \end{cases}$$

3. Si dica con precisione cosa significa essere produttivo e si dimostri (in una riga, usando la definizione appena fornita) che un insieme produttivo non può essere ricorsivamente enumerabile

4. Che cosa contiene la classe $TIME(f(n))$? Che rapporti ci sono tra $TIME(f(n))$ e $TIME(2\cdot f(n))$?

5. Si dimostri che il seguente insieme A non è regolare ma è libero dal contesto:
$$A = \left\{1^a0^b2^c0^d1^e : a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e > 0, a+b = d+e\right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B &=& \{x : \varphi_x(x) = x\} \\ C &=& \{x : (\forall y\in\mathbb{N})(\varphi_x(y) = 1 \text{ se } y \text{ è un numero primo}, \varphi_x(y) = 0 \text{ altrimenti})\} \end{array}$$

ESAME 18 LUGLIO 2023

1. Si dimostri che i linguaggi regolari sono chiusi per unione.
2. Si dia la definizione di grammatica di tipo 1 e di linguaggi di tipo 1 e si mostri che per tali grammatiche il test $x \in L(G)$ è decidibile.
3. Si *dimostri* che $\bar{K}$ non è ricorsivamente enumerabile.
4. Dato $k \in \mathbb{N}$, fissato, che cosa contiene la classe $NTIME(n^k)$? Che rapporti ci sono tra $NTIME(n^k)$ e $PSPACE$?
5. Si mostri che A è regolare e B non è libero dal contesto.

$$\begin{array}{rcl} A & = & \left\{1^a 0^b 2^c : a, b, c, \in \mathbb{N}, c \equiv_3 a \cdot b\right\} \\ B & = & \left\{1^a 0^b 2^c : a, b, c, \in \mathbb{N}, c = a \cdot b\right\} \end{array}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \left\{x : \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(2x+4) = x^2\right\} \\ D & = & \{\langle x, y\rangle : \varphi_x(0) \uparrow \wedge (\forall z > y)(\varphi_x(z) = p_z))\} \\ E & = & \{x : (\exists y > x)(E_y = K)\} \end{array}$$

Dove per p_z si intente lo z-esimo numero primo $(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots)$

ESAME 12 SETTEMBRE 2023

1. Si definiscano le relazioni R_M e R_L e si mostri che: se L è regolare e M è un DFA tale che $L(M) = L$, allora R_M è un raffinamento di R_L.
2. Sia G una grammatica CF tale che $\varepsilon \notin L(G)$. Si mostri come sia possibile ottenere una grammatica G' priva di ε-produzioni tale che $L(G) = L(G')$.
3. Si dia la definizione dell'insieme K. Considerando la enumerazione usata nel corso, si mostrino due indici a e b tali che $a \in K$ e $b \notin K$
4. Si definiscano le classi P e NP. Si provi dunque che $P \subseteq NP$.
5. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \left\{1^a 0^b 2^c 3^d : a, b, c, d \in \mathbb{N}, (a = b \wedge c = d) \vee (a = d \wedge b = c)\right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{aligned} B &= \left\{x : \varphi_x(x^2 + 2x) = x\right\} \\ C &= \{x : (\forall z < 10)(\varphi_x(z) \uparrow) \wedge \varphi_x(10) = 3\} \end{aligned}$$

ESAME 22 GENNAIO 2024

1. Si enuncino e dimostrino le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari.
2. Sia G una grammatica di tipo 1 e x una stringa sullo stesso alfabeto. Si mostri che il test $x \in L(G)$ è decidibile.
3. Si definisca la nozione "insieme produttivo". Si mostri dunque che se A è produttivo allora (1) non è r.e., (2) ammette un sottoinsieme r.e. infinito, e (3) ammette un sottoinsieme ricorsivo.
4. Si definiscano le classi $PSPACE$ e NP. Si provi dunque che $NP \subseteq PSPACE$.
5. Si collochi opportunamente il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky (in particolare, se è regolare, lo si dimostri, se non lo è lo si dimostri, se è CF lo si dimostri, se non è CF lo si dimostri, ...)

$$A = \left\{1^a 0^b 2^c : \text{se } b \text{ è pari allora } a = c; \text{ se } b \text{ è dispari, allora } a \text{ è pari e } c = 4\right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{aligned} B &= \{x : (\forall y > 0)(\varphi_x(y) = \lceil \log_2 y \rceil)\} \\ C &= \{\langle x, y \rangle : E_x = E_y\} \end{aligned}$$

Nel caso di B è gradita la definizione in dettaglio una funzione primitiva ricorsiva ausiliaria opportuna a completare la dimostrazione.

ESAME 19 FEBBRAIO 2024

1. Dato un DFA M si definisca la relazione R_M. Dato un linguaggio L si definisca la relazione R_L. Si dimostri che se L è un linguaggio regolare allora R_L è di indice finito.

2. Si diano le definzioni di insieme ricorsivo e di insieme ricorsivamente enumerabile. Si dimostri che un insieme A è ricorsivo se e solo se sia A che $\bar{A}$ sono ricorsivamente enumerabili

3. Relativamente alla enumerazione delle MdT vista a lezione, si dica (spiegando) se $8 \in K$ o meno.

4. Si definisca in dettaglio la relazione di riduzione tra classi di complessità computazionale. Si mostri dunque che la relazione non è antisimmetrica.[1].

5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi A_i (fissato un certo $i \in \mathbb{N}$) e A siano (o meno) regolari

   $$A_i = \left\{ v \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} |v| \leq i \wedge \\ v \text{ letto come numero binario è maggiore o uguale a } i \end{array} \right\}$$

   Dove $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

   $$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \varphi_x(0) = 0 \wedge (\exists y > 0)(\varphi_x(y) = y)\} \\ C & = & \{x : W_x = \{0,2,4,6,8\}\} \end{array}$$

[1] Ovvero che esistono due problemi A e B diversi tra loro per cui $A \leq B$ e $B \leq A$

ESAME 16 GIUGNO 2024

1. Dato un DFA M si definisca la relazione R_M. Dato un linguaggio L si definisca la relazione R_L. Si dimostri che se L è un linguaggio regolare allora R_L è di indice finito. Si definisca poi un DFA a partire da R_L e si discuta brevemente il suo significato.

2. Si definisca l'insieme K. Si *dimostri* dunque (a) che non è ricorsivo, e (b) che è r.e. completo.

3. Si usi il Teorema di Rice per dire "qualcosa" sull'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = \emptyset \vee W_x = \mathbb{N}\}$$

4. Si dimostri che il seguente linguaggio (a) non è regolare e (b) è CF.

$$B = \big\{v \in \{0,1\}^* : \ v \text{ è palindroma oppure } v \text{ inizia con } 000 \ \big\}$$

5. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : (\exists y \geq 19062024)(\varphi_x(y) \in \{18, \ldots, 30\})\} \\ D & = & \{x : W_x \cap E_x = \{10\}\} \end{array}$$

6. Si consideri il seguente problema: Sono dati in input n numeri interi: $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$. I nuomeri possono essere positivi, negativi, 0, e non necessariamente tutti diversi. Si vuole determinare se esiste una partizione di quei numeri in 3 gruppi in modo tale che la somma dei numeri in ciascuno dei 3 gruppi faccia 0. Ad esempio $4, -2, -2, \quad 1, 1, 1, -2, -1, \quad 2, 2, 2, -6$ ammette una ovvia partizione, mentre $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ sicuramente no.

   Si dimostri che il problema è in NP.

ESAME 15 luglio 2024

1. Si dimostri che i linguaggi CF non sono chiusi per intersezione.
2. Si definisca la nozione di grammatica di tipo 1, e si dimostri che il problema di decidere se $x \in L(G)$ per le grammatiche di tipo 1 è decidibile.
3. Si consideri la enumerazione della MdT vista a lezione. $7 \in K$?
4. Un biologo si accorge che le stringhe di DNA che contengono esattamente i volte (i è un numero fissato) il frammento CAT o GAT sono collegate ad una allergia ai gatti inglesi o italiani (i volte CAT o i volte GAT, non la somma). Si è accorto inoltre che se ci sono esattamente lo stesso numero di sottostringhe CAT e GAT allora il DNA è collegato alla allergia ai gatti fiamminghi. Si studino formalmente i seguenti insiemi (per A_i, se volete, ragionate con $i = 2$).

$$\begin{array}{rcl} A_i & = & \{x \in \{A, C, G, T\} : x \text{ admits } i \text{ substrings CAT or } i \text{ substrings GAT}\} \\ A & = & \{x \in \{A, C, G, T\} : x \text{ admits the same number of substrings CAT and GAT}\} \end{array}$$

5. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : (\exists y \geq x)(\varphi_x(y) = 18 \wedge \varphi_x(y+1) = 30\} \\ D & = & \{\langle x, y \rangle : \varphi_y(10) \downarrow \wedge W_x = \{\varphi_y(10)\}\} \end{array}$$

6. Sia E un linguaggio deciso da una k-MdT che opera in spazio x^2. A che classe in tempo (deterministico) appartiene E?

ESAME 16 SETTEMBRE 2024

1. Si dimostri formalmente la seguente proprietà: dato un NFA M esiste un DFA M' tale che $L(M) = L(M')$.

2. Si definisca l'insieme K. Si *dimostri* dunque (a) che non è ricorsivo, e (b) che è r.e. completo.

3. Si scriva l'enunciato del primo teorema di ricorsione. Lo si usi per dimostrare l'esistenza di una funzione calcolabile di indice n tale che:

$$E_n = \{0, n, 2n, 3n, 4n, \ldots\}$$

4. Si dimostri che il seguente linguaggio (a) non è regolare ma e (b) è CF.

$$A = \left\{ v \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} v \text{ contiene la sottostringa } 001 \text{ e} \\ \#(0,v) = \#(1,v) \end{array} \right\}$$

   dove, dato un carattere a e una stringa x, $\#(a, x)$ restituisce il numero totale di occorrenze del carattere a nella stringa x.

5. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \geq 1000)(\varphi_x(y) \uparrow)\} \\ C & = & \{(x, y) : W_x \subset E_y\} \end{array}$$

   Dove con $\subset$ si intende la inclusione *stretta*.

6. Si consideri il seguente problema:

   There is a $n \times n$ input matrix x of numbers between 0 and n. Select $2n$ cells in such a way that (1) any selected cell has a value greater than 0 and (2) the sum of the selected cells is $3n$.

   Si dimostri che il problema è in NP.

ESAME 23 SETTEMBRE 2024 (recupero)

1. Dato un DFA M si definisca la relazione R_M. Dato un linguaggio L si definisca la relazione R_L. Si dimostri che se L è un linguaggio regolare allora R_L è di indice finito.

2. Si diano le definizioni di insieme ricorsivamente enumerabile e di insieme produttivo. Si dimostri che un insieme produttivo non può essere ricorsivamente enumnerabile.

3. Relativamente alla enumerazione delle MdT vista a lezione, si dica (spiegando) se $4 \in K$ o meno.

4. Si definisca in dettaglio la relazione di riduzione tra insiemi (per la computabilità). Si mostri dunque che la relazione non è antisimmetrica.[2]

5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se A sia (o meno) regolare
$$A = \{v \in \{0,1\}^* : \#(0,v) \leq \#(1,v)\}$$
dove, dato un carattere a e una stringa x, $\#(a,x)$ restituisce il numero totale di occorrenze del carattere a nella stringa x.

   Nel caso non sia regolare, si dica se è o meno libero dal contesto.

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):
$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \varphi_x(0) = 0 \land (\exists y > 0)(\varphi_x(y) = y)\} \\ C & = & \{x : W_x = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}\} \end{array}$$

[2]Ovvero che esistono due problemi A e B diversi tra loro per cui $A \leq B$ e $B \leq A$

ESAME 14 NOVEMBRE 2024

1. Si definisca la nozione di grammatica di tipo 1, si dia la corrispondente definizione di linguaggio generato $L(G)$ e si mostri che il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si enunci e dimostri il Teorema relativo all' "Halting Problem" (e il lemma necessario per la sua dimostrazione).

3. Si definisca la classe P e si dica formalmente cosa significhi essere P completo. Si fornisca un esempio di problema P completo.

4. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se, una volta fissato un numero intero i, il seguente insieme A_i sia (o meno) regolare o libero dal contesto.

   $$A_i = \left\{ v \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} |v| \le i \text{ e} \\ v \text{ è la codifica binaria di un numero che è una potenza di 2} \end{array} \right\}$$

   Nel caso A_i fosse regolare si fornisca l'automa minimo per A_{10}.

   Si studi dunque l'insieme $A = \bigcup_{i \ge 0} A_i$.

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

   $$\begin{array}{rcl} B & = & \left\{ x : (\forall y \le 3)(\varphi_x(y) = y^2) \right\} \\ C & = & \{\langle x, y \rangle : y \in W_x \wedge x \notin W_x\} \end{array}$$

ESAME 27 GENNAIO 2025

1. Dato un DFA M si definisca la relazione R_M. Dato un linguaggio L si definisca la relazione R_L. Si dimostri che se L è un linguaggio regolare allora R_L è di indice finito.
2. Si enunci e dimostri il Teorema noto semplicemente come "S-m-n".
3. Si definisca la classe P e si dica formalmente cosa significhi essere P completo. Si fornisca un esempio di problema P completo.
4. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se, una volta fissato un numero intero i, il seguente insieme A_i sia (o meno) regolare o libero dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} |v| \leq i \text{ e} \\ v \text{ è la codifica binaria di un numero primo} \end{array} \right\}$$

   Nel caso A_i fosse regolare si fornisca il DFA minimo per A_4.

   Si studi dunque l'insieme $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$.

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B &=& \{x : (\forall y \leq 3)(\varphi_x(y^2) = y + 3)\} \\ C &=& \{\langle x, y\rangle : W_x \cap E_y \supseteq \{0,1,2\}\} \end{array}$$

ESAME 18 FEBBRAIO 2025

1. Siano A e B due insiemi. Si dica cosa significa per una funzione $f : A \longrightarrow B$ essere biiettiva. Si definisca una funzione biiettiva da $\mathbb{N}^2$ a $\mathbb{N}$.
2. Siano L_1 ed L_2 linguaggi regolari. Si dimostri che $L_1 \cup L_2$ è regolare.
3. Si definiscano, tramite due grammatiche, due linguaggi context free L_1 e L_2 tali che $L_1 \cap L_2$ non è context free
4. Si definisca, usando la enumerazione vista a lezione la MdT numero 10. Si spieghi se $10 \in K$ o meno (10 scritto in decimale, ovvero dieci).
5. Si dimostri se il seguente insieme A sia (o meno) regolare o libero dal contesto.
$$A = \left\{ 0^{a_1}1^{b_1}0^{a_2}1^{b_2}\cdots 0^{a_n}1^{b_n} : \begin{array}{l} n > 0, 0 < a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n, \\ 0 < b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_n \end{array} \right\}$$
6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):
$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) = y!)\} \\ C & = & \{\langle x, y\rangle : \varphi_x(y)\downarrow \wedge \varphi_y(x)\uparrow\} \end{array}$$
Che relazioni insiemistiche ci sono tra B e K?