Funzioni semiintegrabili e funzioni misurabili

Questi appunti sono di complemento alla teoria dell'integrazione secondo Henstock-Kurzweil esposta nel libro *"Lezioni sulla teoria dell'integrale"*, di Alessandro Fonda, Edizioni Goliardiche, Trieste 2002.

1. Funzioni semiintegrabili

Definizione. *Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon E \to [0,+\infty]$ (funzione a valori reali estesi positivi), si dirà che f è semiintegrabile se esiste una successione di funzioni $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ integrabili tali che*

$$0 \le f_n \le f_{n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, \text{ e } f_n \to f \text{ puntualmente.}$$

In tal caso si pone

$$\int_E f := \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,.$$

(Notazione compatta per crescenza e limite puntuale: $0 \le f_n \nearrow f$).

Proposizione. *La definizione di integrale per le funzioni semiintegrabili è ben posta.*

Dimostrazione. Innanzitutto il limite che definisce $\int_E f$ esiste perché la successione $n \mapsto \int_E f_n$ è crescente. Dobbiamo dimostrare che tale limite non dipende dalla particolare successione f_n, cioè che se anche g_n è una successione di funzioni integrabili tali che $0 \le g_n \nearrow f$ allora $\int_E g_n$ ha lo stesso limite di $\int_E f_n$ per $n \to +\infty$. Poniamo

$$h_{n,m} := \min\{f_n, g_m\}\,.$$

La $h_{n,m}$ è in $L^1(E)$ perché minimo fra due funzioni di $L^1(E)$ (integrabili positive). Inoltre

$$0 \le h_{n,m} = \min\{f_n, g_m\} \le \min\{f_{n+1}, g_m\} = h_{n+1,m}\,,$$
$$\lim_{n\to+\infty} h_{n,m}(x) = \lim_{n\to+\infty} \min\{f_n(x), g_m(x)\} = \min\{f(x), g_m(x)\} = g_m(x)\,.$$

Per il teorema della convergenza monotona abbiamo che $\int_E h_{n,m}$ ha limite per $n \to +\infty$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E h_{n,m} = \int_E g_m\,.$$

D'altro canto

$$h_{n,m} = \min\{f_n, g_m\} \le f_n\,, \qquad \text{per cui} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_E h_{n,m} \le \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\,.$$

Quindi

$$\int_E g_m \le \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \quad \forall m \in \mathbb{N}\,,$$

e pertanto, passando al limite per $m \to +\infty$,

$$\lim_{m\to+\infty} \int_E g_m \le \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,.$$

Invertendo i ruoli fra f_n e g_n si ottiene l'altra disuguaglianza

$$\lim_{m\to+\infty} \int_E g_m \ge \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,,$$

da cui l'uguaglianza cercata. Infine, va verificato che la definizione di integrale per una funzione semiintegrabile non contraddice quella nel caso di funzioni integrabili. Ma questo è facile: se f è integrabile e positiva, possiamo prendere $f_n \equiv f$ per ogni n, ed è chiaro che f risulta anche semiintegrabile, con lo stesso valore dell'integrale. $\square$

Esercizio (monotonia). Se $f, g\colon E \to [0,+\infty]$ sono semiintegrabili e $f \le g$ allora $\int_E f \le \int_E g$.

Esercizio. Se $f, g\colon E \to [0,+\infty]$ sono semiintegrabili, anche $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$ lo sono.

Esercizio. Se $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile allora χ_E è semiintegrabile e $\int_E \chi_E = \mu(E)$ (anche quando E ha misura infinita).

Esercizio (linearità). Se $f, g\colon E \to [0,+\infty]$ sono semiintegrabili e $\alpha \in [0,+\infty]$ è una costante, allora $f+g$ e αf sono semiintegrabili e

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g \,, \qquad \int_E \alpha f = \alpha \int_E f \,.$$

(Si intende che $+\infty + \infty = +\infty + c = +\infty$ per $c \in \mathbb{R}$, e che $0 \cdot (+\infty) = 0$).

Teorema della convergenza monotona. *Siano $f_n\colon E \to [0,+\infty]$ funzioni semiintegrabili tali che $0 \le f_n \le f_{n+1}$ e tali che $f_n \to f$ puntualmente. Allora anche f è semiintegrabile e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f \,.$$

Dimostrazione. Per ipotesi ogni f_n è l'inviluppo di una successione crescente di funzioni integrabili, cioè esistono funzioni integrabili $g_{n,m}$ tali che

$$0 \le g_{n,m}(x) \le g_{n,m+1}(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{m\to+\infty} g_{n,m}(x) = f_n(x) \quad \forall x \in E \,.$$

Poniamo

$$h_n := \max\{g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{n,n}\} \,.$$

La successione h_n è positiva (ovviamente) e crescente:

$$\begin{aligned} h_n &= \max\{g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{n,n}\} \le \\ &\le \max\{g_{1,n+1}, g_{2,n+1}, \dots, g_{n,n+1}\} \le \\ &\le \max\{g_{1,n+1}, g_{2,n+1}, \dots, g_{n,n+1}, g_{n+1,n+1}\} = \\ &= h_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Inoltre h_n tende a f puntualmente. Fissiamo infatti $x \in E$ e $\alpha < f(x)$. Poiché $f_n(x)$ tende a $f(x)$, esiste n_0 tale che $f_n(x) > \alpha$ per $n \geq n_0$. D'altra parte, poiché $g_{n_0,m}(x)$ tende a $f_{n_0}(x)$ per $m \to +\infty$, esiste m_0 tale che $g_{n_0,m}(x) > \alpha$ per $m \geq m_0$. Ma allora, se $n \geq \max\{n_0, m_0\}$ abbiamo che

$$f(x) \geq h_n(x) = \max\{g_{1,n}(x), \dots, g_{n,n}(x)\} \geq g_{n_0,n}(x) \geq g_{n_0,m_0}(x) > \alpha\,.$$

Questo dimostra che $h_n(x)$ tende proprio a $f(x)$. Quindi f per definizione è semiintegrabile e $\int_E h_n \to \int_E f$. Rimane da dimostrare che $\int_E f_n$ tende a $\int_E f$. È chiaro per la monotonia che $\int_E f_n$ ha limite (è crescente...) e che il limite è $\leq \int_E f$. Sia pertanto $\beta < \int_E f$. Esiste n_0 tale che se $n \geq n_0$ allora $\int_E h_n > \beta$. Dato che $h_n \leq g_{n,n} \leq f_n$, per $n \geq n_0$ si ha che

$$\beta < \int_E h_n \leq \int_E f_n \leq \int_E f\,.$$

Quindi in effetti $\int_E f_n$ tende a $\int_E f$. □

2. Funzioni misurabili

Definizione. *Dato un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$, uno spazio topologico X e una funzione $f\colon E \to X$, si dice che f è una funzione misurabile se $f^{-1}(V)$ è un insieme misurabile per ogni V aperto di X.*

Proposizione. *Dati $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, $X = [-\infty, +\infty]$ (insieme dei reali estesi, dotato della topologia usuale) e $f\colon E \to X$, si equivalgono le condizioni seguenti:*
1. *$f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;*
2. *$f^{-1}(I)$ è misurabile per ogni I intervallo di X.*
3. *f è misurabile;*

Dimostrazione. Dimostriamo che 1 $\Rightarrow$ 2. Supponiamo che $f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ sia misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo che ogni intervallo di $[-\infty, +\infty]$ si può ottenere intersecando due intervalli presi dai tipi seguenti:
a. $[-\infty, +\infty]$,
b. $]\alpha, +\infty]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$,
c. $[\alpha, +\infty]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$,
d. $[-\infty, \beta]$, con $\beta \in \mathbb{R}$,
e. $[-\infty, \beta[$, con $\beta \in \mathbb{R}$,
f. $]-\infty, +\infty[$,
g. $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$.

Basterà dimostrare che la contrimmagine tramite f degli intervalli di questi tipi è misurabile.

Per il tipo a, $f^{-1}([-\infty, +\infty]) = E$, che è misurabile per ipotesi. Anche per il tipo b c'è misurabilità per ipotesi.

Per il tipo c, osserviamo che

$$[\alpha, +\infty] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right], \quad \text{per cui} \quad f^{-1}\bigl([\alpha, +\infty]\bigr) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overbrace{f^{-1}\left(\left]\alpha - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right)}^{\text{misurabile}},$$

per cui anche gli intervalli del tipo c vanno bene.

Gli intervalli del tipo d sono i complementari degli intervalli del tipo b, per cui

$$\begin{aligned} f^{-1}\bigl([-\infty,\beta]\bigr) &= f^{-1}\bigl([-\infty,+\infty]\setminus\,]\beta,+\infty]\bigr) = f^{-1}\bigl([-\infty,+\infty]\bigr)\setminus f^{-1}\bigl(]\alpha,+\infty]\bigr) = \\ &= E\setminus \underbrace{f^{-1}\bigl(]\alpha,+\infty]\bigr)}_{\text{misurabile}}\,. \end{aligned}$$

Per il tipo e basta scrivere

$$[-\infty,\beta[\,=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Bigl[-\infty,\beta-\frac{1}{n}\Bigr[\,.$$

Per il tipo f possiamo osservare che

$$]-\infty,+\infty[\,=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,+\infty]\cap[-\infty,n]\,.$$

Infine per il tipo g notiamo che

$$\{-\infty\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\infty,-n]\,,\qquad \{+\infty\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]n,+\infty]\,.$$

Dimostriamo che $2\Rightarrow 3$. Supponiamo che $f^{-1}(I)$ sia misurabile ogniqualvolta I è un intervallo. Vogliamo dimostrare che f è misurabile. Prendiamo V aperto in $[-\infty,+\infty]$. Sappiamo che V si può scrivere come l'unione di una famiglia (al più) numerabile di intervalli I_n. Allora

$$f^{-1}(V)=f^{-1}\Biggl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n\Biggr)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{f^{-1}(I_n)}_{\text{misurabile}}\,.$$

Quindi $f^{-1}(V)$ è pure misurabile. Un aperto V di $X=[-\infty,+\infty]$, che non sia anche sottinsieme aperto di $\mathbb{R}$, è necessariamente unione di un aperto di $\mathbb{R}$ con una o due semirette, che sono intervalli. Quindi $f^{-1}(V)$ è misurabile anche in questo caso.

Dimostriamo che $3\Rightarrow 1$. Supponiamo che f sia misurabile, cioè che $f^{-1}(V)$ sia misurabile per ogni V aperto in $[-\infty,+\infty]$. Poiché $]\alpha,+\infty]$ è aperto in $[-\infty,+\infty]$, la sua contrimmagine tramite f è misurabile. $\square$

Corollario. *Dato $E\subset\mathbb{R}^N$ misurabile, una funzione $f\colon E\to[-\infty,+\infty]$ è misurabile se e solo se $-f$ lo è.*

Dimostrazione. Basta osservare che $(-f)^{-1}(I)=f^{-1}(-I)$ e che l'opposto di un intervallo è ancora un intervallo. $\square$

Esercizio. Dato $E\subset\mathbb{R}^N$ misurabile, una funzione $f\colon E\to[-\infty,+\infty]$ è misurabile se e solo se $f^{-1}([-\infty,\beta[)$ è misurabile per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

Proposizione. *Dati $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ due insiemi misurabili disgiunti, X spazio topologico, e $f_1 \colon E_1 \to X$, $f_2 \colon E_2 \to X$ misurabili, anche la funzione*

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in E_1, \\ f_2(x) & \text{se } x \in E_2 \end{cases}$$

è misurabile su $E := E_1 \cup E_2$.

Dimostrazione. Sia V aperto in X. Allora $f^{-1}(V)$ è misurabile perché

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigl\{x \in E \ : \ f(x) \in V\bigr\} = \\ &= \bigl\{x \in E \ : \ ((x \in E_1) \text{ oppure } (x \in E_2)) \text{ e } f(x) \in V\bigr\} = \\ &= \bigl\{x \in E \ : \ (x \in E_1, f(x) \in V) \text{ oppure } (x \in E_2, f(x) \in V)\bigr\} = \\ &= \bigl\{x \in E \ : \ x \in E_1, f_1(x) \in V\bigr\} \cup \bigl\{x \in E \ : \ x \in E_2, f_2(x) \in V)\bigr\} = \\ &= \bigl\{x \in E_1 \ : \ f_1(x) \in V\bigr\} \cup \bigl\{x \in E_2 \ : \ f_2(x) \in V)\bigr\} = \\ &= f_1^{-1}(V) \cup f_2^{-1}(V)\,. \end{aligned}$$

□

Esercizio. Se $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ è una successione di insiemi misurabili in $\mathbb{R}^N$ a due a due disgiunti, X è uno spazio topologico, e le funzioni $f_n \colon E_n \to X$ sono misurabili, allora la funzione $f(x)$ che vale $f_n(x)$ quando $x \in E_n$ è pure misurabile.

Proposizione. *Se $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile, $f \colon E \to \mathbb{R}$ è misurabile e $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora $\varphi \circ f$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia V aperto in $\mathbb{R}$. Poiché φ è continua, $\varphi^{-1}(V)$ è aperto in $\mathbb{R}$. Ma allora $(\varphi \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\varphi^{-1}(V))$ è misurabile. □

Proposizione. *Se $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile, $f \colon E \to \mathbb{R}$ è misurabile e $\varphi \colon [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ è monotona, allora $\varphi \circ f$ è misurabile.*

Dimostrazione. Preso $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme $\varphi^{-1}(]\alpha, +\infty])$ è un intervallo. Quindi $\varphi \circ f$ è misurabile perché

$$(\varphi \circ f)^{-1}\bigl(]\alpha, +\infty]\bigr) = f^{-1}\Bigl(\varphi^{-1}\bigl(]\alpha, +\infty]\bigr)\Bigr)\,.$$

□

Proposizione. *Se E è misurabile, $f, g \colon E \to \mathbb{R}$ sono misurabili, e $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione $h(x) := \varphi(f(x), g(x))$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia V un aperto di $\mathbb{R}$. Allora $\varphi^{-1}(V)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sappiamo che ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è l'unione di una famiglia al più numerabile di rettangoli:

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \times J_n\,,$$

dove I_n, J_n sono intervalli. Allora

$$\begin{aligned}
h^{-1}(V) &= \bigl\{x \in E \ :\ \varphi(f(x), g(x)) \in V\bigr\} = \\
&= \bigl\{x \in E \ :\ (f(x), g(x)) \in \varphi^{-1}(V)\bigr\} = \\
&= \Bigl\{x \in E \ :\ (f(x), g(x)) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \times J_n\Bigr\} = \\
&= \bigl\{x \in E \ :\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } (f(x), g(x)) \in I_n \times J_n\bigr\} = \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigl\{x \in E \ :\ (f(x), g(x)) \in I_n \times J_n\bigr\} = \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigl\{x \in E \ :\ f(x) \in I_n \text{ e } g(x) \in J_n\bigr\} = \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl(\bigl\{x \in E \ :\ f(x) \in I_n\bigr\} \cap \bigl\{x \in E \ :\ g(x) \in J_n\bigr\}\Bigr) = \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl(f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n)\Bigr).
\end{aligned}$$

Poiché $f^{-1}(I_n)$ e $g^{-1}(J_n)$ sono misurabili, anche $h^{-1}(V)$ lo è. □

Corollario. *Se E è misurabile e $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $f + g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sono misurabili.*

Proposizione. *Se E è misurabile e $f_n\colon E \to [-\infty, +\infty]$ sono misurabili, allora sono misurabili anche*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \max\lim_{n\to+\infty} f_n \quad e \quad \min\lim_{n\to+\infty} f_n\,.$$

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e poniamo $g := \sup_n f_n$. Allora

$$\begin{aligned}
g^{-1}\bigl(]\alpha, +\infty]\bigr) &= \bigl\{x \in E \ :\ \sup_n f_n(x) > \alpha\bigr\} = \\
&= \bigl\{x \in E \ :\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } f_n(x) > \alpha\bigr\} = \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigl\{x \in E \ :\ f_n(x) > \alpha\bigr\} = \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}\bigl(]\alpha, +\infty]\bigr)}_{\text{misurabile}}\,.
\end{aligned}$$

Posto $h := \inf_n f_n$, abbiamo che $-h = \sup_n(-f_n)$. Le $-f_n$ sono misurabili, e quindi lo sono $-h$, e di conseguenza h. Per il minimo e massimo limite basta osservare che

$$\min\lim_{n\to+\infty} f_n = \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \overbrace{\inf_{k\geq n} f_k}^{\text{misurabile}}}_{\text{misurabile}}\,, \qquad \max\lim_{n\to+\infty} f_n = \underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} \overbrace{\sup_{k\geq n} f_k}^{\text{misurabile}}}_{\text{misurabile}}\,.$$

□

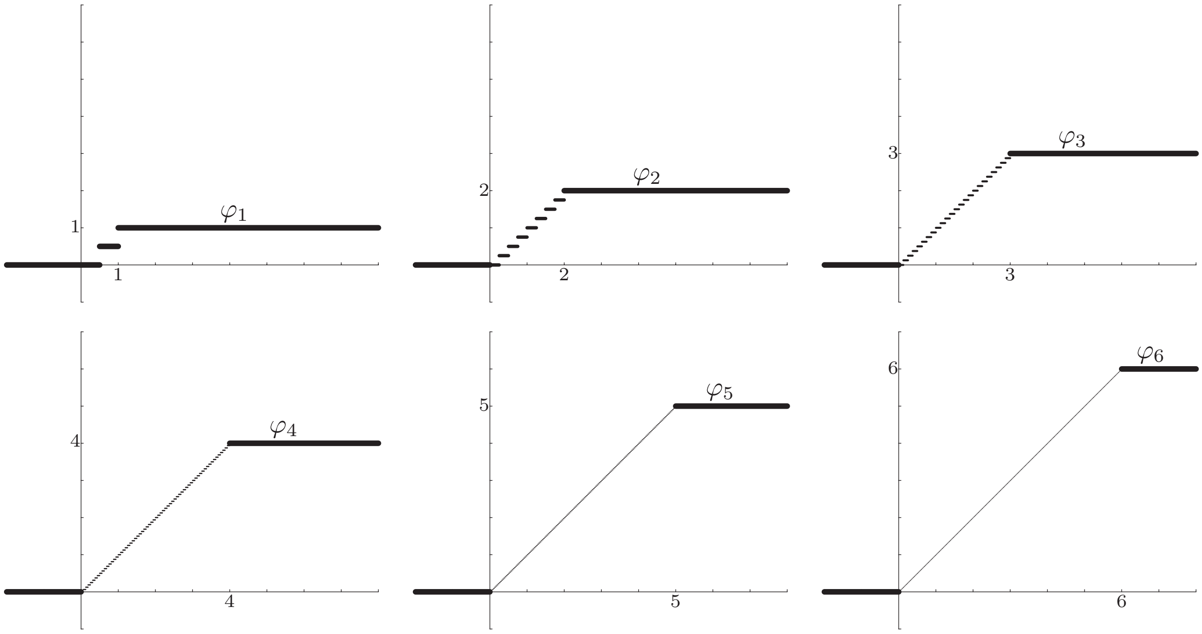
Esercizio. Sia $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili sull'insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora l'insieme degli x per i quali la successione $n \mapsto f_n(x)$ converge è misurabile.

Proposizione. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [-\infty, +\infty]$ poniamo*

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor & \text{se } 0 \le x \le n, \\ n & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Allora $x \mapsto \varphi_n(x)$ è (debolmente) crescente da $[-\infty, +\infty]$ in sé, $\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$ per ogni x e

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = x \qquad \text{se } x \ge 0.$$



Dimostrazione. Su $[-\infty, 0[$ e su $]n, +\infty]$ la φ_n è costante, e quindi debolmente crescente. Su $[0, n]$ la φ_n è debolmente crescente perché ottenuta componendo moltiplicazioni per numeri positivi con la parte intera, tutte funzioni (debolmente) crescenti. Inoltre se $x \in [0, n]$ allora

$$2^n x \in [0, n2^n], \quad \text{da cui} \quad \lfloor 2^n x \rfloor \in [0, n2^n], \quad \text{da cui} \quad \varphi_n(x) = 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor \in [0, n].$$

Quindi $x_1 < 0 \le x_2 \le n < x_3$ implica $\varphi_n(x_1) = 0 \le \varphi_n(x_2) \le n = \varphi_n(x_3)$. Questo prova che φ_n è debolmente crescente su tutto $[-\infty, +\infty]$.

Dimostriamo che $\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$. Se $x \in [-\infty, 0[$ allora $\varphi_n(x) = 0 = x$ per ogni n. Sia $x \in [0, n]$. Il numero $k_0 := \lfloor 2^{n+1} x \rfloor$ è intero e possiamo successivamente dedurre

$$k_0 \le 2^{n+1}x < k_0 + 1, \quad \frac{k_0}{2} \le 2^n x < \frac{k_0+1}{2}, \quad \lfloor 2^n x \rfloor = \begin{cases} k_0/2 & \text{se } k_0 \text{ è pari}, \\ (k_0-1)/2 & \text{se } k_0 \text{ è dispari}, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor = \begin{cases} k_0/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x) & \text{se } k_0 \text{ è pari}, \\ (k_0-1)/2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x) - 1/2^{n+1} & \text{se } k_0 \text{ è dispari}, \end{cases}$$

Se $n < x \le n+1$ allora

$$\varphi_{n+1}(x) = 2^{-n-1}\lfloor 2^{n+1}x\rfloor \ge 2^{-n-1}\lfloor 2^{n+1}n\rfloor = 2^{-n-1}\cdot 2^{n+1}n = n = \varphi_n(x)\,.$$

Se $x > n+1$ allora $\varphi_n(x) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(x)$.

Dimostriamo che $\varphi_n(x) \to x$ per $n \to +\infty$ quando $x \ge 0$. Se $x = +\infty$ questo viene dal fatto che $\varphi_n(+\infty) = n$. Se $0 \le x < +\infty$ sia n intero $\ge x$. Allora si deduce successivamente

$$\lfloor 2^n x\rfloor \le 2^n x < \lfloor 2^n x\rfloor + 1, \quad 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor \le 2^{-n}2^n x < 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor + 2^{-n},$$
$$\varphi_n(x) \le x < \varphi_n(x) + 2^{-n}\,, \quad x - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(x) \le x\,.$$

Da quest'ultima disuguaglianza, vera per ogni n intero $\ge x$, si ricava che $\varphi_n(x) \to x$ per $n \to +\infty$. □

Proposizione. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ e sia χ_E la funzione caratteristica di E in $\mathbb{R}^N$. Allora χ_E è misurabile se e solo se E è misurabile, e χ_E è integrabile se e solo se E è misurabile con misura finita.*

Dimostrazione. Se V è un aperto di $\mathbb{R}$ (o anche non aperto, non importa),

$$\chi_E^{-1}(V) = \begin{cases} E & \text{se } 1 \in V \text{ e } 0 \notin V, \\ \mathbb{R}^N \setminus E & \text{se } 0 \in V,\ 1 \notin V, \\ \mathbb{R}^N & \text{se } 0 \in V,\ 1 \in V, \\ \varnothing & \text{se } 0 \notin V,\ 1 \notin V. \end{cases}$$

Da qui si vede che χ_E è misurabile se e solo se E lo è. Quando E è limitato, il fatto che χ_E sia integrabile se e solo se E è misurabile è semplicemente la definizione di misurabilità per insiemi. Quando E è illimitato, si considera $E_n := E \cap [-n,n]^N$ e la corrispondente χ_{E_n}. La $n \mapsto \chi_{E_n}$ tende crescendo a χ_E puntualmente. Se E è misurabile allora tutte le χ_{E_n} sono integrabili, e gli integrali tendono alla misura di E, che è finita per ipotesi. Per il teorema della convergenza dominata anche f è integrabile. Viceversa, se χ_E è integrabile, per definizione χ_{E_n} è integrabile per ogni n, e quindi E_n è misurabile per ogni n, e infine E è misurabile. □

Proposizione. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ e $f\colon E \to [0,+\infty[$ misurabile e che assume solo un numero finito di valori. Allora f è in $L^1(E)$ se e solo se $\{f \ne 0\}$ ha misura finita.*

Dimostrazione. Siano $\alpha_1, \alpha_n, \dots, \alpha_n$ i valori assunti da f (tutti ≥ 0). Allora gli insiemi $E_i := \{f = \alpha_i\}$ al variare di i formano una partizione di E in n sottinsiemi misurabili a due a due disgiunti, e

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}\,.$$

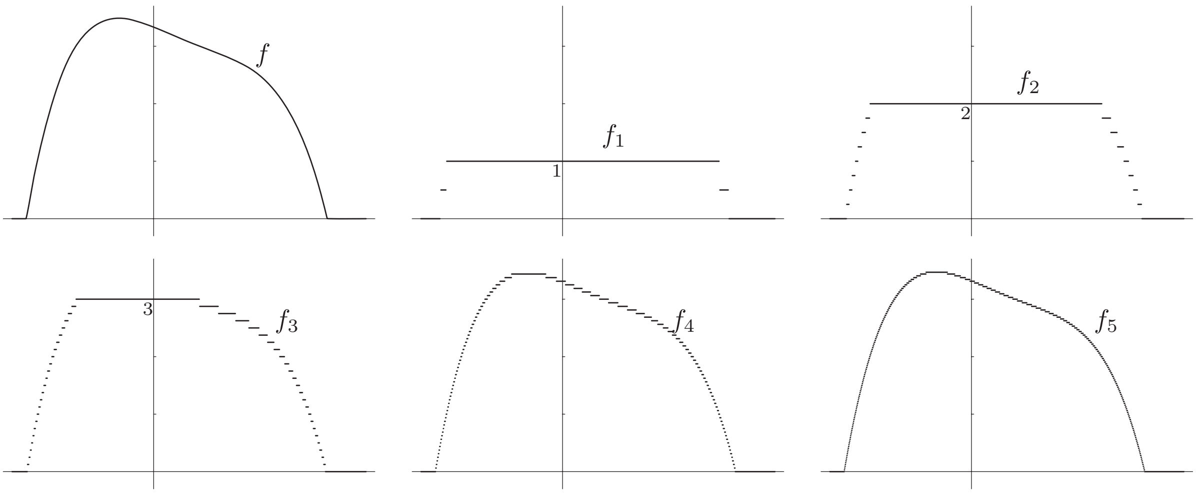
f è semiintegrabile in quanto somma finita di funzioni semiintegrabili, e $\int_E f = \sum_i \alpha_i \mu(E_i)$. L'integrale è finito se e solo se $\mu(E_i) < +\infty$ per ogni i per il quale $\alpha_i \ne 0$. L'unione degli E_i per quegli i è precisamente $\{f \ne 0\}$, e l'unione ha misura finita se e solo se ciascun E_i ha misura finita. Quindi f è integrabile se e solo se $\{f \ne 0\}$ ha misura finita. □

Teorema. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $f\colon E \to [0, +\infty]$ una funzione. Allora si equivalgono:*
1. *f è misurabile;*
2. *f è semiintegrabile.*

Dimostrazione. Supponiamo per cominciare che $\{x \in E \ : \ f(x) > 0\}$ sia *limitato* e f sia misurabile. Vogliamo costruire una successione crescente di funzioni integrabili positive che tende a f. Definiamo la funzione $\varphi_n\colon [-\infty, +\infty] \to \mathbb{R}$ come

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor & \text{se } 0 \le x \le n, \\ n & \text{se } x > n, \end{cases}$$

e poniamo $f_n := \varphi_n \circ f$. Sappiamo che $\varphi_n(x)$ è debolmente crescente rispetto a x e quindi f_n è misurabile. Inoltre f_n è ≥ 0, assume solo un numero finito di valori, e $\{f_n \ne 0\} \subset \{f \ne 0\}$ è misurabile limitato. Quindi f_n è integrabile. Inoltre $\varphi_n(f(x)) \ge 0$, e per ogni $x \in E$ tende crescendo a $f(x)$ per $n \to +\infty$. Concludiamo che f è semiintegrabile.



Togliamo ora la restrizione che $\{f > 0\}$ sia limitato. Per ogni n la funzione

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \cap [-n, n]^N, \\ 0 & \text{se } x \in E \setminus [-n, n]^N \end{cases}$$

è misurabile. Inoltre $\{g_n > 0\} \subset [-n, n]^N$. Quindi tutte le g_n sono semiintegrabili per quanto già dimostrato. Si vede anche che $0 \le g_n \nearrow f$. Per il teorema della convergenza monotona si conclude che anche f è semiintegrabile.

Viceversa, supponiamo che f sia semiintegrabile e dimostriamo che f è misurabile. Sappiamo che questo è vero se f è integrabile. Nel caso generale sia f_n una successione di funzioni integrabili tali che $0 \le f_n \nearrow f$. In particolare $f = \sup_n f_n$. Quindi f è misurabile. □