La radice quadrata di 2

1. Preliminari: completezza dei numeri reali

Sia dato un sottinsieme A non vuoto di $\mathbb{R}$.

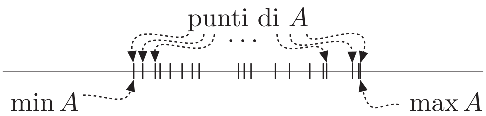
Definizione. *Un numero reale M si dice massimo di A se (1) $M \in A$ e (2) ogni altro elemento di A è minore o uguale ad M. In altre parole il massimo di A è un numero di A che si lascia il resto dell'insieme tutto a sinistra.*

Proposizione. *Il massimo di A, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo infatti che M_1 ed M_2 siano entrambi massimi di A. Poiché M_1 è massimo di A, è maggiore o uguale a ogni altro elemento di A; in particolare è maggiore o uguale a M_2, che appartiene ad A. Quindi $M_1 \geq M_2$. D'altra parte, poiché M_2 è massimo di A, è maggiore o uguale a ogni altro elemento di A; in particolare è maggiore o uguale a M_1, che appartiene ad A. Quindi $M_2 \geq M_1$. Mettendo insieme le disuguaglianze $M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$ si deduce che $M_1 = M_2$, cioè l'unicità del massimo. □

L'unicità ci autorizza a dire "il" massimo di A invece di "un" massimo. Si scrive anche $M = \max A$.

Definizione. *Un numero reale a si dice minimo di A se (1) $a \in A$ e (2) ogni altro elemento di A è maggiore o uguale ad a. In altre parole il minimo di A è un numero di A che si lascia il resto dell'insieme tutto a destra.*



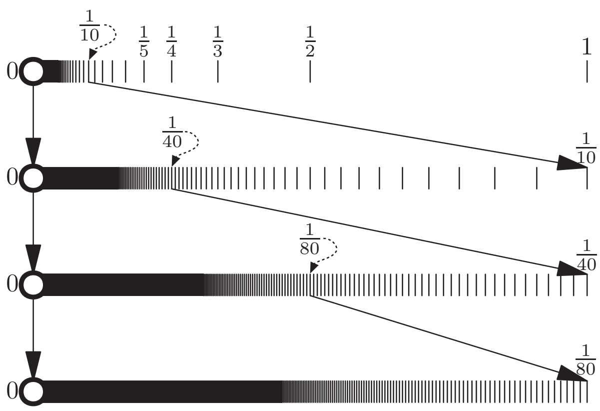
Analogamente al massimo, anche il minimo, se c'è, è unico. Diremo quindi "il minimo" e useremo la notazione $m = \min A$. Un insieme *finito* ha sempre massimo e minimo, e questi si trovano con un numero finito di confronti fra gli elementi di A. Un insieme *infinito* invece può non avere massimo o minimo. Per esempio:

Proposizione. *L'insieme $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ non ha minimo.*

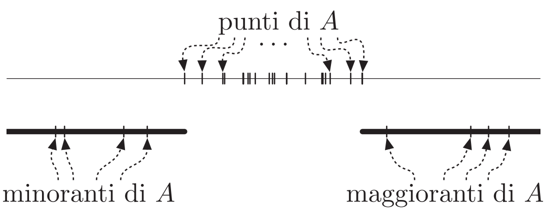
Dimostrazione. Supponiamo che A abbia minimo $\bar{x}$. Essendo $\bar{x}$ un punto dell'insieme, potremo scrivere $\bar{x} = 1/\bar{n}$, con $\bar{n}$ un qualche numero naturale. Ma allora $1/(\bar{n}+1)$ è ancora un punto dell'insieme, perché $\bar{n}+1$ è pure un numero naturale, e

$$A \ni \frac{1}{\bar{n}+1} < \frac{1}{\bar{n}} = \bar{x} = \min A\,,$$

che è assurdo, perché per definizione non ci sono punti di A più piccoli del minimo. La figura accanto con degli zoom successivi vorrebbe illustrare il fatto che non c'è un $1/n$ più piccolo degli altri. □



Definizione. *Un numero reale x si dice maggiorante di A se x è maggiore o uguale a ogni elemento di A. In altre parole un maggiorante di A è un numero che si lascia l'insieme tutto a sinistra.*



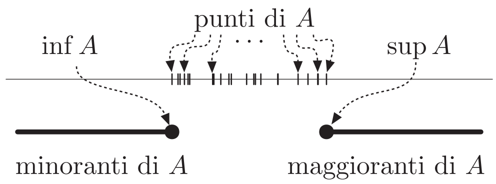
I maggioranti, se ci sono, non sono unici. Infatti, se x è un maggiorante, ogni numero maggiore di x è ancora maggiorante. Ci sono insiemi che non hanno maggioranti. Per esempio, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non ha maggioranti, perché non c'è nessun numero reale che superi tutti i numeri naturali.

Definizione. *Un numero reale x si dice minorante di A se x è minore o uguale a ogni elemento di A. In altre parole un minorante di A è un numero che si lascia l'insieme tutto a destra.*

I minoranti, se ci sono, non sono unici. Infatti, se x è un minorante, ogni numero minore di x è ancora minorante. Ci sono insiemi che non hanno minoranti. Per esempio, l'insieme $\{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ dei numeri interi negativi non ha minoranti, perché non c'è nessun numero reale che preceda tutti i numeri interi negativi.

Definizione. *A si dice limitata superiormente se ha almeno un maggiorante, e si dice limitata inferiormente se ha almeno un minorante.*

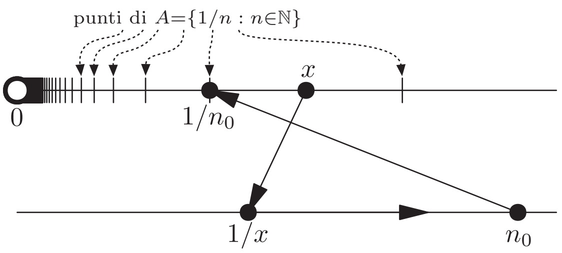
Definizione. *Un numero reale x si dice estremo superiore di A se (1) x è un maggiorante di A e (2) x è minore o uguale ad ogni altro maggiorante di A.*



In altre parole, l'estremo superiore di A è il minimo dell'insieme dei maggioranti di A (se ne esistono). In quanto minimo di un insieme, l'estremo superiore è unico e lo indichiamo col simbolo $\sup A$.

Definizione. *Un numero reale x si dice estremo inferiore di A se (1) x è un minorante di A e (2) x è maggiore o uguale ad ogni altro minorante di A.*

In altre parole, l'estremo inferiore di A è il massimo dell'insieme dei minoranti di A (se ne esistono). In quanto massimo di un insieme, l'estremo inferiore è unico e lo indichiamo col simbolo $\inf A$.



Esempio. L'estremo inferiore dell'insieme $A = \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è lo 0. Infatti (1) lo zero è un minorante: $0 \leq 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; (2) nessun numero > 0 è minorante: se $x > 0$ possiamo trovare un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > 1/x$, da cui $x > 1/n_0 \in A$, cioè x non è un minorante di A.

Principio fondamentale ("completezza") dei numeri reali: *per ogni sottinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente esiste l'estremo superiore, e per ogni sottinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente esiste l'estremo inferiore.*

In altre parole, se esiste un maggiorante, esiste anche il minimo dei maggioranti; se esiste un minorante, esiste anche il massimo dei minoranti.

Se conveniamo di porre $\sup A = +\infty$ quando A è illimitato superiormente, e $\inf A = -\infty$ quando A è illimitato inferiormente, possiamo dire che ogni sottinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto ha sia estremo superiore che estremo inferiore, eventualmente infiniti. I due "oggetti" $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali a pieno titolo (i principi di base valgono solo parzialmente), ma è comodo averli a disposizione per diversi scopi.

2. Esistenza della radice di 2 fra i numeri reali

Teorema. *Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ esiste la radice quadrata di 2, cioè un numero positivo il cui quadrato è esattamente 2.*

Dimostrazione. La dimostrazione viene complicata perché ci proponiamo di usare soltanto le quattro operazioni e i principi fondamentali dell'ordinamento di $\mathbb{R}$. È un po' come se dovessimo programmare in linguaggio macchina senza usare librerie già pronte.

Consideriamo l'insieme di numeri reali positivi il cui quadrato è minore di 2:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0, x^2 < 2\} \qquad \text{(definizione).}$$

Prima di tutto A *non è vuoto*: lo 0 gli appartiene, in quanto $0 \geq 0$ e $0^2 < 2$. Anche l'1 gli appartiene, in quanto $1 \geq 0$ e $1^2 < 2$.

Poi *A è limitato superiormente*, cioè ha almeno un maggiorante. Quale? Il 2, per esempio. Infatti a destra del 2 non ci sono punti di A:

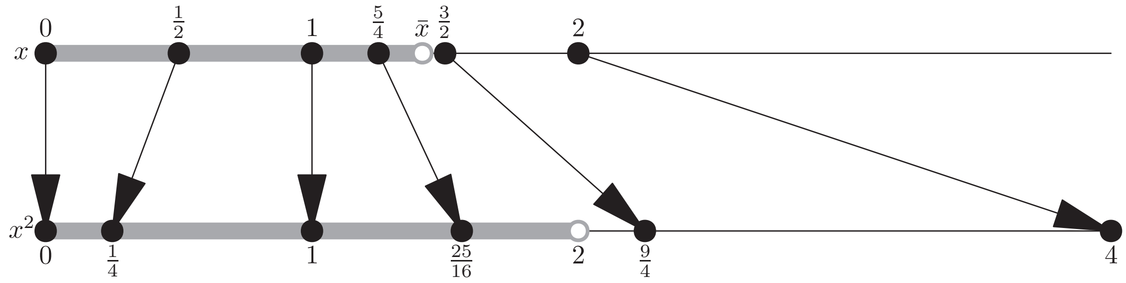
$$x > 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 2^2 = 4 > 2 \quad \Rightarrow \quad x \notin A\,.$$

I punti di A, non potendo stare a destra di 2, devono stare a sinistra. Per esercizio verificare che $5/4 \in A$ e che $3/2$ è un maggiorante di A.

Per il principio fondamentale, *esiste l'estremo superiore di* A, a cui assegnamo provvisoriamente il simbolo $\bar{x}$ (finché non l'avremo riconosciuto ufficialmente come $\sqrt{2}$):

$$\bar{x} := \sup A \qquad \text{(definizione).}$$

Nelle figure che seguono la prima riga contiene i numeri x, con l'insieme A in grassetto grigio; nella seconda riga ci sono i quadrati x^2, con l'intervallo da 0 a 2 in grigio:



Ci proponiamo di dimostrare che $\bar{x}$ è proprio la radice quadrata di 2, cioè che

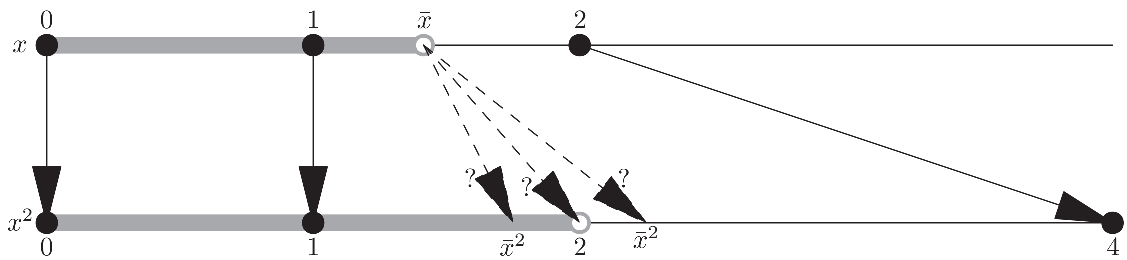
$$\bar{x} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \bar{x}^2 = 2 \qquad \text{(da dimostrare)}\,.$$

Che $\bar{x}$ sia ≥ 0 viene dal fatto che $\bar{x}$ è un maggiorante di A, e quindi è maggiore o uguale a ogni elemento di A, in particolare allo 0. Anzi, $\bar{x}$ deve essere anche maggiore o uguale a 1, che è un altro elemento di A. Inoltre, essendo $\bar{x}$ il minimo dei maggioranti, è minore o uguale a 2, che è un maggiorante. Riassumendo queste informazioni:

$$1 \leq \bar{x} \leq 2 \qquad \text{(assodato).}$$

Per la tricotomia, una e una sola delle tre relazioni seguenti è valida:

$$\bar{x}^2 < 2\,, \qquad \bar{x}^2 = 2\,, \qquad \bar{x}^2 > 2 \qquad \text{(alternative).}$$



Per mostrare che è quella di mezzo la vera, andremo per esclusione.

Non può essere che $\bar{x}^2 < 2$. Facciamo finta infatti ("per assurdo") che

$$\bar{x}^2 < 2 \qquad \text{(ipotesi provvisoria).}$$

In altre parole, $\bar{x}$ stia in A. Consideriamo il seguente numero:

$$\varepsilon := \frac{2 - \bar{x}^2}{5} \qquad \text{(definizione).}$$

Poiché siamo nell'ipotesi che $\bar{x}^2 < 2$, abbiamo che $2 - \bar{x}^2 > 0$, e quindi $\varepsilon > 0$. Inoltre, poiché $\bar{x} \geq 1$ abbiamo che

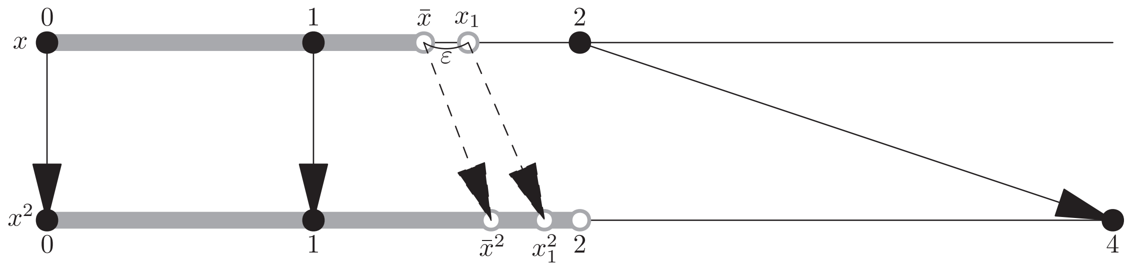
$$\bar{x}^2 \geq 1^2 = 1 \qquad \text{e quindi} \quad -1 \geq \bar{x}^2 \quad \text{per cui} \quad -1 + 2 \geq -\bar{x}^2 + 2 \quad \text{e pertanto} \quad \frac{1}{5} \geq \frac{2 - \bar{x}^2}{5} = \varepsilon\,.$$

Insomma,

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{5} < 1 \qquad \text{(assodato).}$$

Definiamo

$$x_1 := \bar{x} + \varepsilon \qquad \text{(definizione).}$$



Poiché $\varepsilon > 0$ abbiamo che $x_1 > \bar{x}$. Consideriamo la differenza $x_1^2 - \bar{x}^2$ e scomponiamola in fattori:

$$x_1^2 - \bar{x}^2 = (x_1 - \bar{x})(x_2 + \bar{x}) = \big((\bar{x}+\varepsilon) - \bar{x}\big)\big((\bar{x}+\varepsilon) + \bar{x}\big) = \underbrace{\varepsilon}_{>0}\overbrace{(2\underbrace{\bar{x}}_{<2} + \underbrace{\varepsilon}_{<1})}^{<2\cdot 2+1} <$$

$$< \varepsilon \cdot (2\cdot 2 + 1) = \frac{2-\bar{x}^2}{5}\cdot 5 = 2 - \bar{x}^2 \,.$$

Eliminando i termini intermedi si ricava che

$$x_1^2 - \bar{x}^2 < 2 - \bar{x}^2 \,,$$

da cui, cancellando l'addendo in comune fra i due membri,

$$x_1^2 < 2 \qquad \text{(assodato)}.$$

Il punto x_1 è positivo e il suo quadrato è minore di 2. Risulta quindi appartenere ad A. Ma x_1 è anche maggiore strettamente di $\bar{x}$. Ne ricaviamo che $\bar{x}$ non è un maggiorante di A (c'è un punto di A a destra). Questo va contro la definizione di $\bar{x}$, che essendo l'estremo superiore di A, ne è un maggiorante.

L'ipotesi provvisoria che $\bar{x}^2 < 2$ conduce a una contraddizione con la definizione di $\bar{x}$, e quindi è da scartare.

Non può essere che $\bar{x}^2 > 2$. Facciamo finta infatti per assurdo che

$$\bar{x}^2 > 2 \qquad \text{(ipotesi provvisoria)}.$$

Consideriamo il seguente numero:

$$\varepsilon := \frac{\bar{x}^2 - 2}{4} \qquad \text{(definizione)}.$$

Poiché siamo nell'ipotesi che $\bar{x}^2 > 2$, abbiamo che $\bar{x}^2 - 2 > 0$, e quindi $\varepsilon > 0$. Inoltre, poiché $\bar{x} \le 2$ abbiamo che

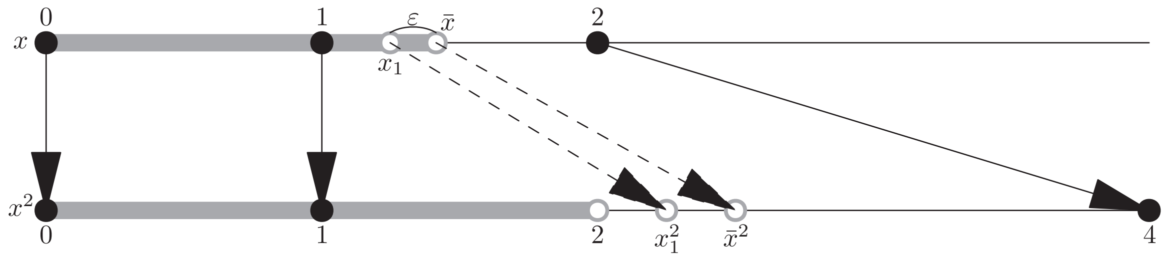
$$\bar{x}^2 \le 2^2 = 4 \qquad \text{e quindi} \quad \bar{x}^2 - 2 \le 4 - 2 = 2 \quad \text{e pertanto} \quad \varepsilon = \frac{\bar{x}^2-2}{4} \le \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \,.$$

Insomma,

$$0 < \varepsilon \le \frac{1}{2} \qquad \text{(assodato)}.$$

Definiamo

$$x_1 := \bar{x} - \varepsilon \qquad \text{(definizione)}.$$



Mettendo insieme le disuguaglianze $1 \le \bar{x} \le 2$ e $0 < \varepsilon < 1/2$ ricaviamo $1 - 1/2 < x_1 < 2 - 0$, cioè

$$1/2 < x_1 < 2 \qquad \text{(assodato).}$$

Consideriamo la differenza dei quadrati $\bar{x}^2 - x_1^2$ e scomponiamola in fattori:

$$\bar{x}^2 - x_1^2 = (\bar{x} - x_1)(\bar{x} + x_1) = \big(\bar{x} - (\bar{x} - \varepsilon)\big)\big(\bar{x} + (\bar{x} - \varepsilon)\big) = \varepsilon\,\overbrace{(2\underbrace{\bar{x}}_{<2} - \underbrace{\varepsilon}_{>0})}^{<2\cdot 2-0} <$$

$$< \varepsilon(2 \cdot 2 - 0) = \frac{\bar{x}^2 - 2}{4} \cdot 4 = \bar{x}^2 - 2\,.$$

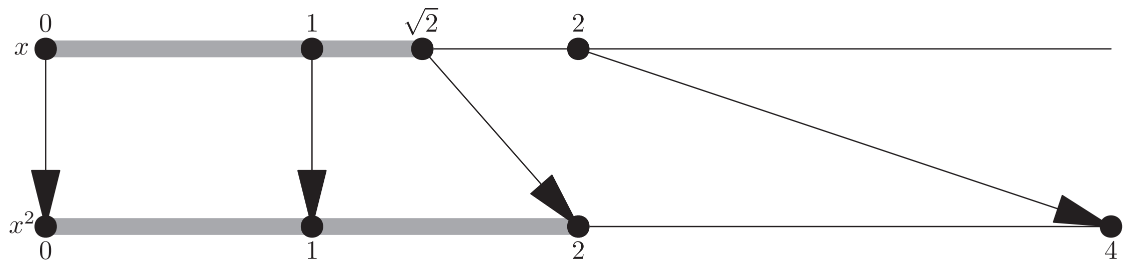
Eliminando i membri intermedi e semplificando il termine comune $\bar{x}^2$ si ricava che

$$x_1^2 > 2 \qquad \text{(assodato).}$$

Se prendiamo un qualsiasi $x > x_1$ abbiamo, elevando al quadrato (tenendo conto che x_1 è positivo!) che $x^2 > x_1^2 > 2$. Dunque nessun punto a destra di x_1 sta in A. In altre parole, x_1 è un maggiorante di A. Ma x_1 è anche minore strettamente di $\bar{x}$. Ne segue che $\bar{x}$ non è il più piccolo dei maggioranti di A. Questo contraddice la definizione di $\bar{x}$. Siamo costretti a rigettare l'ipotesi provvisoria che $\bar{x}^2 > 2$.

Conclusione: non potendo essere né $\bar{x}^2 < 2$ né $\bar{x}^2 > 2$ deve essere $\bar{x}^2 = 2$, cioè $\bar{x}$ è una radice quadrata positiva di 2, e (salvo aver verificato l'unicità) possiamo scrivere

$$\bar{x} = \sqrt{2}\,. \qquad \square$$



Esercizio. Nella dimostrazione abbiamo usato il fatto che $0 < x < y$ implica $x^2 < y^2$. Dimostrare l'implicazione a partire dai principi di base.

Esercizio. Dimostrare che la radice quadrata positiva di un qualsiasi numero positivo è unica.

Esercizio (più impegnativo). Dimostrare che esiste $\sqrt{3}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio. Dimostrare (senza usare radici quadrate, ma solo le quattro operazioni) che se $x \ge 0$ e $x^2 < 2$ allora esiste un $y > x$ tale che $y^2 < 2$. Dimostrare che se $x \ge 0$ e $x^2 > 2$ allora esiste un y tale che $0 < y < x$ e $y^2 > 2$.

Esercizio. L'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} \ :\ x \ge 0, x^2 < 2\}$ coincide con $\{x \in \mathbb{R} \ :\ 0 \le x < \sqrt{2}\}$.

Esercizio. Verificare che $17/12$ è una buona approssimazione razionale di $\sqrt{2}$, nel senso che

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{400} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}\,.$$

Notare che nel corso di Analisi Matematica piace lavorare con *numeri simbolici esatti*, e uguaglianze e disuguaglianze esatte, quando ci si riesce. Una qualsiasi calcolatrice ci dà approssimazioni in virgola mobile del tipo di $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$, ma siamo un altro ordine di idee.

3. La radice di due non è razionale

Teorema. *La radice di due non è un numero razionale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Esistono quindi due numeri interi p, q tali che $\sqrt{2} = p/q$. Essendo $p/q > 0$ i due numeri devono avere lo stesso segno; salvo cambiare segno a entrambi possiamo supporre che siano entrambi > 0. Elevando al quadrato l'uguaglianza $\sqrt{2} = p/q$ si ricava $2 = p^2/q^2$, e moltiplicando per q^2 si ha che

$$\boxed{2q^2 = p^2}$$

Da qui per raggiungere un assurdo possiamo ragionare in diversi modi.

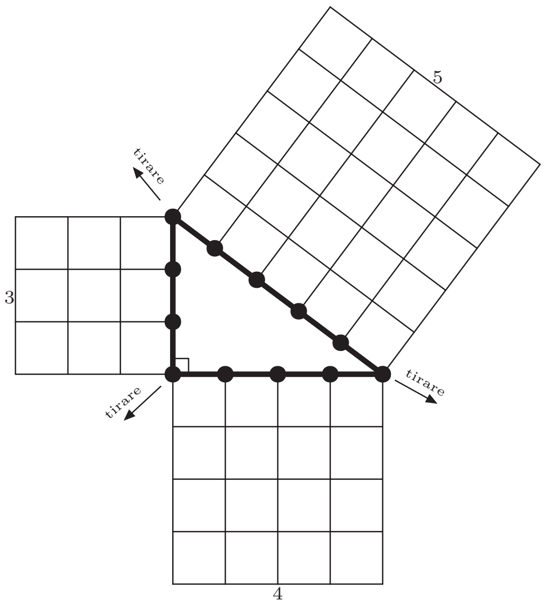
Primo modo. $2q^2$ è un numero pari, perché è il doppio del numero intero q^2. Dunque p^2 è pari. Ma allora p stesso dev'essere pari, perché il quadrato di un dispari è dispari. Sia p_1 la metà di p, che è intera: $p_1 = p/2$. Sostituendo $p = 2p_1$ nell'uguaglianza $2q^2 = p^2$ si ricava $2q^2 = (2p_1)^2 = 4p_1^2$, da cui, dividendo per 2, $q^2 = 2p_1^2$. Ragionando come prima, il secondo membro $2p_1^2$ è pari, quindi q^2, e quindi q, sono pari. *Entrambi p e q sono pari!* Sia $q_1 = q/2$, che è intero. Allora

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p/2}{q/2} = \frac{p_1}{q_1}\,.$$

Insomma, p_1 e q_1 si trovano con le stesse proprietà che avevano all'inizio p e q: sono interi e il loro rapporto è $\sqrt{2}$. Ma allora possiamo riapplicare il ragionamento a p_1 e q_1: sono a loro volta entrambi pari. Poniamo $p_2 = p_1/2$, $q_2 = q_1/2$. Continuando di questa lena anche p_2 e q_2 sono pari, e così via. Ricaviamo che i numeri iniziali p e q sono divisibili per 2 infinite volte. Questo chiaramente non è possibile. Altrimenti detto: p e q sono pari, quindi $p, q \geq 2$; anche le loro metà sono pari, quindi $p, q \geq 4$; le metà delle metà sono pari, quindi $p, q \geq 8$, ecc.

Secondo modo. Possiamo supporre all'inizio che la frazione p/q sia già ridotta ai minimi termini (altrimenti riduciamola prima di continuare). In particolare p e q non possono essere entrambi pari. Ma col ragionamento qui sopra ricaviamo che p e q devono essere entrambi pari. Assurdo.

Terzo modo. Scomponiamo i due membri $2q^2$ e p^2 in fattori primi. e concentriamoci su quante volte compare il fattore 2. In p^2 il 2 compare il doppio delle volte che compare in p: in particolare, in p^2 il 2 compare un numero pari di volte. Invece, in $2q^2$ compare una volta nel coefficiente e poi un numero pari di volte in q^2: in totale un numero dispari di volte. Ora, la scomposizione in fattori primi è unica. Dunque non è possibile che il fattore 2 compaia un numero pari e dispari di volte allo stesso tempo. □



Corre voce che gli antichi egiziani avessero escogitato un modo pratico ed economico per tracciare sul terreno un angolo retto, usando una corda che fosse divisa da dei nodi in $3 + 4 + 5$ tratti di uguale lunghezza. Se unita ai due estremi e tirata verso l'esterno in nodi opportuni, la corda si dispone in un bel triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5. Si tratta della famosa terna pitagorica

$$3^2 + 4^2 = 5^2\,.$$

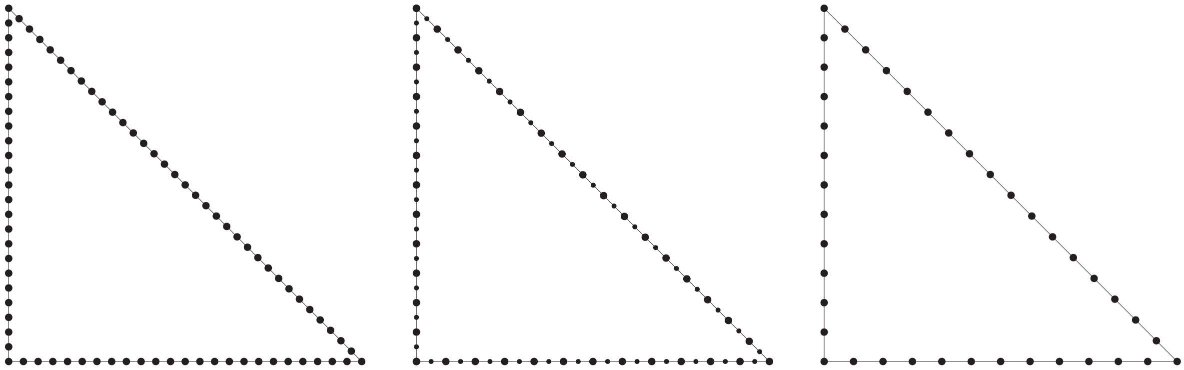
Problema: esiste un modo di dividere la corda in tratti uguali di modo che il triangolo che ne viene sia rettangolo e e abbia *i due cateti uguali*? Tornerebbe comodo per tracciare la base di una piramide.

Vediamo un po': sia q il numero di tratti in un cateto, ancora q quelli nell'altro cateto, e p quelli nell'ipotenusa (o, se si preferisce, due lati e diagonale di un quadrato). Per il teorema di Pitagora si ha che $q^2 + q^2 = p^2$, cioè $2q^2 = p^2$, ossia $2 = p^2/q^2 = (p/q)^2$. Insomma, bisogna che

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}\,.$$

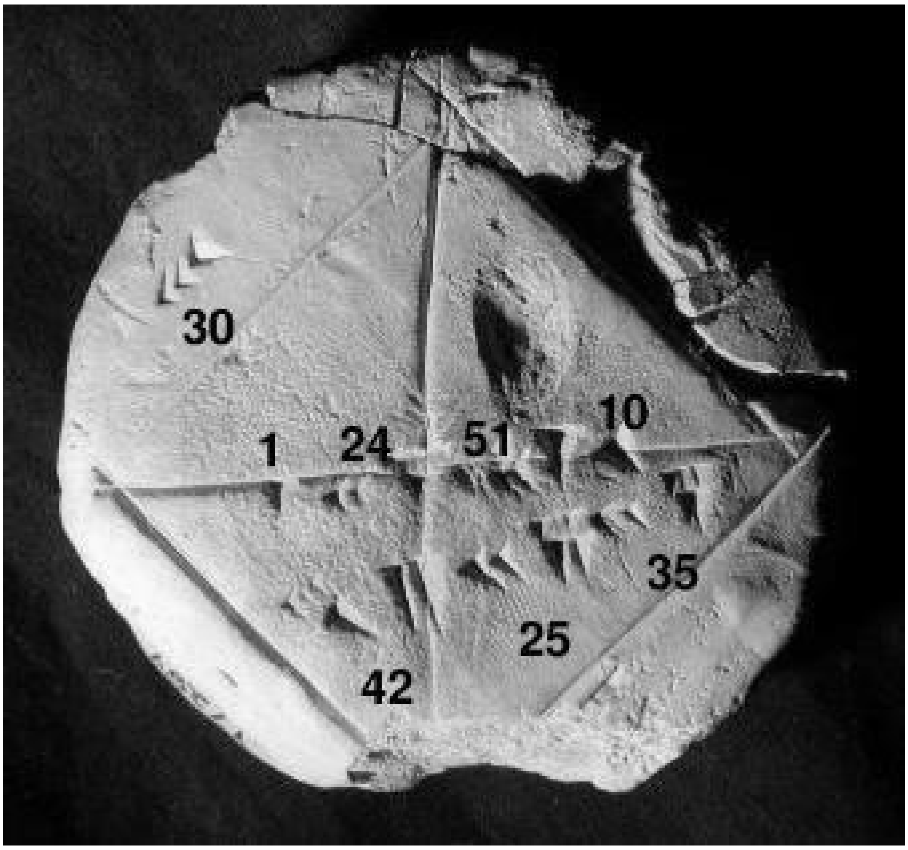
Abbiamo visto sopra che non esistono p e q con tali proprietà. A un certo punto di quella dimostrazione avevamo visto che se $p/q = \sqrt{2}$ allora p e q sono necessariamente entrambi pari e il rapporto delle loro metà è pure uguale a $\sqrt{2}$. Tradotto in termini di triangoli e corde, questo vuol dire che se ci càpita una $q+q+p$ che risolva il problema, allora senza fatica ne troviamo una più economica semplicemente dimezzando il numero di tratti; risparmiamo ancora di più dimezzando ancora, e poi ancora, ecc. Qualcosa non torna.

Nella figura seguente si è barato: i tratti sui cateti e quelli sulla diagonale non sono esattamente della stessa lunghezza.



Data una soluzione, i tratti sono pari. Bastavano metà tratti.

Esercizio (facoltativo, di trigonometria). Con una corda divisa in $12 + 12 + 17$ tratti uguali si tira in un triangolo isoscele con un angolo molto vicino a 90 gradi. Di quanti gradi, primi, secondi è l'errore?



La tavoletta babilonese YBC 7289 (circa 1600–1800 a.C.)
che riporta un valore approssimato di $\sqrt{2}$ in base sessagesimale (da Wikipedia)

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.41421296\ldots$$