La misura di Lebesgue

Gianluca Gorni
Università di Udine

12 gennaio 2013

Costruiremo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ usando in modo essenziale le coordinate canoniche. Lo studio di come cambia la misura al cambiare delle coordinate è non banale. La dimensione dello spazio sarà N maiuscolo per tenerci la variabile n libera per le successioni.

Il risultato principale che vogliamo dimostrare è il seguente.

Teorema 0.1. *Esiste una σ-algebra $\mathcal{L}$ su $\mathbb{R}^N$, contenente i boreliani e una misura positiva $\lambda\colon \mathcal{L} \to [0,+\infty]$ tali che se $I_1, \dots, I_N$ sono intervalli di $\mathbb{R}$ allora la misura del prodotto cartesiano $\lambda(I_1 \times \dots \times I_N)$ coincide col prodotto delle lunghezze degli intervalli.*

1 Rettangoli e insiemi elementari

Definizione 1.1. Chiameremo *rettangolo* (o anche pluriintervallo, o cuboide, o parallelepipedo, o scatola, in inglese *box*) in $\mathbb{R}^N$ qualsiasi prodotto cartesiano di N intervalli di $\mathbb{R}$.

Nel seguito riserveremo tacitamente la lettera R maiuscola per i rettangoli. Sono permessi anche rettangoli illimitati; per esempio $\mathbb{R}^N$ è esso stesso un rettangolo. In dimensione 1 i rettangoli sono semplicemente gli intervalli. In dimensione 3 una parola più appropriata sarebbe cuboidi. Vedi figura 1.

La parte interna e la chiusura di un rettangolo sono ancora rettangoli. L'intersezione di due rettangoli è un rettangolo. Il complemento di un rettangolo, l'unione e la differenza di due rettangoli di solito non sono rettangoli. Il traslato di un rettangolo è un rettangolo.

Definizione 1.2. Chiameremo *insieme elementare* di $\mathbb{R}^N$ ogni unione di un numero *finito* di rettangoli di $\mathbb{R}^N$.

Vedi figura 2. Useremo le lettere S, T per gli insiemi elementari.

Proposizione 1.3. *La famiglia degli insiemi elementari di $\mathbb{R}^N$ è stabile per unioni e intersezioni finite.*

Dimostrazione. Siano $S = R_1 \cup \dots \cup R_n$, $T = R'_1 \cup \dots \cup R'_m$ due insiemi elementari. È ovvio che l'unione $S \cup T$ è elementare. Per l'intersezione usiamo la proprietà distributiva

$$S \cap T = \left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} R'_i\Big) = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} R_i \cap R'_j \tag{1}$$

e il fatto che l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo. $\square$

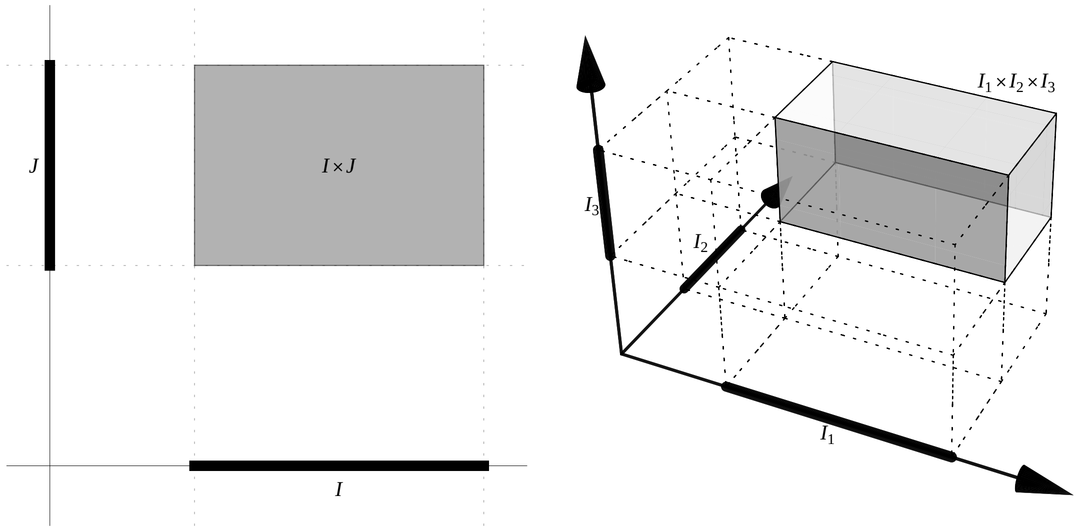

Figura 1: Un rettangolo in dimensione 2 e uno in dimensione 3

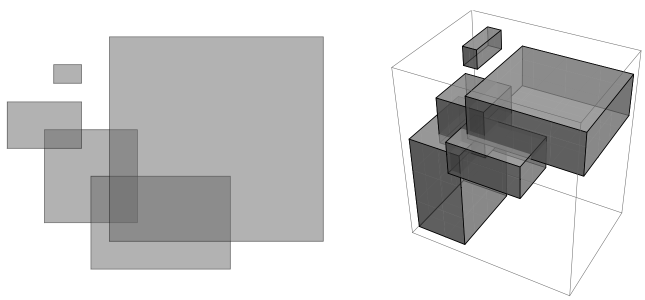

Figura 2: Un insieme elementare in dimensione 2 e uno in dimensione 3

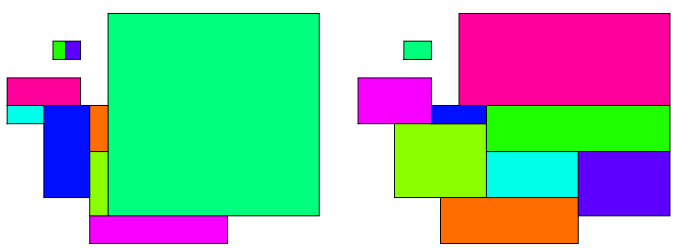

Figura 3: Due diverse scomposizioni dell'insieme elementare a sinistra della figura 2 in rettangoli a due a due disgiunti

La famiglia degli insiemi elementari di $\mathbb{R}^N$ non è stabile per unioni o intersezioni numerabili. Per esempio $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è unione di una famiglia numerabile di intervalli, ma non è un insieme elementare. Oppure il disco unitario aperto $x^2 + y^2 < 1$ di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli, ma non è un insieme elementare.

Un insieme elementare si può sempre scrivere come unione di una famiglia di rettangoli *a due a due disgiunti*, ma non in modo unico (figura 3). Particolarmente versatili saranno le suddivisioni che chiameremo "a scacchiera".

Proposizione 1.4. *Data una famiglia finita $I_1, \ldots, I_n$ di intervalli, esiste un'altra famiglia finita (non unica) di intervalli $I'_1, \ldots, I'_m$ a due a due disgiunti, con la stessa unione, e inoltre tali che per ogni I_i e I'_k, si ha che o $I'_k \subseteq I_i$ oppure $I'_k \cap I_i = \varnothing$.*

Dimostrazione. Siano $a_i \leq b_i$ gli estremi di I_i (eventualmente infiniti). Mettiamo in un insieme tutti gli a_i e tutti i b_i, eliminando le eventuali duplicazioni. Rinominiamo gli elementi di questo insieme di numeri in ordine crescente $x_1 < x_2 < \cdots < x_{m_0}$. Consideriamo la famiglia $\mathcal{T}$ formata dai singoletti $\{x_j\}$ (eccetto quando $x_j = \pm\infty$) e dagli intervalli aperti $]x_j, x_{j+1}[$. Chiaramente ogni elemento di $\mathcal{T}$ è o contenuto in I_i oppure da lui disgiunto, e ognuno degli I_i è unione di uno o più intervalli di $\mathcal{T}$. Eliminando gli eventuali intervalli di $\mathcal{T}$ che non siano contenuti nell'unione $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ si ottiene una famiglia di intervalli con la proprietà desiderata. $\square$

Per non complicare troppo le notazioni la prossima nozione di famiglia a scacchiera sarà definita con precisione solo nel caso di $N = 2$, ma si intuirà come estenderla a dimensione $N > 2$. Nel caso $N = 1$, una famiglia di intervalli sarà a scacchiera semplicemente quando gli elementi sono a due a due disgiunti.

Definizione 1.5. Una famiglia finita di rettangoli piani $\mathcal{F}$ (tutti distinti) sarà detta "a scacchiera" se ogniqualvolta $I \times J \in \mathcal{F}$ e $I' \times J' \in \mathcal{F}$, necessariamente I e I' o coincidono o sono disgiunti, J e J' o coincidono o sono disgiunti, e inoltre anche $I \times J' \in \mathcal{F}$ e $I' \times J \in \mathcal{F}$.

Si noti che non è richiesto che l'unione di una famiglia a scacchiera abbia per unione un rettangolo, nonostante il nome lo potrebbe far pensare.

Una famiglia di rettangoli a scacchiera si può scrivere più convenientemente nella forma di famiglia *a due indici* $\{I_i \times J_j \mid i = 1, \ldots, n_1,\ j = 1, \ldots, n_2\}$ con gli I_i a due a due disgiunti (senza ripetizioni) e i J_j pure.

Data un rettangolo R e una famiglia a scacchiera $R_{i,j}$, la sottofamiglia formata dagli $R_{i,j}$ che sono contenuti in R è ancora a scacchiera.

Proposizione 1.6. *Data una famiglia finita di rettangoli piani $R_1, \ldots, R_n$, esiste una famiglia a scacchiera $I_i \times J_j$ "compatibile con gli R_k", cioè tale che ogni intersezione del tipo $(I_i \times J_j) \cap R_k$ o coincida con $I_i \times J_j$ o sia vuota, e inoltre ciascuno degli R_k sia contenuto nell'unione della famiglia a scacchiera.*

Dimostrazione. Il rettangolo R_i sia $I_i \times J_i$. Applicando la Proposizione 1.4 otteniamo degli intervalli $I'_1, \ldots, I'_{m_1}$ a due a due disgiunti con la proprietà che ogni intersezione del tipo $I'_k \cap I_i$ sia o vuota oppure I'_k. Similmente esistono intervalli $J'_1, \ldots, J'_{m_2}$ a due a due disgiunti con la proprietà che ogni intersezione del tipo $J'_l \cap J_i$ sia o vuota oppure J''_l. La famiglia dei prodotti $I'_k \times J'_l$, al variare di j, l, ha le proprietà richieste. Vedi figura 5. $\square$

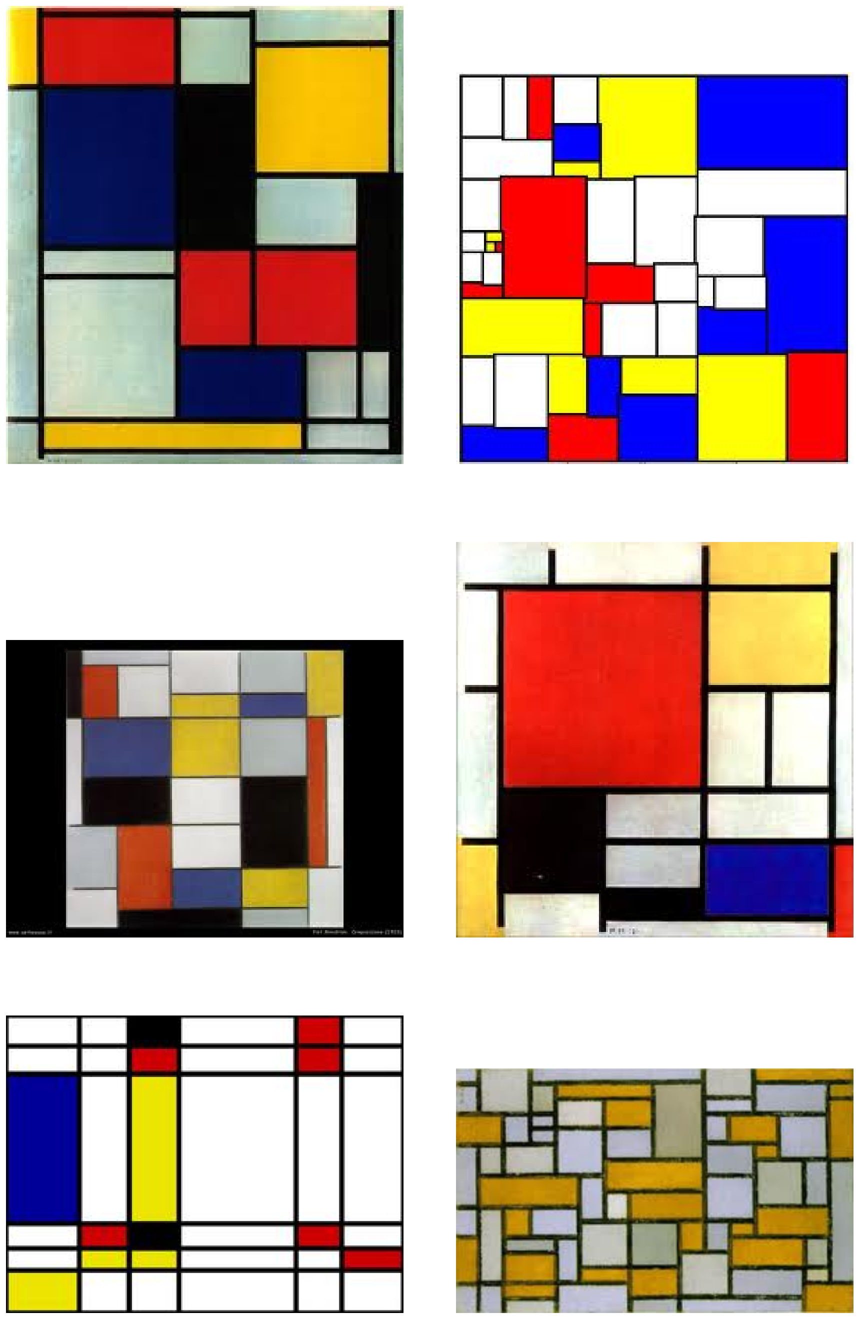

Figura 4: Quali fra questi quadri di Mondrian, o pseudo-Mondrian, dipingono famiglie di rettangoli? A due a due disgiunti? Quali sono a scacchiera?

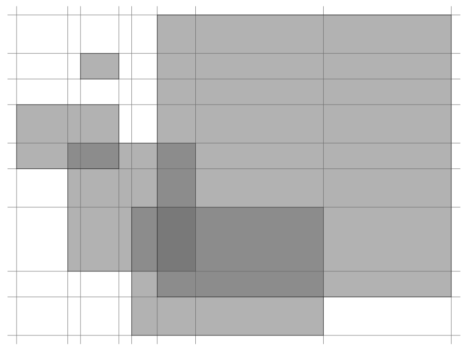

Figura 5: Famiglia a scacchiera compatibile con l'insieme elementare piano della figura 2

Proposizione 1.7. *La famiglia degli insiemi elementari di* $\mathbb{R}^N$ *è stabile per complementi e differenze.*

Dimostrazione. Sia $S = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ un insieme elementare. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia a scacchiera compatibile con $\{R_1, \ldots, R_n, \mathbb{R}^N\}$. Allora il complemento $\mathbb{R}^N \setminus S$ si può scrivere come $\bigcup\{R \in \mathcal{F} \mid R \cap S = \varnothing\}$, e quindi è elementare. Se T è un altro insieme elementare, allora $S \setminus T = S \cap (\mathbb{R}^N \setminus T)$ è pure elementare. □

Proposizione 1.8. *La frontiera, la parte interna e la chiusura di un insieme elementare sono pure insiemi elementari.*

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 1.9. *Data una famiglia finita o numerabile* $R_1, R_2, \ldots$ *di rettangoli, esiste un'altra famiglia equipotente (non unica) di insiemi elementari* $S_1, S_2, \ldots$ *a due a due disgiunti, con la stessa unione, e inoltre tali che* $S_i \subseteq R_i$ *per ogni* i*.*

Dimostrazione. Usiamo la ben nota formula insiemistica possiamo scrivere un'unione non disgiunta come un'unione disgiunta di differenze:

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \cdots = R_1 \cup (R_2 \setminus R_1) \cup \big(R_3 \setminus (R_1 \cup R_2)\big) \cup \ldots \tag{2}$$

Basta porre $S_1 = R_1$, $S_i = R_i \setminus (R_1 \cup \cdots \cup R_{i-1})$. □

Proposizione 1.10. *Ogni rettangolo anche non limitato è l'unione di una famiglia numerabile di rettangoli limitati a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia numerabile dei quadratini ad estremi interi

$$\Omega := \big\{x + [0,1[^N \mid x \in \mathbb{Z}^N\big\} \tag{3}$$

(la chiameremmo a scacchiera sennonché non è finita). Questa famiglia forma una partizione di $\mathbb{R}^N$ in quadrati. Se R_0 è un rettangolo (limitato o no), lo si può scrivere come unione della famiglia di rettangoli limitati a due a due disgiunti (molti eventualmente vuoti) $\{R_0 \cap R \mid R \in \Omega\}$. □

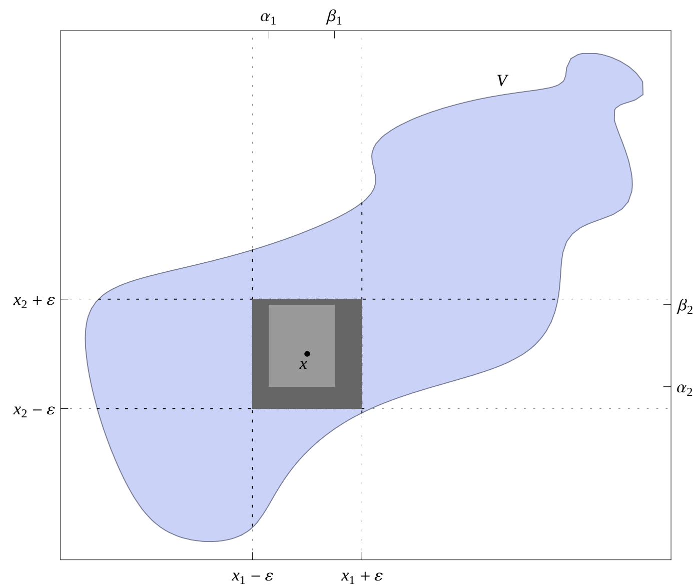

Figura 6: Rettangoli contenenti x e contenuti nell'aperto V.

Proposizione 1.11. *Ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ si può scrivere come unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti.*

Dimostrazione. Sia V un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$. Sia $\mathcal{V}$ la famiglia dei rettangoli aperti $I_1 \times \cdots \times I_N$ che sono contenuti in V e per i quali gli estremi degli intervalli I_i sono tutti razionali. Questa $\mathcal{V}$ è chiaramente numerabile, perché ogni suo elemento è individuato univocamente dall'elenco degli estremi degli intervalli, cioè da un punto dell'insieme $\mathbb{Q}^{2N}$, che è numerabile. Chiaramente l'unione dei rettangoli di $\mathcal{V}$ è contenuta in V. Per provare l'inclusione inversa, sia $x = (x_1, \ldots, x_N) \in V$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\|y - x\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow y \in V$ per ogni $y \in \mathbb{R}^N$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esistono $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$ tali che $x_i - \varepsilon \leq \alpha_i < x_i < \beta_i \leq x_i + \varepsilon$ per ogni $i = 1, \ldots, N$. Se poniamo $U :=]\alpha_1, \beta_1[\times \cdots \times]\alpha_N, \beta_N[$, vediamo che $U \in \mathcal{V}$ e $U \subseteq V$. Vedi figura 6 □

Esercizio 1.12. Ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ è unione di una famiglia al più numerabile di rettangoli a due a due disgiunti.

2 Volume di rettangoli e di insiemi elementari

Definizione 2.1. Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, la sua *lunghezza* $\ell(I)$ sarà 0 se $I = \varnothing$, o altrimenti $\ell(I) = \sup I - \inf I$.

La lunghezza di un intervallo è un numero reale esteso in $[0, +\infty]$. Nel seguito vige la convenzione che nei calcoli algebrici $0 \cdot \infty = 0$ (non nel calcolo dei limiti!).

La seguente definizione generalizza a dimensione N la regola elementare che l'area di un rettangolo piano è il prodotto di base per altezza.

Definizione 2.2. Chiameremo *volume* di un rettangolo il prodotto delle lunghezze degli intervalli costituenti. Useremo il simbolo $\operatorname{vol} R$ per il volume del rettangolo R.

Osserviamo che un rettangolo non vuoto identifica univocamente gli intervalli di cui è prodotto cartesiano (sono le sue proiezioni sugli assi). Il rettangolo vuoto si può scrivere in diversi modi come prodotto, ma almeno uno dei fattori è sempre vuoto, per cui il volume viene comunque zero. In dimensione 1 il volume è semplicemente la lunghezza. In dimensione 2 è l'area. Potremmo esplicitare la dimensione dello spazio nella notazione, scrivendo per esempio $\operatorname{vol}_N R$, ma se ne può fare a meno senza incorrere in ambiguità. In formule, se $I_1, \dots, I_N$ sono intervalli

$$\operatorname{vol} I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N = \ell(I_1)\ell(I_2)\cdots\ell(I_N)\,. \tag{4}$$

È chiaro che $\operatorname{vol}\varnothing = 0$, e che $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \operatorname{vol} R_1 \leq \operatorname{vol} R_2$. Inoltre $\operatorname{vol} R = 0$ quando uno degli intervalli del prodotto cartesiano che definisce R è ridotto a un solo punto, anche qualora R fosse illimitato. Il volume della parte interna o della chiusura di R coincide col volume di R. Traslando un rettangolo il volume non cambia.

È fondamentale il fatto che il volume può essere esteso agli insiemi elementari. Lo si potrebbe dare per intuitivo, ma qui per scrupolo proviamo a ricondurlo a identità algebriche: somme telescopiche e proprietà distributiva.

Lemma 2.3. *Sia I un intervallo, e siano $I_1, \dots, I_n$ degli intervalli a due a due disgiunti la cui unione è I. Allora $\ell(I) = \ell(I_1) + \cdots + \ell(I_n)$.*

Dimostrazione. Siano $a \leq b$ gli estremi di I, mentre gli estremi di I_i siano $a_i \leq b_i$ (estremi eventualmente infiniti). Poiché gli I_i sono a due a due disgiunti, possiamo riindicizzarli in modo che $b_i \leq a_{i+1}$. Poiché l'unione degli I_i è connessa, necessariamente $b_i = a_{i+1}$, $a_1 = a$, $b_n = b$. Allora l'equazione $\ell(I) = \ell(I_1) + \cdots + \ell(I_n)$ diventa

$$\begin{aligned} b - a &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) = \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n), \end{aligned}$$

che è vera perché è semplicemente una somma telescopica. $\square$

Lemma 2.4. *Sia R_0 un rettangolo, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di rettangoli a scacchiera la cui unione è R_0. Allora $\operatorname{vol} R_0 = \sum_{R\in\mathcal{F}} \operatorname{vol} R$.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione soltanto in $\mathbb{R}^2$. Sia $R_0 = I \times J$. La famiglia a scacchiera $\mathcal{F}$ si può indicizzare come l'insieme dei prodotti cartesiani $I_i \times J_j$ al variare di $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_2$, dove gli I_i formano una partizione di I in intervalli e i J_j formano una partizione di J in intervalli. Eventualmente rimescolando gli indici, come nel lemma precedente, possiamo supporre che gli estremi di I_i siano $x_i \leq x_{i+1}$ e quelli di J_j siano $y_j \leq y_{j+1}$. Vedi figura 7. Allora applicando la somma telescopica e la proprietà distributiva l'equazione $\operatorname{vol} R_0 = \sum_{R\in\mathcal{F}} \operatorname{vol} R$ risulta verificata:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} R_0 = (x_{n+1} - x_1)(y_{m+1} - y_1) &= \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) \times \sum_{j=1}^{m}(y_{j+1} - y_j) = \\ = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) &= \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \operatorname{vol}(I_i \times J_j) = \sum_{R\in\mathcal{F}} \operatorname{vol} R\,. \end{aligned}$$

$\square$

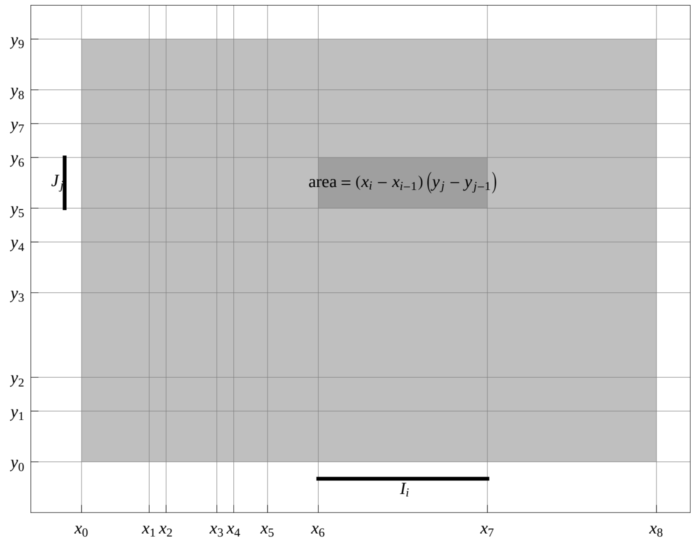

Figura 7: Rettangolo (grigio chiaro) suddiviso a scacchiera

Proposizione 2.5. *Siano $R_1, \dots, R_n$ una famiglia di rettangoli a due a due disgiunti. Sia $R'_1, \dots, R'_m$ un'altra famiglia di rettangoli, questa volta non necessariamente a due a due disgiunti. Se $R_1 \cup \dots \cup R_n \subseteq R'_1 \cup \dots \cup R'_m$, allora vale la disuguaglianza della somma dei volumi:*

$$\operatorname{vol} R_1 + \dots + \operatorname{vol} R_n \le \operatorname{vol} R'_1 + \dots + \operatorname{vol} R'_m \,. \tag{5}$$

Dimostrazione. Applicando la Proposizione 1.6 otteniamo una terza famiglia finita di rettangoli, che indicheremo con $\mathcal{F}$ (non c'è bisogno di indicizzarla), a scacchiera e compatibile con entrambe le famiglie iniziali. Per ogni $i = 1, \dots, n$ consideriamo la famiglia $\mathcal{F}_i$ formata da quei rettangoli di $\mathcal{F}$ che sono contenuti in R_i, nonché la sottofamiglia $\mathcal{F}'_j$ formata da quei rettangoli di $\mathcal{F}$ che sono contenuti in R'_j. Ognuna delle sottofamiglie $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}'_j$ è a scacchiera, per cui

$$\operatorname{vol} R_i = \sum_{R \in \mathcal{F}_i} \operatorname{vol} R \,, \qquad \operatorname{vol} R'_j = \sum_{R \in \mathcal{F}'_j} \operatorname{vol} R \,.$$

Le sottofamiglie $\mathcal{F}_i$ sono a due a due disgiunte, per cui

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol} R_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{R \in \mathcal{F}_i} \operatorname{vol} R = \sum_{R \in \bigcup_i \mathcal{F}_i} \operatorname{vol} R \,.$$

Le sottofamiglie $\mathcal{F}'_j$ non è detto che siano a due a due disgiunte, per cui

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol} R'_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{R \in \mathcal{F}'_j} \operatorname{vol} R \ge \sum_{R \in \bigcup_j \mathcal{F}'_j} \operatorname{vol} R \,.$$

Infine l'unione $\bigcup_j \mathcal{F}'_j$ contiene l'unione $\bigcup_i \mathcal{F}_i$, per cui

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol} R'_j \geq \sum_{R\in\bigcup_j \mathcal{F}'_j} \operatorname{vol} R \geq \sum_{R\in\bigcup_i \mathcal{F}_i} \operatorname{vol} R = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol} R_i\,.$$

□

Proposizione 2.6. *Siano $R_1,\dots,R_n$ una famiglia di rettangoli a due a due disgiunti. Sia $R'_1,\dots,R'_m$ un'altra famiglia di rettangoli a due a due disgiunti. Se $R_1\cup\dots\cup R_n = R'_1\cup\dots\cup R'_m$, allora le somme dei volumi sono uguali:*

$$\operatorname{vol} R_1 + \dots + \operatorname{vol} R_n = \operatorname{vol} R'_1 + \dots + \operatorname{vol} R'_m\,. \tag{6}$$

Dimostrazione. Basta riapplicare la Proposizione 2.5 scambiando i ruoli fra le due famiglie di rettangoli. □

Grazie alla proposizione precedente potremo assegnare un volume ben definito a tutti gli insiemi elementari. Questo volume è non negativo (ovviamente), finitamente additivo e monotono:

Corollario 2.7. *Siano S,T due insiemi elementari. Se sono disgiunti allora* $\operatorname{vol} S\cup T = \operatorname{vol} S + \operatorname{vol} T$. *Se $S\subseteq T$, allora* $\operatorname{vol} S \leq \operatorname{vol} T$. *In generale vale la subadditività finita* $\operatorname{vol}(S\cup T)\leq \operatorname{vol} S + \operatorname{vol} T$.

Dimostrazione. Siano S,T disgiunti. Siano $\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T$ due famiglie di rettangoli che partizionano rispettivamente S e T. Le due famiglie $\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T$ sono ovviamente disgiunte, e la famiglia $\mathcal{F}_S\cup\mathcal{F}_T$ partiziona $S\cup T$. Quindi

$$\operatorname{vol} S\cup T = \sum_{R\in\mathcal{F}_S\cup\mathcal{F}_T} \operatorname{vol} R = \sum_{R\in\mathcal{F}_S} \operatorname{vol} R + \sum_{R\in\mathcal{F}_T} \operatorname{vol} R = \operatorname{vol} S + \operatorname{vol} T\,. \tag{7}$$

Supponiamo invece che $S\subseteq T$. Allora S è disgiunto da $T\setminus S$, per cui $\operatorname{vol} T = \operatorname{vol} S\cup(T\setminus S) = \operatorname{vol} S + \operatorname{vol}(T\setminus S)\geq \operatorname{vol} S$. Oppure si può applicare la Proposizione 2.5. Per la subadditività finita basta osservare che $\operatorname{vol}(S\cup T) = \operatorname{vol}(S\cup(T\setminus S)) = \operatorname{vol} S + \operatorname{vol}(T\setminus S)\leq \operatorname{vol} S + \operatorname{vol} T$, in quanto S è disgiunto da $T\setminus S$, il quale a sua volta è contenuto in T. □

Il volume della frontiera di un insieme elementare è zero. Chiusura e parte interna di un insieme elementare hanno lo stesso volume dell'insieme.

Proposizione 2.8. *Il volume di un insieme elementare S coincide con l'estremo superiore dei volumi degli insiemi elementari compatti contenuti in S.*

Proposizione 2.9. *Ogni rettangolo è l'unione di una famiglia numerabile di rettangoli limitati a due a due disgiunti, la somma dei cui volumi è uguale al volume del rettangolo iniziale.*

Dimostrazione. Riprendiamo la famiglia numerabile dei quadratini ad estremi interi Ω della proposizione 1.10. Se R_0 è un rettangolo (limitato o no), lasciamo al lettore la verifica che $\operatorname{vol} R_0 = \sum_{R\in\Omega} \operatorname{vol}(R_0\cap R)$. Osserviamo che questo volume o è zero o è infinito. □

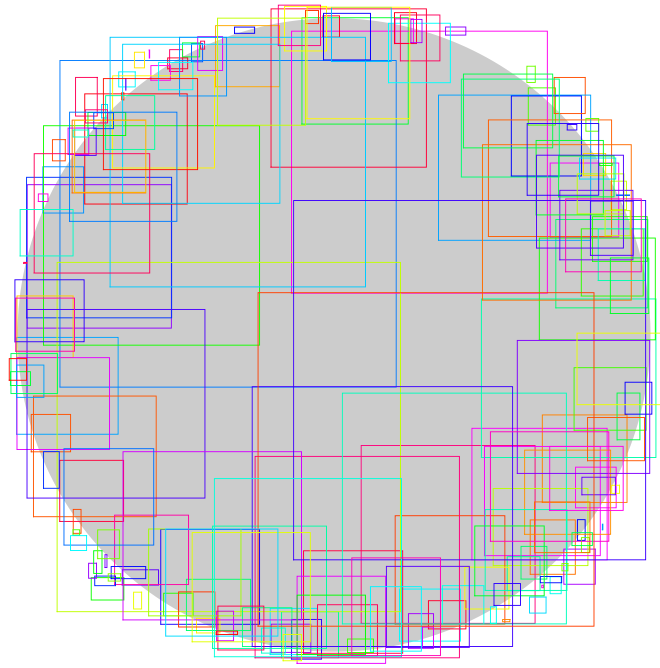

Figura 8: Un ricoprimento semicasuale di un disco con rettangoli

3 La misura esterna di Lebesgue

Definizione 3.1. Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$, diremo che la famiglia numerabile di rettangoli $\{R_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento di E con rettangoli se $E \subseteq \bigcup_n R_n$. Nel seguito quando parleremo di ricoprimenti sottintenderemo che sono formati da rettangoli.

Notare che non chiediamo in generale che i ricoprimenti siano formati da rettangoli a due a due disgiunti. Nella figura 8 si vede un ricoprimento di un disco con rettangoli a due a due tutt'altro che disgiunti.

Definizione 3.2. Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$, chiameremo *misura esterna di Lebesgue* di E la quantità

$$\lambda^*(E) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \;\middle|\; \text{gli } R_n \text{ ricoprono } E\right\} = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \;\middle|\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \supseteq E\right\}. \tag{8}$$

Chiaramente $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$. Quando E è limitato la sua misura esterna è finita, perché fra i possibili ricoprimenti c'è per esempio quello formato da un rettangolo limitato opportuno seguito da infiniti vuoti. La λ^* è chiamata misura esterna perché è basata su approssimazioni dell'insieme per eccesso. Si potrebbe immaginare ingenuamente anche una misura interna, basata su approssimazioni dell'insieme per difetto, usando unioni di rettangoli contenute nell'insieme. Si dà il caso però che gli insiemi che si prestano a essere approssimati dall'interno in questo modo sono troppo pochi, e non portano alla teoria di Lebesgue.

È un fatto profondo che la misura esterna di Lebesgue non è una misura numerabilmente additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Tuttavia ha in comune con le misure le seguenti proprietà.

Proposizione 3.3. *La misura esterna di Lebesgue gode delle proprietà seguenti:*

- $\lambda^*(\varnothing) = 0$,
- *monotonia: se* $E \subseteq F$ *allora* $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(F)$,
- *subadditività numerabile: se* $E_n \subseteq \mathbb{R}^N$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *allora*

$$\lambda^*\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Bigr) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(E_n) \tag{9}$$

Dimostrazione. Fra tutti i ricoprimenti dell'insieme vuoto c'è in particolare quello formato da rettangoli R_n tutti vuoti, che hanno volume nullo. Quindi l'estremo inferiore delle somme dei volumi al variare di tutti i ricoprimenti è zero.

Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento di F è pure un ricoprimento di E, per cui

$$\Bigl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \Bigm| \text{gli } R_n \text{ ricoprono } E\Bigr\} \supseteq \Bigl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \Bigm| \text{gli } R_n \text{ ricoprono } F\Bigr\},$$

dal quale segue la disuguaglianza degli inf

$$\lambda^*(E) = \inf\Bigl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \Bigm| \text{gli } R_n \text{ ricoprono } E\Bigr\} \leq \inf\Bigl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \Bigm| \text{gli } R_n \text{ ricoprono } F\Bigr\} = \lambda^*(F)\,.$$

La disuguaglianza (9) di subadditività è vera banalmente quando almeno uno fra gli E_n ha misura esterna infinita. Supponiamo quindi che $\lambda^*(E_n) < +\infty$ per ogni n, e prendiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di misura esterna per ogni n esiste una famiglia numerabile di rettangoli $\{R_{n,i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ tale che

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_{n,i} \supseteq E_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_{n,i} \leq \lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,.$$

La famiglia numerabile a due indici $\{R_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ ricopre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e

$$\lambda^*\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Bigr) \leq \sum_{n,i\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_{n,i} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_{n,i} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \Bigl(\lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Bigr) \leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(E_n)\,.$$

Valendo questo per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo la tesi. □

Osservazione 3.4. Traslando un insieme la misura esterna non cambia.

Osservazione 3.5. Nella definizione della misura esterna, l'estremo inferiore non cambia se si richiede che i rettangoli che ricoprono E siano *limitati*. Infatti per la Proposizione 2.9 ogni rettangolo R_n di un ricoprimento di E si può scrivere come $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_{n,i}$ con $R_{n,i}$ rettangoli limitati, e $\operatorname{vol} R_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_{n,i}$. Al variare dei due indici $n, i \in \mathbb{N}$, i rettangoli $R_{n,i}$ ricoprono E e $\sum_{n,i} \operatorname{vol} R_{n,i} = \sum_n \sum_i \operatorname{vol} R_{n,i} = \sum_n \operatorname{vol} R_n$.

Osservazione 3.6. Nella definizione della misura esterna, l'estremo inferiore non cambia se si richiede che i rettangoli che ricoprono E siano *aperti*. Sia infatti $\varepsilon > 0$. Per l'osservazione precedente esiste una famiglia R_n di rettangoli limitati che ricoprono E e tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n < \lambda^*(E) + \varepsilon. \tag{10}$$

Poiché R_n è limitato, esiste un rettangolo aperto R'_n contenente R_n e tale che $\operatorname{vol} R'_n < \operatorname{vol} R_n + \varepsilon/2^{n+1}$. Allora gli R'_n ricoprono anch'essi E e

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R'_n < \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\operatorname{vol} R_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Big) \leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n < \lambda^*(E) + 2\varepsilon$$

Effettivamente la misura esterna $\lambda^*(E)$ è approssimabile a piacere usando ricoprimenti con rettangoli aperti.

Proposizione 3.7. *Se S è un insieme elementare, allora $\lambda^*(S) = \operatorname{vol} S$.*

Dimostrazione. Siano $R_1, \dots, R_{n_0}$ rettangoli a due a due disgiunti la cui unione è S. Possiamo farli diventare una successione aggiungendo infiniti vuoti. Quindi

$$\lambda^*(S) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n = \operatorname{vol} R_1 + \cdots + \operatorname{vol} R_{n_0} + 0 + 0 + \cdots = \operatorname{vol} S\,. \tag{11}$$

Per dimostrare la disuguaglianza nell'altro senso, supponiamo dapprima che S sia compatto. In particolare $\lambda^*(S) < +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$. Per l'osservazione 3.6, esiste un ricoprimento di S con rettangoli R_n aperti tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n < \lambda^*(S) + \varepsilon\,. \tag{12}$$

Poiché S è compatto, esiste un n_0 tale che bastano i rettangoli $R_1, \dots R_{n_0}$ a ricoprire S, per cui

$$\sum_{n=0}^{n_0} \operatorname{vol} R_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n < \lambda^*(S) + \varepsilon\,. \tag{13}$$

Per la monotonia e la subadditività finita del volume sugli insiemi elementari (Corollario 2.7), possiamo scrivere che

$$\operatorname{vol} S \leq \operatorname{vol}\Big(\bigcup_{n=0}^{n_0} R_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{n_0} \operatorname{vol} R_n < \lambda^*(S) + \varepsilon\,. \tag{14}$$

Valendo questo per ogni $\varepsilon > 0$ concludiamo che $\operatorname{vol} S \leq \lambda^*(S)$.

Nel caso in cui S sia un insieme elementare generico, possiamo usare la Proposizione 2.8 e la monotonia di λ^*:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} S &= \sup\big\{\operatorname{vol} S' \mid S \supseteq S' \text{ elementare compatto}\big\} = \\ &= \sup\big\{\lambda^*(S') \mid S \supseteq S' \text{ elementare compatto}\big\} \leq \\ &\leq \lambda^*(S)\,.\end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 3.8. Se R_1, R_2 sono rettangoli fra loro disgiunti, e $E_1 \subseteq R_1$, $E_2 \subseteq R_2$, allora $\lambda^*(E_1 \cup E_2) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Si generalizza al caso numerabile?

Esercizio 3.9. Se le chiusure di E_1 e di E_2 sono compatte e disgiunte, allora $\lambda^*(E_1 \cup E_2) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$.

4 Insiemi misurabili

Definizione 4.1 (Carathéodory 1918)**.** Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ sarà detto *misurabile* (secondo Lebesgue) se per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ accade che

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)\,. \tag{15}$$

L'insieme dei sottinsiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ sarà indicato con $\mathcal{L}_N$, o più semplicemente $\mathcal{L}$.

Osservazione 4.2. Equivalentemente, un insieme A è misurabile se ogniqualvolta E è in A e F è fuori da A allora $\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$.

Osservazione 4.3. La disuguaglianza

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A) \tag{16}$$

è sempre verificata, perché la misura esterna è subadditiva. Il problema è la disuguaglianza nell'altro verso.

Osservazione 4.4. L'uguaglianza (15) è sempre verificata qualora $\lambda^*(E) = +\infty$, grazie alla (16). Quindi nella definizione di misurabilità ci si potrebbe restringere a chiedere l'uguaglianza per i soli insiemi E con misura esterna finita.

Esercizio 4.5. Se A, E sono disgiunti e A è misurabile, allora $\lambda^*(A \cup E) = \lambda^*(A) + \lambda^*(E)$.

Proposizione 4.6. *Se $\lambda^*(A) = 0$ allora A è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si ha $E \cap A \subseteq A$, per cui $\lambda^*(E \cap A) \leq \lambda^*(A) = 0$. Inoltre $E \setminus A \subseteq E$, per cui $\lambda^*(E \setminus A) \leq \lambda^*(E)$, di nuovo per la monotonia. Quindi dalla (16)

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(E) = 0 + \lambda^*(E) = \lambda^*(E)\,. \tag{17}$$

Essendo uguali il primo e l'ultimo membro concludiamo che vale l'uguaglianza (15) che definisce la misurabilità. □

Lemma 4.7. *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se e solo se per ogni insieme elementare S si ha che*

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \setminus A)\,. \tag{18}$$

Dimostrazione. Se A è misurabile, allora la (18) è semplicemente un caso particolare della (15). Viceversa, supponiamo che valga la (18) per ogni insieme elementare S, e sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ con misura esterna finita, e sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di misura esterna, esiste una successione di rettangoli R_n che ricopre E e tali che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n < \lambda^*(E) + \varepsilon\,.$$

Applicando la (18) con $S = R_n$ otteniamo $\lambda^*(R_n) = \lambda^*(R_n \cap A) + \lambda^*(R_n \setminus A)$, da cui, sommando membro a membro su $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(R_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(R_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(R_n \setminus A)\,. \tag{19}$$

Usiamo ora il fatto che la misura esterna dei rettangoli coincide col volume, e la subadditività e la monotonia della misura esterna:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E) + \varepsilon > \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(R_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(R_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(R_n \setminus A) \geq \\
&\geq \lambda^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_n \cap A)\Big) + \lambda^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_n \setminus A)\Big) = \\
&= \lambda^*\Big(\Big(\bigcup R_n\Big) \cap A\Big) + \lambda^*\Big(\Big(\bigcup R_n\Big) \setminus A\Big) \geq \\
&\geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)
\end{aligned}$$

Valendo questo per ogni $\varepsilon > 0$ deduciamo che $\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)$, da cui segue la (15). □

Proposizione 4.8. *Gli insiemi elementari sono misurabili.*

Dimostrazione. Quando A è un insieme elementare, l'uguaglianza (18) diventa

$$\operatorname{vol} S = \operatorname{vol}(S \cap A) + \operatorname{vol}(S \setminus A)\,, \tag{20}$$

che è vera perché $S, S \cap A$ e $S \setminus A$ sono elementari, e il volume è finitamente additivo sugli insiemi elementari (Corollario 2.7). □

5 Gli insiemi misurabili formano una σ-algebra

Lemma 5.1. *Il complementare di un misurabile è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile e $E \subseteq \mathbb{R}^N$, per cui

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)\,. \tag{21}$$

Osserviamo che $E \cap (\mathbb{R}^N \setminus A) = E \setminus A$ e $E \setminus (\mathbb{R}^N \setminus A) = E \cap A$. Quindi la (21) diventa

$$\lambda^*(E) = \lambda^*\big(E \cap (\mathbb{R}^N \setminus A)\big) + \lambda^*\big(E \setminus (\mathbb{R}^N \setminus A)\big)\,,$$

che, valendo per ogni E, implica che $\mathbb{R}^N \setminus A$ è misurabile. □

Lemma 5.2. *Se A, B sono misurabili, allora $A \cup B$ è misurabile. Se inoltre A e B sono disgiunti, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ vale*

$$\lambda^*(E \cap (A \cup B)) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap B)\,. \tag{22}$$

In particolare, λ^* è finitamente additiva sui misurabili.

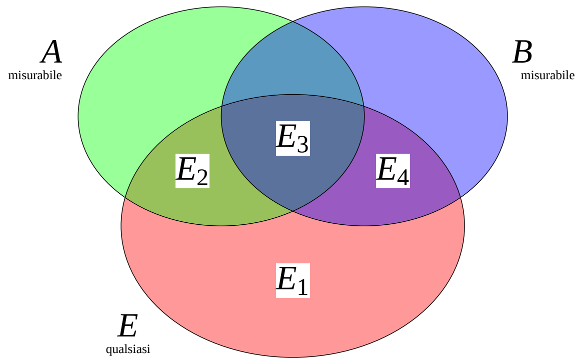

Figura 9: Suddivisione di E

Dimostrazione. Siano A, B sono misurabili e $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Dobbiamo dimostrare che

$$\lambda^*(E) = \lambda^*\big(E \cap (A \cup B)\big) = \lambda^*\big(E \setminus (A \cup B)\big)\,. \tag{23}$$

Suddividiamo E nei seguenti quattro sottinsiemi a due a due disgiunti (Figura 9):

$$E_1 := E \setminus (A \cup B)\,, \quad E_2 := E \cap (A \setminus B)\,, \quad E_3 := E \cap A \cap B, \quad E_4 := E \cap (B \setminus A)\,.$$

L'equazione (23) diventa così

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \lambda^*(E_2 \cup E_3 \cup E_4) + \lambda^*(E_1)\,.$$

Dimostreremo che entrambi i due membri valgono $\lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \lambda^*(E_3) + \lambda^*(E_4)$, per cui saranno uguali. Cominciamo dal primo membro: poiché B è misurabile, $E_1 \cup E_2$ è fuori da B e $E_3 \cup E_4$ è dentro B, le loro misure esterne si sommano (Osservazione 4.2):

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \lambda^*(E_1 \cup E_2) + \lambda^*(E_3 \cup E_4)\,. \tag{24}$$

Poiché A è misurabile, E_1 è fuori da A e E_2 è dentro A, le loro misure esterne si sommano:

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)\,. \tag{25}$$

Ancora poiché A è misurabile, E_4 è fuori da A e E_3 è dentro B, le loro misure esterne si sommano:

$$\lambda^*(E_3 \cup E_4) = \lambda^*(E_3) + \lambda^*(E_4)\,. \tag{26}$$

Combinando le equazioni (24), (25) e (26) otteniamo in effetti

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \lambda^*(E_3) + \lambda^*(E_4)\,. \tag{27}$$

Il secondo membro si può trattare allo stesso modo. Poiché B è misurabile, E_2 è fuori da B e $E_3 \cup E_4$ è dentro a B, le loro misure si sommano:

$$\lambda^*(E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \lambda^*(E_2) + \lambda^*(E_3 \cup E_4)\,. \tag{28}$$

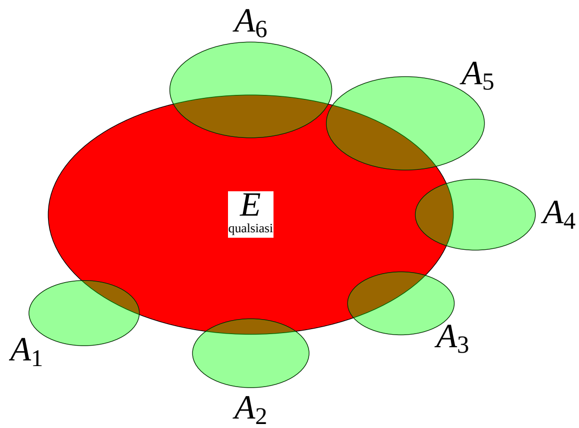

Figura 10: Additività finita delle intersezioni degli A_i con E.

Combinando le equazioni (28) e (26) otteniamo che in effetti anche il secondo membro ha il valore atteso:

$$\lambda^*(E_2 \cup E_3 \cup E_4) + \lambda^*(E_1) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \lambda^*(E_3) + \lambda^*(E_4)\,. \tag{29}$$

All'equazione (29) si può arrivare anche tramite la subadditività di λ^*

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) \leq \lambda^*(E_2 \cup E_3 \cup E_4) + \lambda^*(E_1) \leq \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \lambda^*(E_3) + \lambda^*(E_4)\,.$$

e applicando la (29).

Per vedere che λ^* è finitamente additiva additiva sui misurabili, basta prendere $A, B \in \mathcal{L}$ disgiunti ed scrivere l'equazione (22) con $E := A \cup B$. □

Lemma 5.3. *Se $A_1, \ldots, A_n$ sono misurabili a due a due disgiunti ed $E \subseteq \mathbb{R}^N$, vale*

$$\lambda^*(E \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) = \lambda^*(E \cap A_1) + \cdots + \lambda^*(E \cap A_n)\,. \tag{30}$$

Dimostrazione. Per induzione su n. Quando $n = 2$ l'equazione (30) segue semplicemente dal fatto che $E \cap A_1$ è dentro A_1 mentre $E \cap A_2$ è fuori da A_1. Il passo induttivo si dimostra usando il lemma precedente. Vedi figura 10. □

Lemma 5.4. *Se A, B sono misurabili, allora $A \cap B$ e $A \setminus B$ sono misurabili.*

Dimostrazione. Il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari. Quindi possiamo esprimere l'intersezione $A \cap B$ in termini di complementari e unioni finite:

$$A \cap B = \mathbb{R}^N \setminus \big((\mathbb{R}^N \setminus A) \cup (\mathbb{R}^N \setminus B)\big)\,.$$

Poiché abbiamo già dimostrato che $\mathcal{L}$ è stabile per complementari e unioni finite, risulta che se $A, B \in \mathcal{L}$, anche $A \cap B \in \mathcal{L}$. Per quanto riguarda la differenza basta osservare che si può esprimere in termini di complemento e intersezione: $A \setminus B = A \cap (\mathbb{R}^N \setminus B)$. □

Lemma 5.5. *Se A_n, per $n \in \mathbb{N}$, è una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora l'unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è pure misurabile, e vale l'additività numerabile della misura esterna*

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)\,. \tag{31}$$

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ di misura esterna finita. Vogliamo dimostrare che

$$\lambda^*(E) = \lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\,. \tag{32}$$

Maggioriamo separatamente i due termini del membro di destra. Fissiamo $n_0 \in \mathbb{N}$. Per la subadditività numerabile e il Lemma 5.3

$$\begin{aligned}
\lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \lambda^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E\cap A_n)\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(E\cap A_n) = \\
&= \sum_{n=0}^{n_0} \lambda^*(E\cap A_n) + \sum_{n>n_0} \lambda^*(E\cap A_n) = \\
&= \lambda^*\Big(\bigcup_{n=0}^{n_0}(E\cap A_n)\Big) + \sum_{n>n_0} \lambda^*(E\cap A_n) = \\
&= \lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{n=0}^{n_0} A_n\Big) + \sum_{n>n_0} \lambda^*(E\cap A_n)\,.
\end{aligned}$$

Per la monotonia

$$\lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n=0}^{n_0} A_n\Big)\,.$$

D'altra parte, poiché $A_0 \cup \cdots \cup A_{n_0}$ è misurabile,

$$\lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{n=0}^{n_0} A_n\Big) + \lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n=0}^{n_0} A_n\Big) = \lambda^*(E)$$

Quindi, per la subadditività

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E) &\le \lambda^*\Big(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \\
&\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(E\cap A_n) + \lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \\
&\le \lambda^*\Big(\bigcup_{n=0}^{n_0}(E\cap A_n)\Big) + \sum_{n>n_0} \lambda^*(E\cap A_n) + \lambda^*\Big(E \setminus \bigcup_{n=0}^{n_0} A_n\Big) = \\
&= \lambda^*(E) + \sum_{n>n_0} \lambda^*(E\cap A_n)\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(E\cap A_n)$ converge. Infatti le sue somme parziali sono limitate superiormente da $\lambda^*(E) < +\infty$, usando di nuovo il Lemma 5.3:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^*(E\cap A_n) = \lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^{n}(E\cap A_n)\right) \le \lambda^*(E) < +\infty\,.$$

Quindi la serie nell'equazione (33) tende a 0 per $n_0 \to +\infty$, in quanto coda di una serie convergente. Mandando $n_0 \to +\infty$ in (33) otteniamo

$$\lambda^*(E) \le \lambda^*\Big(E\cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \lambda^*\Big(E\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \tag{34}$$

$$\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(E\cap A_n) + \lambda^*\Big(E\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \tag{35}$$

$$\le \lambda^*(E)\,.$$

Poiché il primo membro coincide con l'ultimo, le disuguaglianze sono tutte uguaglianze. In particolare, la prima riga (34) è quello che serve per dimostrare che l'unione degli A_n è misurabile. La seconda riga (35), se applicata con $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, mostra l'additività numerabile (31). □

Teorema 5.6. *L'insieme $\mathcal{L}$ dei misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra, e la misura esterna λ^* su $\mathcal{L}$ è numerabilmente additiva.*

Dimostrazione. Dopo i lemmi precedenti l'unica cosa che resta da dimostrare è che $\mathcal{L}$ è stabile per unioni numerabili anche quando gli insiemi non siano a due a due disgiunti. Siano allora $A_n \in \mathcal{L}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Con la stessa tecnica della Proposizione 1.9, possiamo scrivere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\,, \quad \text{dove} \quad B_0 := A_0, \quad B_n := A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})\,.$$

Gli insiemi B_n sono misurabili perché già sappiamo che $\mathcal{L}$ è stabile per unioni finite e differenze. Inoltre i B_n sono a due a due disgiunti per costruzione. Quindi per il Lemma 5.5 anche la loro unione è misurabile. □

6 Lo spazio di misura di Lebesgue

Proposizione 6.1. *L'insieme $\mathcal{L}$ dei misurabili secondo Lebesgue comprende tutti i boreliani di $\mathbb{R}^N$, e quindi in particolare tutti gli aperti e tutti i chiusi.*

Dimostrazione. Sappiamo che ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli. Poiché $\mathcal{L}$ contiene i rettangoli ed è stabile per unioni numerabili, contiene tutti gli aperti. Poi, essendo una σ-algebra, contiene tutta la σ-algebra generata dagli aperti, cioè la famiglia dei boreliani. □

Un esempio esplicito, dovuto a Lusin, di un insieme non boreliano ma (presumibilmente) misurabile è descritto nella pagina web `http://en.wikipedia.org/wiki/Borel_set`, senza dimostrazione.

Definizione 6.2. La misura di Lebesgue λ_N su $\mathbb{R}^N$ è la restrizione della misura esterna λ_N^* alla σ-algebra $\mathcal{L}_N$ dei misurabili di $\mathbb{R}^N$.

Scriveremo semplicemente λ invece di λ_N quando non ci sia pericolo di confusione.

Osservazione 6.3. Lo spazio di misura di Lebesgue $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}, \lambda)$ è completo. Infatti se $A \in \mathcal{L}$ ha misura nulla e $E \subseteq A$, allora $0 \leq \lambda^*(E) \leq \lambda^*(A) = \lambda(A) = 0$, e quindi $E \in \mathcal{L}$ per la Proposizione 4.6 anche $E \in \mathcal{L}$.

Osservazione 6.4. Lo spazio di misura di Lebesgue $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}, \lambda)$ è invariante per traslazioni, cioè

$$A \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad x + A \in \mathcal{L} \text{ e } \lambda(x+A) = \lambda(A)\,. \tag{36}$$

Lo spazio è invariante anche per tutte le isometrie euclidee di $\mathbb{R}^N$, ma la dimostrazione è meno agevole che per le traslazioni, in quanto la famiglia degli insiemi elementari è legata alla scelta degli assi e non è invariante per isometrie.

Proposizione 6.5 (Unicità della misura di Lebesgue)**.** *Sia $\mu\colon \mathcal{L} \to [0, +\infty]$ una misura tale che $\mu(R) = \lambda(R)$ per ogni rettangolo R. Allora $\mu = \lambda$.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{L}$ e R_n una successione di rettangoli che ricoprono A. Allora, poiché λ e μ coincidono sui rettangoli e μ è numerabilmente subadditiva e monotona (essendo per ipotesi una misura),

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(R_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(R_n) \geq \mu\biggl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\biggr) \geq \mu(A)\,.$$

Valendo questo per ogni ricoprimento di E con rettangoli, abbiamo che

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf\biggl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{vol} R_n \biggm| \text{gli } R_n \text{ ricoprono } A\biggr\} \geq \mu(A)\,.$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta $\lambda \leq \mu$ cominciamo dal caso in cui A è limitato. Esiste un rettangolo limitato R tale che $A \subseteq R$. Sia A che $R \setminus A$ hanno misura finita sia per λ che per μ, in quanto sono sottinsiemi di R e $\mu(R) = \lambda(R) = \operatorname{vol} R < +\infty$. Per l'additività di μ e di λ valgono le uguaglianze

$$\mu(R) = \mu(A) + \mu(R \setminus A)\,, \qquad \lambda(R) = \lambda(A) + \lambda(R \setminus A)\,,$$

in cui tutti i termini sono finiti. Sottraendo membro a membro, ricordando che $\mu(R) = \lambda(R)$ e riordinando otteniamo

$$\mu(A) - \lambda(A) = \lambda(R \setminus A) - \mu(R \setminus A)\,. \tag{37}$$

Poiché $\mu \leq \lambda$, il primo membro di (37) è ≤ 0, mentre il secondo è ≥ 0. Deduciamo che i due membri sono nulli. In particolare $\mu(A) = \lambda(A)$.

Nel caso di $A \in \mathcal{L}$ generico, possiamo scrivere A come l'unione di una successione crescente $A_n := A \cap [-n, n]^N$ di insiemi misurabili limitati. Passando al limite $\lambda(A_n) \nearrow \lambda(A)$, $\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$. Essendo $\lambda(A_n) = \mu(A_n)$ concludiamo che $\lambda(A) = \mu(A)$. $\square$

7 L'insieme non misurabile di Vitali

Per $x, y \in [0,1]$ definiamo la relazione

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Q} \,. \tag{38}$$

Questa relazione è riflessiva (perché $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$), simmetrica (perché $x - y \in \mathbb{Q} \iff y - x \in \mathbb{Q}$) e transitiva (perché se $x - y \in \mathbb{Q}$ e $y - z \in \mathbb{Q}$ allora $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q}$). È pertanto una *relazione di equivalenza.* La classe di equivalenza in $[0,1]$ rispetto alla relazione $\sim$ e contenente il punto x sarà indicata con $[x]_\sim$. Le classi di equivalenza formano una partizione dell'intervallo $[0,1]$. Poiché ogni classe di equivalenza è un insieme numerabile, la famiglia delle classi di equivalenza ha la potenza del continuo.

Definizione 7.1. Chiamiamo *insieme di Vitali* un insieme $V \subseteq [0,1]$ a cui appartenga uno e un solo punto di ogni classe di equivalenza per $\sim$.

Se, come faremo qui, ammettiamo l'assioma di scelta, esiste almeno un insieme di Vitali (ovviamente non unico). Per $x \in \mathbb{R}$ indicheremo con $x + V$ il traslato di V di vettore x, cioè $\{x + y \mid y \in V\}$.

Proposizione 7.2. *Due traslati razionali diversi di V sono disgiunti. In formule:*

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \qquad r_1 \neq r_2 \Rightarrow (r_1 + V) \cap (r_2 + V) = \varnothing \,. \tag{39}$$

Dimostrazione. Siano $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ e supponiamo che $(r_1 + V) \cap (r_2 + V) \neq \varnothing$. Vogliamo dimostrare che necessariamente $r_1 = r_2$. Sia $x \in (r_1 + V) \cap (r_2 + V)$. Poiché $x \in r_1 + V$ esiste $y_1 \in V$ tale che $x = r_1 + y_1$. Poiché $x \in r_2 + V$ esiste $y_2 \in V$ tale che $x = r_2 + y_2$. Sottraendo membro a membro otteniamo

$$0 = x - x = (r_1 + y_1) - (r_2 + y_2) \,, \quad \text{cioè, riordinando,} \quad y_1 - y_2 = r_2 - r_1 \,. \tag{40}$$

Ma $r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$. Quindi $y_1 \sim y_2$, ossia y_1 e y_2 appartengono alla stessa classe di equivalenza. Ma V ha un solo elemento di ogni classe di equivalenza. Quindi y_1 e y_2 devono coincidere. Di conseguenza $0 = y_1 - y_2 = r_2 - r_1$, e quindi $r_1 = r_2$ come desiderato. □

Proposizione 7.3. *I traslati razionali $r + V$ al variare di $r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ coprono l'intervallo $[0,1]$ e sono contenuti in $[-1,2]$. In formule:*

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} (r + V) \subseteq [-1,2] \,. \tag{41}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima inclusione. Sia $x \in [0,1]$. Nella classe di equivalenza $[x]_\sim$ c'è un (unico) $y \in V \subset [0,1]$. Poniamo $r = x - y \in \mathbb{Q}$. Poiché r è la differenza di due numeri di $[0,1]$, necessariamente $-1 \leq r \leq 1$. Quindi $x = r + y \in r + V$ con $r \in \mathbb{Q}$, $-1 \leq r \leq 1$. La seconda inclusione è banale. □

Proposizione 7.4. *L'insieme di Vitali non è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che V sia misurabile. In particolare $0 \leq \lambda(V) \leq \lambda([0,1]) = 1$. Inoltre ogni suo traslato $r+V$ è pure misurabile. L'unione

$$\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} (r+V) \tag{42}$$

è numerabile e disgiunta. Quindi, usando l'invarianza per traslazioni

$$\lambda\Bigg(\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} (r+V)\Bigg) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} \lambda(r+V) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} \lambda(V)\,. \tag{43}$$

La quantità $\lambda(V) \geq 0$ non dipende da r, per cui

$$\lambda\Bigg(\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} (r+V)\Bigg) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} \lambda(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda(V)=0,\\ +\infty & \text{se } \lambda(V)>0. \end{cases} \tag{44}$$

D'altro canto, dalla proposizione 7.3 otteniamo per monotonia

$$\lambda\big([0,1]\big) \leq \lambda\Bigg(\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} (r+V)\Bigg) \leq \lambda\big([-1,2]\big)\,. =, \tag{45}$$

cioè

$$1 \leq \lambda\Bigg(\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ -1\leq r\leq 1}} (r+V)\Bigg) \leq 3\,. \tag{46}$$

Le formule (44) e (46) sono fra loro incompatibili, in quanto né 0 né $+\infty$ sono compresi fra 1 e 3. Dobbiamo quindi rigettare l'assunzione che V sia misurabile. □

Esercizio 7.5. Dimostrare che se si accetta l'assioma di scelta, la misura esterna λ^* non è numerabilmente additiva, anzi, neanche finitamente additiva, su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sia $n \mapsto r_n$ una biiezione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}\cap[-1,1]$. Mostrare che esiste $n_0 \geq 0$ tale che

$$\lambda^*\Bigg(\bigcup_{n\geq 0}(r_n+V)\Bigg) < \sum_{n=0}^{n_0} \lambda^*(r_n+V) + \lambda^*\Bigg(\bigcup_{n>n_0}(r_n+V)\Bigg)\,. \tag{47}$$

Esercizio 7.6 (L'insieme di Vitali sul cerchio). Sia $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 = |z|\}$ il cerchio unitario del piano complesso. Sia $W = \{e^{2\pi i y} \mid y \in V\}$. Mostrare che $\mathbb{U}$ è l'unione disgiunta di una famiglia numerabile di copie ruotate di W, più precisamente è l'unione degli insiemi del tipo $e^{2\pi i r}W$ al variare di $r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$.

Se si accetta l'assioma di scelta è possibile dimostrare che esiste (non unica) una funzione Λ, definita su tutti i sottinsiemi limitati di $\mathbb{R}$, che è finitamente additiva, invariante per traslazioni, e coincide con la misura di Lebesgue λ sui misurabili limitati. Questa Λ non è la misura esterna λ^*. Qualcosa di analogo si può fare in dimensione 2, in cui esistono funzioni finitamente additive sui limitati, invarianti per isometrie, e che estendono la misura di Lebesgue bidimensionale.

Le cose cambiano in dimensione 3, nella quale, sempre se accettiamo l'assioma di scelta, non esistono estensioni finitamente additive della misura di Lebesgue che siano invarianti per isometrie. A tale riguardo è famoso il seguente risultato.

Teorema 7.7 (Paradosso di Banach-Tarski)**.** *Data la palla chiusa* $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 \leq 1\}$ *nello spazio euclideo tridimensionale, se si accetta l'assioma di scelta esistono cinque sottinsiemi* $B_1, \ldots, B_5$ *di* B*, a due a due disgiunti, ed esistono cinque rotazioni dello spazio* $T_1, \ldots, T_5$ *(isometrie euclidee) tali che:*

- $T_1(B_1), T_2(B_2), T_3(B_3)$ *sono a due a due disgiunti e la loro unione è* B*,*
- $T_4(B_4)$ *e* $T_5(B_5)$ *sono disgiunti e la loro unione è* B*.*

La figura 11 forse aiuta a comprendere l'enunciato. Naturalmente i cinque sottinsiemi della figura non hanno la proprietà paradossale del teorema.

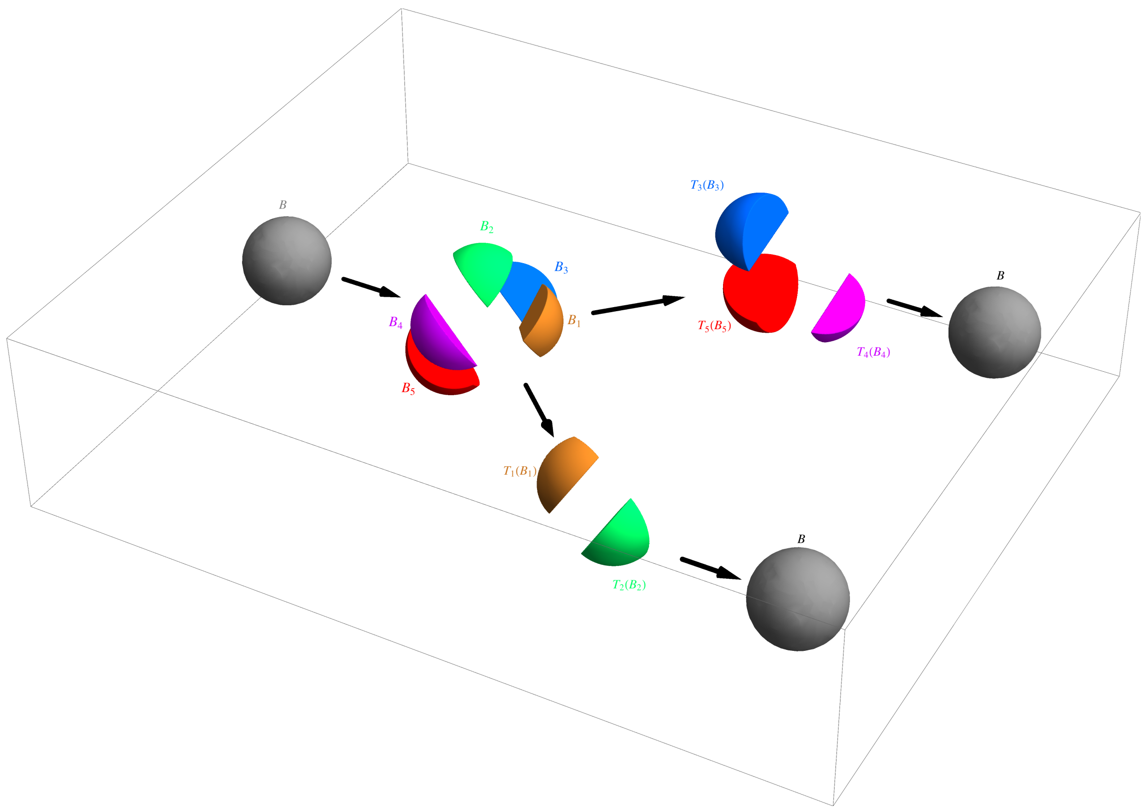

Figura 11: Rappresentazione semplicistica del paradosso di Banach-Tarski