Sunto della Teoria dell'Integrale secondo Henstock-Kurzweil

1. Trapezoidi, suddivisioni, somme di Riemann

Definizione. Data una funzione $f\colon [a,b] \to [0,+\infty[$ si dice *trapezoide* associato a f (sull'intervallo $[a,b]$) l'insieme piano

$$\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\bigr\}.$$

Il problema di definire con precisione, e di calcolare, l'area dei trapezoidi è la motivazione principale e più intuitiva della teoria dell'integrale.

Definizione. Data un intervallo (chiuso e limitato) $[a,b] \subset \mathbb{R}$, si dice *suddivisione marcata* di $[a,b]$ una sequenza finita di numeri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, in ordine (strettamente) crescente, in cui il primo è a e l'ultimo è b:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b,$$

corredata di una scelta di un punto x_i (i *"punti marcati"*)in ciascuno degli intervallini $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]\dots$:

$$a_{i-1} \le x_i \le a_i \qquad \forall i = 1, \dots n.$$

Una suddivisione marcata sarà di solito indicata con la lettera Π.

Definizione. Dato un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e una suddivisione marcata Π costituita da $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ e $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$, diremo *somma di Riemann* associata a f e a Π la quantità

$$S(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

2. Calibri, suddivisioni adattate e integrale

Definizione. Si dice *calibro* sull'intervallo $[a,b]$ una qualsiasi funzione $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Definizione. Data una suddivisione marcata Π costituita da $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ e $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$, e dato un calibro $\delta\colon [a,b] \to]0,+\infty[$, diremo che Π è *adattato* a δ se

$$x_i - \delta(x_i) \le a_{i-1} \le x_i \le a_i \le x_i + \delta(x_i) \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Useremo il simbolo $\Pi \prec \delta$ per significare che Π è adattata a δ.

Definizione di Integrale secondo Henstock-Kurzweil. Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e un numero $I \in \mathbb{R}$, diremo che *f è integrabile su $[a,b]$ con integrale I* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta\colon [a,b] \to]0,+\infty[$ tale che per ogni suddivisione marcata Π di $[a,b]$ si abbia che

$$\Pi \prec \delta \quad \Rightarrow \quad \bigl|S(f,\Pi) - I\bigr| < \varepsilon\,.$$

Scriveremo in tal caso, secondo la notazione di Leibniz,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

o talora, più semplicemente $I = \int_a^b f$. L'integrale definito in questo modo è detto più precisamente *integrale secondo Henstock-Kurzweil*, oppure *integrale di Riemann generalizzato*, oppure *integrale di calibro* (in inglese *gauge integral*).

3. Unicità dell'integrale

Definizione (Concatenazione di di suddivisioni adattate). Siano dati due intervalli contigui $[a,c]$ e $[c,b]$ (con $a<c<b$), due suddivisioni marcate Π',Π'' rispettivamente di $[a,c]$ e di $[c,b]$:

$$\begin{aligned}\Pi'\colon &\qquad a=a'_0<a'_1<\ldots<a'_n=c, \quad a'_i\le x'_i\le a'_i \quad \forall i=1,\ldots,n,\\ \Pi''\colon &\qquad c=a''_0<a''_1<\ldots<a''_m=b, \quad a''_i\le x''_i\le a''_i \quad \forall i=1,\ldots,m,\end{aligned}$$

La seguente suddivisione marcata Π di tutto $[a,b]$, è detta la *concatenazione* di Π' e Π'':

$$\Pi\colon \qquad a=a'_0<a'_1<\ldots<a'_n<a''_1<a''_2<\ldots<a''_m=b, \quad x_i=\begin{cases}x'_i & \text{se } 1\le i\le n,\\ x''_{i-n} & \text{se } n+1\le i\le n+m.\end{cases}$$

Osservazione (la concatenazione di suddivisioni adattate è adattata). Siano Π',Π'' suddivisione marcate rispettivamente di $[a,c]$ e di $[c,b]$ e sia Π la loro concatenazione. Sia poi $\delta\colon[a,b]\to\,]0,+\infty[$ un calibro. Se $\Pi'\prec\delta$ e $\Pi''\prec\delta$ allora $\Pi\prec\delta$.

Proposizione (esistenza di suddivisioni adattate). *Dato un intervallo $[a,b]$ e un calibro $\delta\colon[a,b]\to\,]0,+\infty[$, esiste sempre una suddivisione marcata di $[a,b]$ adattata a δ.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che non esistano suddivisioni di $[a,b]$ adattate a δ. Poniamo $I_0:=[a_0,b_0]:=[a,b]$.

Sia $c_0:=(a_0+b_0)/2$ il punto medio di I_0. Su almeno una delle metà $[a_0,c_0]$, $[c_0,b_0]$ non ci sono suddivisioni adattate a δ, perché ce ne fossero su entrambi allora potremmo concatenarle e ottenerne una adattata su I_0. Prendiamo la metà (o una delle metà) su cui non ci sono suddivisioni adattate, e indichiamola con $I_1:=[a_1,b_1]$.

Sia $c_1=(a_1+b_1)/2$ il punto medio di I_1. Su almeno una delle metà $[a_1,c_1]$, $[c_1,b_1]$ non ci sono suddivisioni adattate a δ, perché ce ne fossero su entrambi allora potremmo concatenarle e ottenerne una adattata su I_1. Prendiamo la metà (o una delle metà) su cui non ci sono suddivisioni adattate, e indichiamola con $I_2:=[a_2,b_2]$.

Sia $c_2=(a_2+b_2)/2$ il punto medio di I_2. Su almeno una delle metà $[a_2,c_2]$, $[c_2,b_2]$ non ci sono suddivisioni adattate a δ, perché ce ne fossero su entrambi allora potremmo concatenarle e ottenerne una adattata su I_2. Prendiamo la metà (o una delle metà) su cui non ci sono suddivisioni adattate, e indichiamola con $I_3:=[a_3,b_3]$.

Proseguendo di questo passo produciamo una successione di intervalli chiusi $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$, con le seguenti proprietà:

1. ognuno degli intervalli contiene il precedente: $I_0\supset I_1\supset I_3\supset\ldots$;
2. ognuno degli intervalli è lungo metà del precedente;
3. su nessuno degli intervalli I_n esistono suddivisioni adattate a δ.

Per la proprietà 1 e il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi, esiste un punto $\bar{x}$ che appartiene contemporaneamente a tutti gli intervalli I_n. In particolare $\bar{x}\in I_0=[a,b]$. Consideriamo il valore del calibro $\delta(\bar{x})$, che è >0. Per la proprietà 2, esiste un n_0 abbastanza grande tale che la lunghezza di I_{n_0} è minore di $\delta(\bar{x})$. Poiché $\bar{x}\in I_{n_0}$ abbiamo che

$$\bar{x}-\delta(\bar{x})\le a_{n_0}\le\bar{x}\le b_{n_0}\le\bar{x}+\delta(\bar{x}).$$

Consideriamo la suddivisione marcata di $[a_{n_0},b_{n_0}]$ formata dai soli due punti $a_{n_0}=\alpha_0<\alpha_1=b_{n_0}$ e dal punto marcato $x_1=\bar{x}\in[\alpha_0,\alpha_1]$. Questa suddivisione marcata risulta adattata a δ, in aperta contraddizione con la proprietà 3.

Dobbiamo concludere che *non possono non esistere* suddivisioni di $[a,b]$ adattate a δ. □

Osservazione. Siano dati due calibri δ_1,δ_2 su $[a,b]$ tali che $\delta_1(x)\le\delta_2(x)$ $\forall x\in[a,b]$, e sia data una suddivisione marcata Π di $[a,b]$. Se $\Pi\prec\delta_1$ allora $\Pi\prec\delta_2$.

Proposizione. *Siano dati due calibri δ_1,δ_2 su $[a,b]$. Allora esiste una suddivisione marcata di $[a,b]$ adattata a δ_1 e a δ_2 contemporaneamente.*

Dimostrazione. Definiamo $\delta(x):=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$. Questo δ è un calibro su $[a,b]$. Si ha che $\delta\le\delta_1$ e $\delta\le\delta_2$ contemporaneamente. Sia Π una suddivisione marcata di $[a,b]$ adattata a δ. Per l'osservazione precedente allora $\Pi\prec\delta_1$ e $\Pi\prec\delta_2$ allo stesso tempo. □

Proposizione (unicità dell'integrale). *Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che f sia integrabile su $[a,b]$ con integrale sia I_1 che I_2. Allora $I_1=I_2$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon>0$. Per definizione di integrale, esistono calibri δ_1,δ_2 su $[a,b]$ tali che per ogni suddivisione marcata Π di $[a,b]$ si ha che

$$\begin{aligned}\Pi\prec\delta_1 &\quad\Rightarrow\quad \bigl|S(f,\Pi)-I_1\bigr|<\varepsilon,\\ \Pi\prec\delta_2 &\quad\Rightarrow\quad \bigl|S(f,\Pi)-I_2\bigr|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Sia Π una suddivisione adattata contemporaneamente a δ_1 e a δ_2 (Π esiste per la Proposizione precedente). Abbiamo quindi che

$$\bigl|S(f,\Pi)-I_1\bigr|<\varepsilon \qquad\text{e}\qquad \bigl|S(f,\Pi)-I_2\bigr|<\varepsilon.$$

Ma allora

$$|I_1-I_2|=\bigl|I_1-S(f,\Pi)+S(f,\Pi)-I_2\bigr|\le\bigl|I_1-S(f,\Pi)\bigr|+\bigl|S(f,\Pi)-I_2\bigr|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Risulta che $|I_1-I_2|<2\varepsilon$ comunque si scelga $\varepsilon>0$. Concludiamo che $I_1=I_2$. □

4. Il teorema fondamentale del calcolo

Lemma sulle funzioni derivabili. *Sia $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in $\bar{x}\in[a,b]$, e sia $\varepsilon>0$. Allora esiste $\delta>0$ tale che per ogni scelta di $\alpha,\beta\in[a,b]$ tali che $\bar{x}-\delta\le\alpha\le\bar{x}\le\beta\le\bar{x}+\delta$ si ha che*

$$\Bigl|\bigl(F(\beta)-F(\alpha)\bigr)-F'(\bar{x})(\beta-\alpha)\Bigr|<\varepsilon(\beta-\alpha)\,.$$

Dimostrazione. Per definizione di derivata

$$F'(\bar{x})=\lim_{x\to\bar{x}}\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}}\,.$$

Per definizione di limite, esiste $\delta>0$ tale che per ogni $x\in[a,b]$

$$0<|x-\bar{x}|\le\delta\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}}-F'(\bar{x})\right|\le\varepsilon\,.$$

Facciamo denominatore comune l'ultima disuguaglianza:

$$0<|x-\bar{x}|\le\delta\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{F(x)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(x-\bar{x})}{x-\bar{x}}\right|=\frac{\bigl|F(x)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(x-\bar{x})\bigr|}{|x-\bar{x}|}\le\varepsilon\,,$$

e poi moltiplichiamo per $|x-\bar{x}|$, che è >0 perché $x\neq x_0$:

$$0<|x-\bar{x}|\le\delta\quad\Rightarrow\quad\Bigl|F(x)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(x-\bar{x})\Bigr|\le\varepsilon|x-\bar{x}|\,,$$

Qualora $|x-\bar{x}|=0$, cioè quando $x=\bar{x}$, la disuguaglianza $|F(x)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(x-\bar{x})|\le\varepsilon|x-\bar{x}|$ diventa $0\le0$, che è vera. Quindi possiamo togliere la restrizione $0<|x-\bar{x}|$ e scrivere semplicemente

$$\forall x\in[a,b]\qquad|x-\bar{x}|\le\delta\quad\Rightarrow\quad\Bigl|F(x)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(x-\bar{x})\Bigr|\le\varepsilon|x-\bar{x}|\,,$$

Siano $\alpha,\beta\in[a,b]$ tale che $\bar{x}-\delta\le\alpha\le\bar{x}\le\beta\le\bar{x}+\delta$. Allora valgono entrambe le disuguaglianze

$$\begin{aligned}&\Bigl|F(\alpha)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(\alpha-\bar{x})\Bigr|\le\varepsilon|\alpha-\bar{x}|,\\ &\Bigl|F(\beta)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(\beta-\bar{x})\Bigr|\le\varepsilon|\beta-\bar{x}|.\end{aligned}$$

Quindi, ricordandosi che $|\alpha-\bar{x}|=\bar{x}-\alpha$ e che $|\beta-\bar{x}|=\beta-\bar{x}$, aggiungendo e togliendo $F(\bar{x})$ e $F'(\bar{x})\bar{x}$ si ricava

$$\begin{aligned}\Bigl|\bigl(F(\beta)-F(\alpha)\bigr)-F'(\bar{x})(\beta-\alpha)\Bigr|&=\Bigl|\bigl(F(\beta)-F(\bar{x})+F(\bar{x})-F(\alpha)\bigr)-F'(\bar{x})(\beta-\bar{x})+F'(\bar{x})(\bar{x}-\alpha)\Bigr|\le\\ &\le\Bigl|F(\beta)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(\beta-\bar{x})\Bigr|+\Bigl|F(\alpha)-F(\bar{x})-F'(\bar{x})(\alpha-\bar{x})\Bigr|\le\\ &\le\varepsilon|\beta-\bar{x}|+\varepsilon|\alpha-\bar{x}|=\\ &=\varepsilon(\beta-\bar{x})+\varepsilon(\bar{x}-\alpha)=\\ &=\varepsilon(\beta-\alpha)\,,\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Formula delle somme telescopiche. Siano $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ dei numeri. Allora

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0 \, .$$

Dimostrazione. Per induzione. Per $n = 1$, cioè quando si hanno i due numeri b_0, b_1, la formula diventa

$$\sum_{k=1}^{1}(b_k - b_{k-1}) = b_1 - b_0 \, ,$$

che è banalmente vera. Supponiamo n sia un numero per il quale la formula sia vera, cioè quando si hanno $n+1$ numeri. $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$. Prendiamo $n+2$ numeri $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$. Allora, isolando l'ultimo addendo della somma e applicando l'ipotesi induttiva,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(b_k - b_{k-1}) = (b_{n+1} - b_n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})}_{=b_n - b_0} = (b_{n+1} - b_n) + (b_n - b_0) = b_{n+1} - b_0 \, ,$$

che è proprio la tesi con $n+1$ al posto di n. $\square$

Teorema fondamentale del calcolo. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione. Supponiamo che esista una seconda funzione* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *tale che*

1. F *è derivabile in ogni punto di* $[a,b]$*;*
2. $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

Allora f *è integrabile su* $[a,b]$ *e* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poniamo $\varepsilon' := \varepsilon/(b-a)$. Il lemma sulle funzioni derivabili, applicato a F e a ε', dice che per ogni $\bar{x} \in [a,b]$ esiste $\delta(\bar{x}) > 0$ con la seguente proprietà: comunque prendiamo $\alpha, \beta \in [a,b]$ tali che $\bar{x} - \delta(\bar{x}) \le \alpha \le \bar{x} \le \beta \le \bar{x} + \delta(\bar{x})$ si ha che

$$\Big|\big(F(\beta) - F(\alpha)\big) - F'(\bar{x})(\beta - \alpha)\Big| < \varepsilon'(\beta - \alpha) \, . \tag{1}$$

L'applicazione $\bar{x} \mapsto \delta(\bar{x})$ è un calibro su $[a,b]$. Sia Π una suddivisione adattata al calibro δ, individuata da $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$. Per definizione di adattamento abbiamo che

$$x_i - \delta(x_i) \le a_{i-1} \le x_i \le a_i \le x_i + \delta(x_i) \qquad \forall i = 1, \dots, n \, .$$

Applicando la disuguaglianza (1) con $\alpha := a_{i-1}$, $\bar{x} := x_i$ e $\beta := a_i$ otteniamo che

$$\Big|\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) - F'(x_i)(a_i - a_{i-1})\Big| < \varepsilon'(a_i - a_{i-1}) \qquad \forall i = 1, \dots, n \, . \tag{2}$$

Usando la formula delle somme telescopiche possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) = F(a_n) - F(a_0) = F(b) - F(a) \, .$$

Consideriamo ora la somma di Riemann $S(f,\Pi)$ e confrontiamola col candidato valore dell'integrale $F(b) - F(a)$:

$$\begin{aligned} S(f,\Pi) - \big(F(b) - F(a)\big) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(F'(x_i)(a_i - a_{i-1}) - \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)\Big) \, . \end{aligned}$$

Prendiamo i valori assoluti e usiamo la disuguaglianza (2):

$$\begin{aligned}
\Bigl|S(f,\Pi)-\bigl(F(b)-F(a)\bigr)\Bigr| &\le \sum_{i=1}^{n}\Bigl|F'(x_i)(a_i-a_{i-1})-\bigl(F(a_i)-F(a_{i-1})\bigr)\Bigr| = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Bigl|\bigl(F(a_i)-F(a_{i-1})\bigr)-F'(x_i)(a_i-a_{i-1})\Bigr| \le \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\varepsilon'(a_i-a_{i-1}) = \varepsilon'\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1}) = \varepsilon'(a_n-a_0) = \\
&= \varepsilon'(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Riassumendo: fissato $\varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta\colon [a,b] \to]0,+\infty[$ tale che per ogni suddivisione marcata Π di $[a,b]$ si ha che

$$\Pi \prec \delta \quad \Rightarrow \quad \Bigl|S(f,\Pi)-\bigl(F(b)-F(a)\bigr)\Bigr| \le \varepsilon\,.$$

Concludiamo che f è integrabile su $[a,b]$ e l'integrale vale $F(b)-F(a)$. □