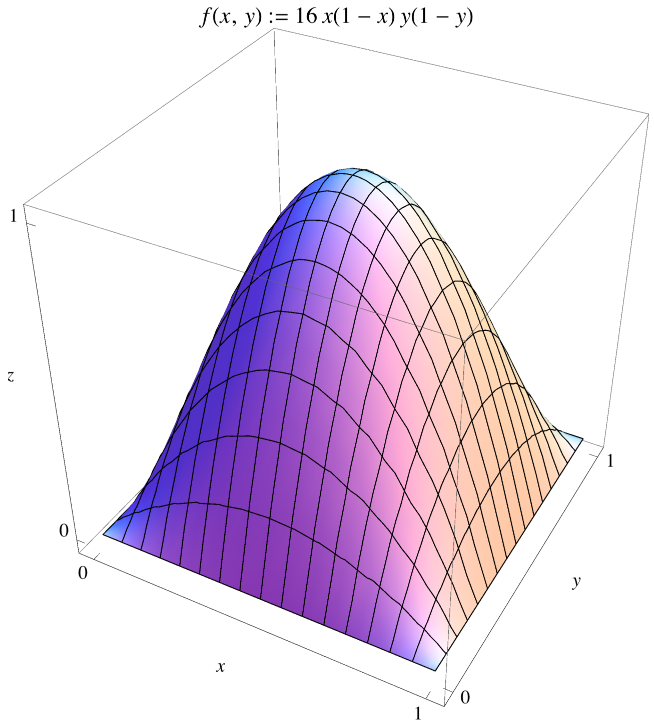
Integrali su rettangoli
usando il teorema fondamentale

Esempio continuo

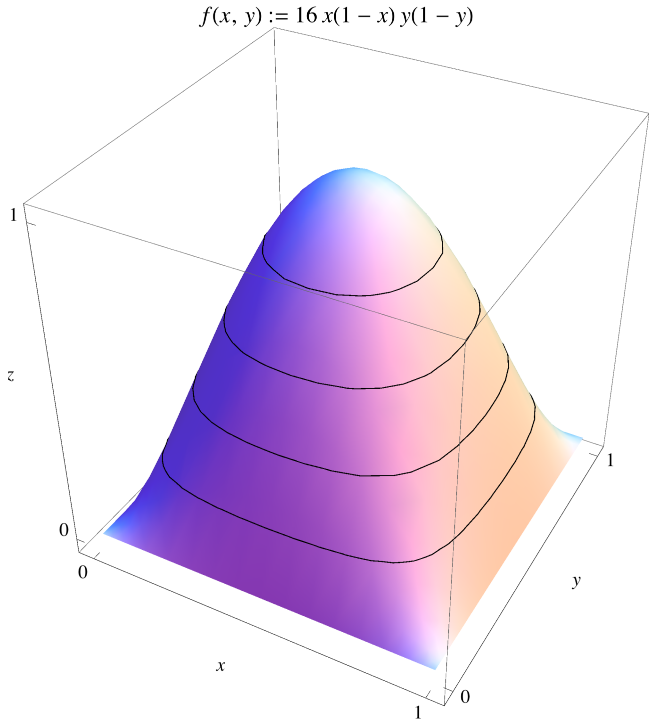
Consideriamo la funzione

$$f(x, y) := 16\, x(1 - x)\, y(1 - y)$$

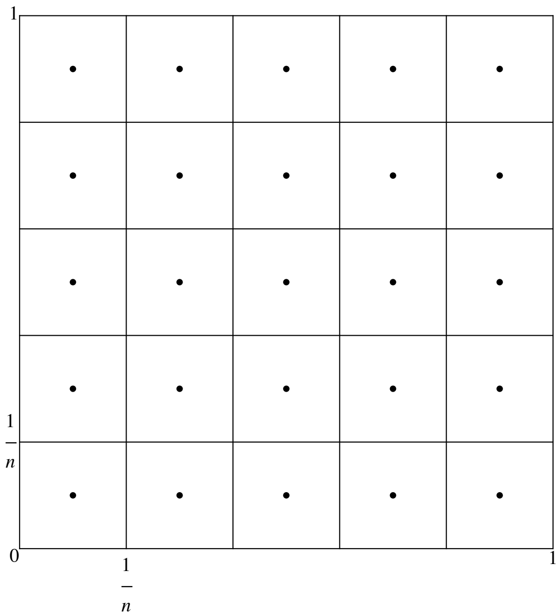
E' un polinomio nelle due variabili x, y, di grado complessivo 4. Il fattore 16 è solo per non renderla troppo piatta. La funzione si annulla sugli assi e sulle rette $x = 1$, $y = 1$. In particolare, si annulla sui lati del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$:



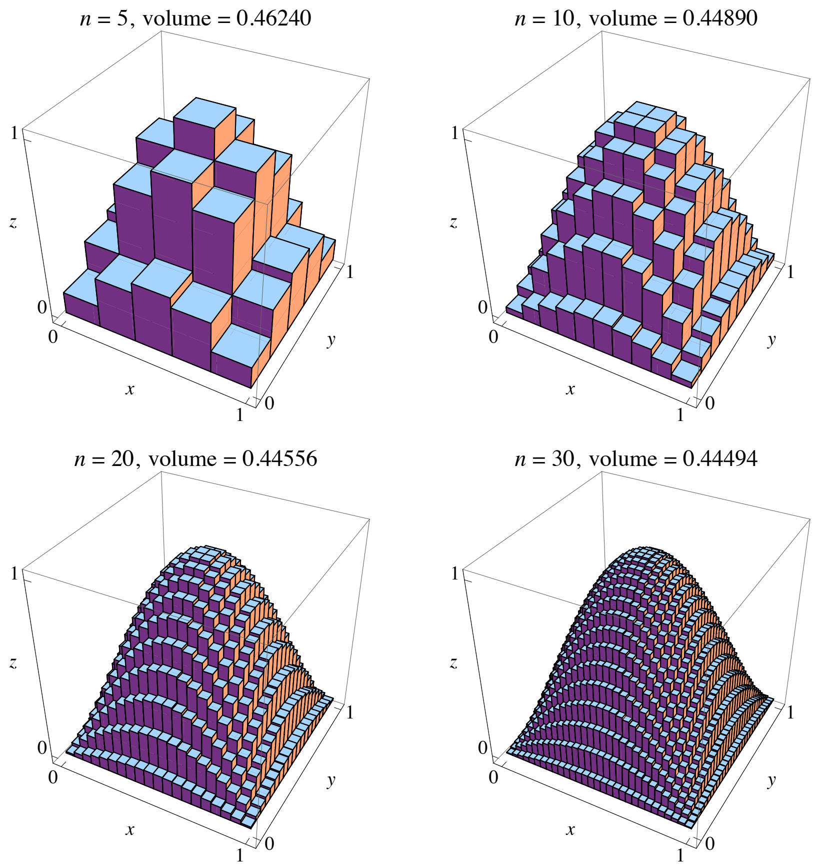
Le curve di livello della funzione:



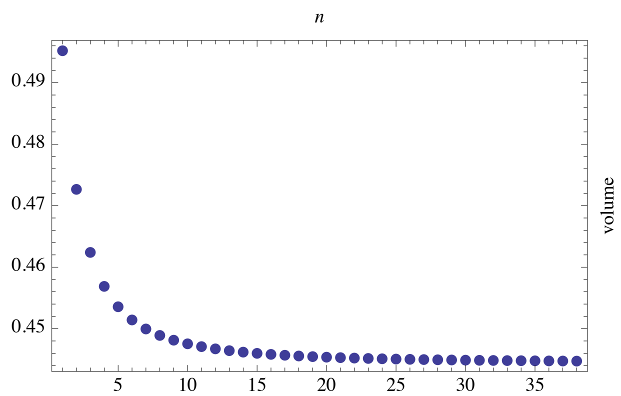
Consideriamo la suddivisione a scacchiera del quadrato $[0, 1]\times[0, 1]$ in quadratini di lato $1/n$, con il punto marcato nel punto di mezzo del quadratino:



Approssimanti del volume con scacchiere 5×5, 10×10, 20×20, 30×30:



L'andamento del volume delle somme di Riemann per una griglia $n \times n$ all'aumentare del numero n:



Vediamo che le somme di Riemann si stabilizzano al crescere di n. La teoria prevede questo comportamento, e il valore del limite?

Una primitiva seconda mista della funzione $f(x, y) := 16\,x(1-x)\,y(1-y)$ si ottiene trovando una primitiva prima rispetto a x e poi una primitiva di questa rispetto a y (o viceversa):

$$F(x, y) = \frac{16\,y^3\,x^3}{9} - \frac{8\,y^2\,x^3}{3} - \frac{8\,y^3\,x^2}{3} + 4\,y^2\,x^2$$

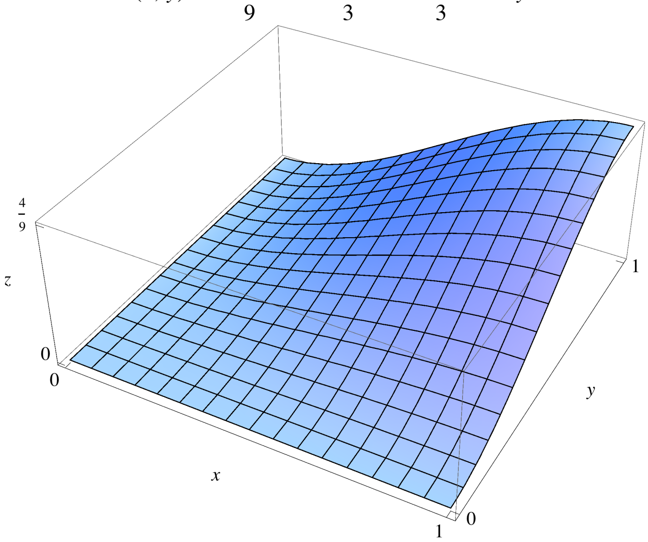
Il teorema fondamentale per i rettangoli dice che il volume vero dovrebbe essere

$$F(1, 1) - F(1, 0) - F(0, 1) + F(0, 0) = \frac{4}{9} \approx 0,444\,444$$

Il valore teorico si accorda ottimamente con le approssimazioni!

Un grafico della primitiva seconda mista:

$$F(x,\, y) = \frac{16\, y^3\, x^3}{9} - \frac{8\, y^2\, x^3}{3} - \frac{8\, y^3\, x^2}{3} + 4\, y^2\, x^2$$



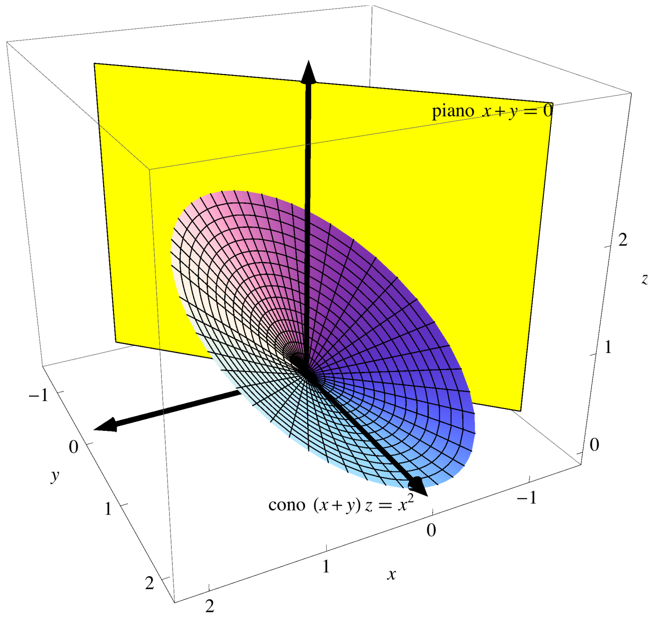
Esempio singolare

Se usciamo dall'ambito dei polinomi, bisogna essere fortunati perché una funzione elementare abbia primitive seconde miste elementari. Partiamo perciò dalla primitiva, invece che dalla funzione: consideriamo

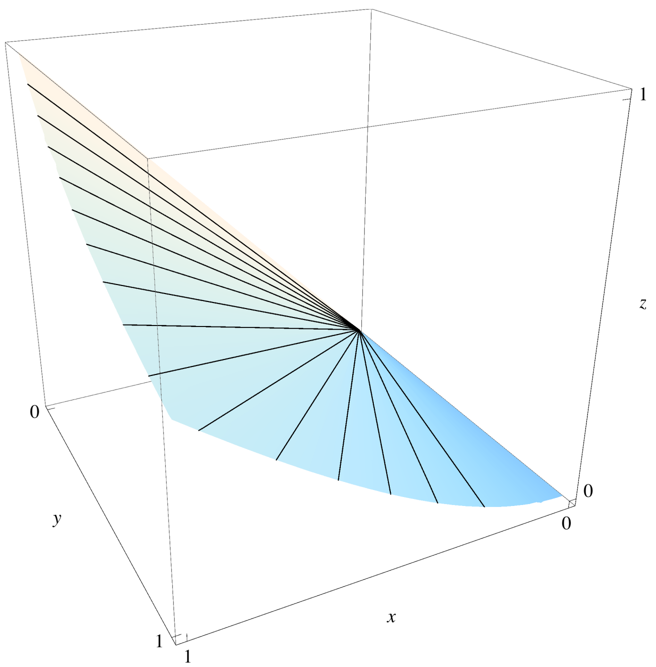
$$F(x,\, y) := \begin{cases} \frac{x^2}{x+y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La $F(x,\, y)$ è definita quando $x + y \neq 0$. La F è omogenea di grado 1. Ha limite (più o meno) infinito nei punti della retta $x + y = 0$, eccetto l'origine, dove il limite non esiste. Il grafico di questa funzione F è la quadrica $z(x + y) = x^2$, che è un cono ellittico, a cui va tolta la generatrice verticale che è l'asse z (però va tenuta l'origine). Nel grafico la parte di cono che sta nel primo ottante è evidenziata in verde:

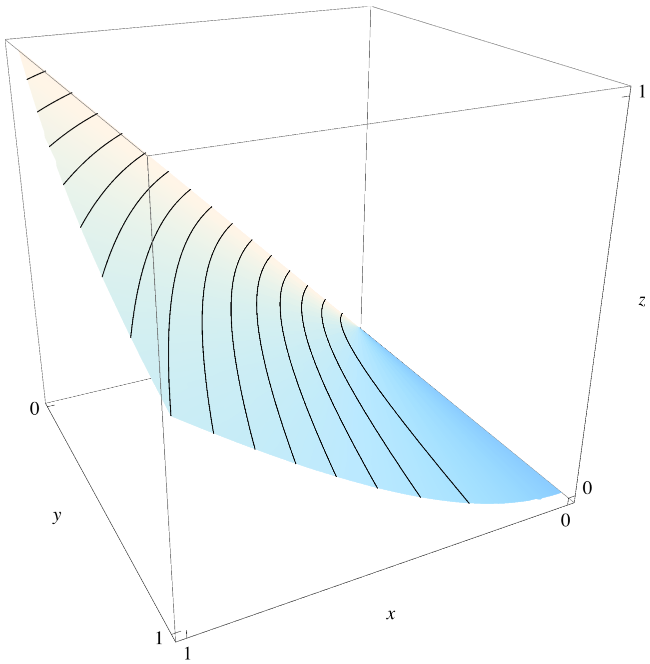
Out[43]=



La restrizione della funzione F al primo ottante è continua, pure nell'origine. Ecco la parte del grafico di F che sta nel primo ottante:



Lo stesso grafico, ma con evidenziate le linee di livello:



La derivata seconda mista di F fuori dalla retta $x + y = 0$ è $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(x, y) = -\frac{2\,x\,y}{(x+y)^3}$,che è una funzione omogenea di grado -2.

Definiamo la nostra funzione da integrare:

$$f(x, y) := \begin{cases} -\frac{2\,x\,y}{(x+y)^3} & \text{se } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa f vale 0 sugli assi, è illimitata inferiormente e non ha limite nell'origine. Eccone un grafico:

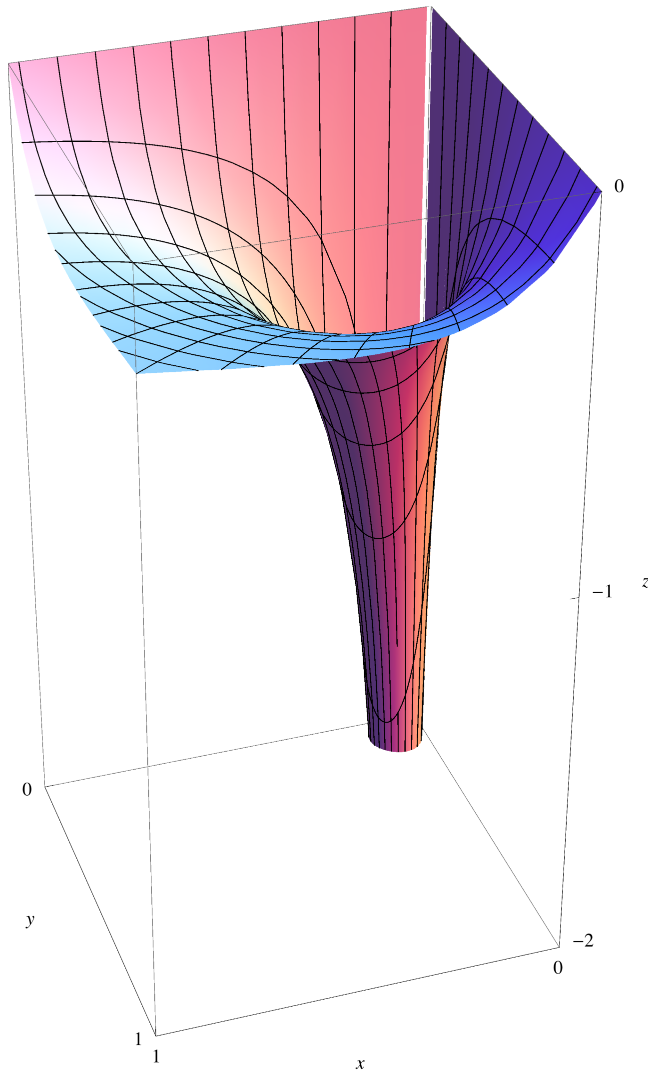
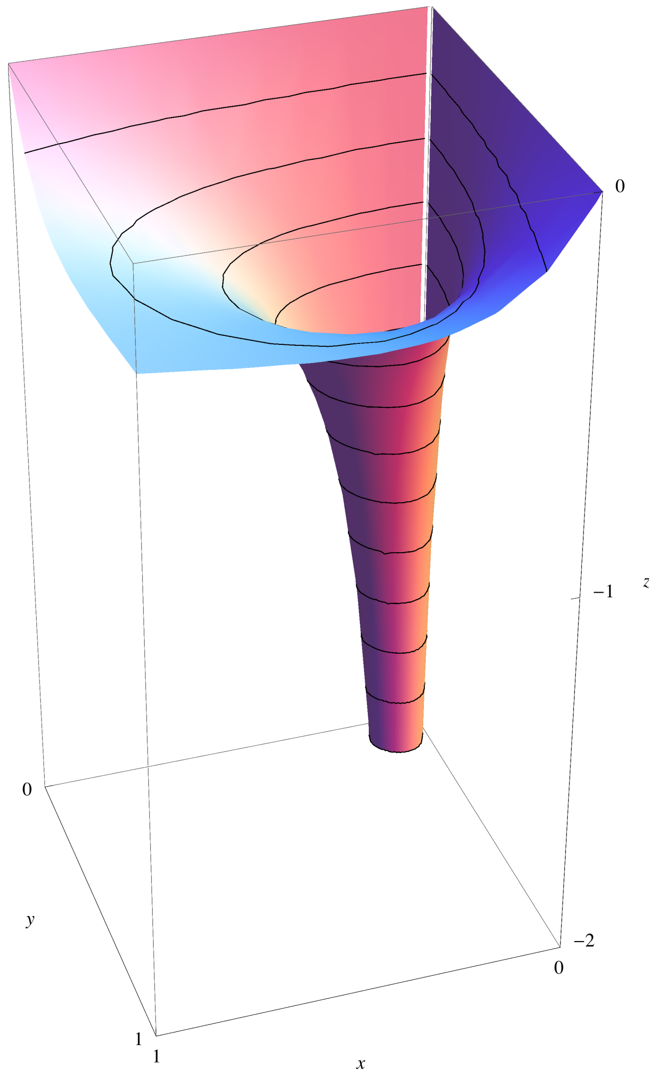
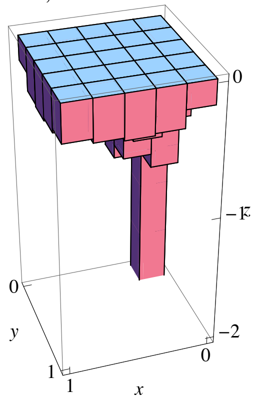


Grafico di f con le linee di livello evidenziate:

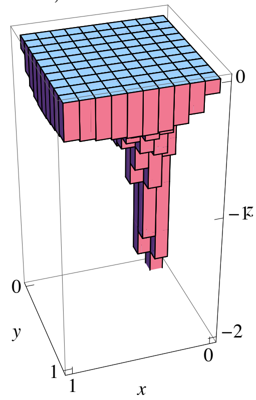


Approssimanti del volume con scacchiere 5×5, 10×10, 20×20, 30×30:

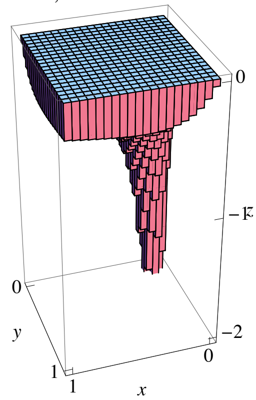
$n = 5$, volume $= -0.51577$



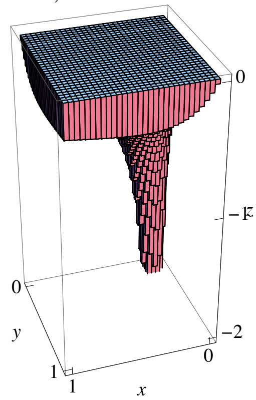
$n = 10$, volume $= -0.50930$



$n = 20$, volume $= -0.50501$



$n = 30$, volume $= -0.50342$



Il teorema fondamentale generalizzato in dimensione 2 si può applicare: la f risulta integrabile su $[0, 1]\times[0, 1]$ con integrale uguale a

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f = F(1, 1) - F(0, 1) - F(1, 0) + F(0, 0) = \frac{1^2}{1+1} - 0 - \frac{1^2}{1+0} + 0 = -\frac{1}{2}$$

Il valore previsto dalla teoria si accorda bene con i risultati delle somme di Riemann.

Esercizi

Discutere l'integrabilità e calcolare somme di Riemann per le seguenti funzioni:

$f(x, y) := \frac{x}{1+y}$ su $[0, 1]\times[0, 1]$;

$f(x, y) := \frac{x}{1+x+y}$ su $[0, 1]\times[0, 1]$;

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{1}{\log(x+y)}\right) & \text{se } (x, y) \in [0, 1/3]\times[0, 1/3]\setminus\{(0, 0)\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$